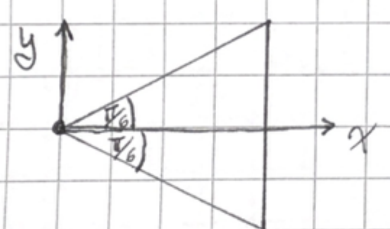
La matriz de inercia cuando una o más dimensiones son despreciables:

$$\mathbb{I} = \underbrace{\rho_0}_{\text{densidad volumétrica}} \iiint \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} \underbrace{dV}_{\text{diferencial volumétrico}}$$

Si una figura está en el plano $xy$, $z=0$

Además, como es un cuerpo plano, $\rho_0$ cambia por $\sigma_0 = \frac{M}{A}$, y $dV$ cambia por $dS$.

En este ejercicio en particular:




$\therefore$ límite inferior $= -x\, tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$

límite superior $= x\, tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$I = \frac{M}{A} \iint \begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix} dx\,dy$$

Donde $x$ va de $0$ a $H_\Delta$

$y$ va de $-x\, tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$ hasta $x\, tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\therefore\ I = \frac{M}{A} \int_0^H \int_{-tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot x}^{tg\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot x} \begin{pmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{pmatrix} dy\,dx$$

Como el cuerpo rota en torno a $\hat{k}$,

$$\vec{\omega} \cdot \hat{\imath} = \vec{\omega} \cdot \hat{\jmath} = 0 \rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad I \cdot \dot{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{21} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{33} \cdot \dot{\omega}_z \end{pmatrix}$$

Además, $\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix}$ pues todas las fuerzas están contenidas en el plano.

$\therefore \quad \vec{\tau} = I \dot{\vec{\omega}}$ se reduce a $\tau_z = I_{33} \dot{\omega}_z$