P2 (Auxiliares 12 y 14)

Nos piden calcular el trabajo W, que equivale a la variación de energía de una órbita a la otra. Veamos que el potencial efectivo es:

$$U^* = \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

En la órbita inicial: $r = R_0 \rightarrow \dot{r} = 0$

$$\therefore \quad E_0 = K_0 + U_0^* = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2}_{\text{Cinética radial}} + \underbrace{\frac{l^2}{2mr^2}}_{\text{Cinética tangencial}} - \underbrace{\frac{GMm}{r}}_{\text{Potencial gravitatorio.}}$$

$$\longrightarrow E_0 = \frac{l^2}{2mR_0^2} - \frac{GMm}{r}$$

El momento angular es: $l = mR_0v_0$.

Pero se cumple que $\vec{F_g} = \vec{F_c}$

$$-\frac{GMm}{R_0^2}\hat{\rho} = -\frac{v_0^2}{R_0}m\hat{\rho}$$

$$\longrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0}}$$

$$\therefore \quad l = m\sqrt{GMR_0}.$$

$$\longrightarrow E_0 = \frac{(m\sqrt{GMR_0})^2}{2mR_0^2} - \frac{GMm}{R_0} = \frac{GMm}{2R_0} - \frac{GMm}{R_0} = \frac{-GMm}{2R_0}.$$

Como el impulso es radial, se conserva el momento angular.

La energía final será:

$$E_f = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2mr^2} - \frac{GMm}{r}$$

Evaluando en R_{max}: $(\dot{r} = 0)$

$$E_f = \frac{\ell^2}{2mR_{max}^2} - \frac{GMm}{R_{max}}$$

y en R_{min} $(\dot{r} = 0)$

$$E_f = \frac{\ell^2}{2mR_{min}^2} - \frac{GMm}{R_{min}} = \frac{\ell^2}{2m(R_{max} - \delta)^2} - \frac{GMm}{R_{max} - \delta}$$

Como la energía es igual en ambos puntos:

$$\frac{\ell^2}{2mR_{max}^2} - \frac{GMm}{R_{max}} = \frac{\ell^2}{2m(R_{max} - \delta)^2} - \frac{GMm}{R_{max} - \delta}$$

Al resolver para R máximo se obtiene:

$$R_{max} = \frac{R_0 + \delta + \sqrt{\delta^2 + R_0^2}}{2}$$

Reemplazando para E_f:

$$E_f = \frac{2GMmR_0}{(R_0 + \delta + \sqrt{\delta^2 + R_0^2})^2} - \frac{2GMm}{R_0 + \delta + \sqrt{\delta^2 + R_0^2}}$$

Finalmente, $W = E_f - E_o$

$$W = 2GMm\left[\frac{R_o}{(R_o + \delta + \sqrt{\delta^2 + R_o^2})^2} - \frac{1}{R_o + \delta + \sqrt{\delta^2 + R_o^2}} + \frac{1}{4R_o}\right]$$