# **Auxiliar 14**: Pauta P1

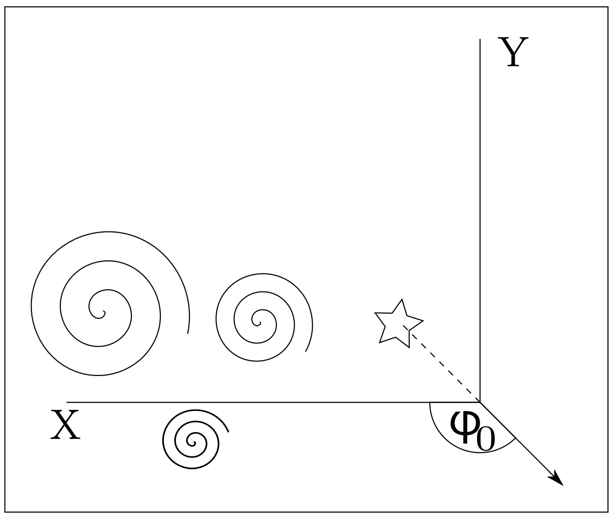
Docente: Patricio Cordero
Profesores Auxiliares: Germán Fernández, Teresa Valdivia

09 de Junio, 2017

**P1.** Utilizando la ecuación de Binet se tiene:

$$r(\phi) = \frac{\Re}{1 + e\cos\phi} \tag{1}$$

Siempre que el ángulo se mida desde el eje de simetría. Para medir el ángulo inicial, suponemos la estrella en el vértice de intersección de las ascíntotas de la hipérbola. Por lo tanto, el ángulo inicial es $\frac{3\pi}{2}$. (vean el Mono 1)




Mono 1

Al inicio del movimiento:

$$r_0 \to \infty$$
$$(1 + e\cos\frac{3\pi}{2}) \to 0$$

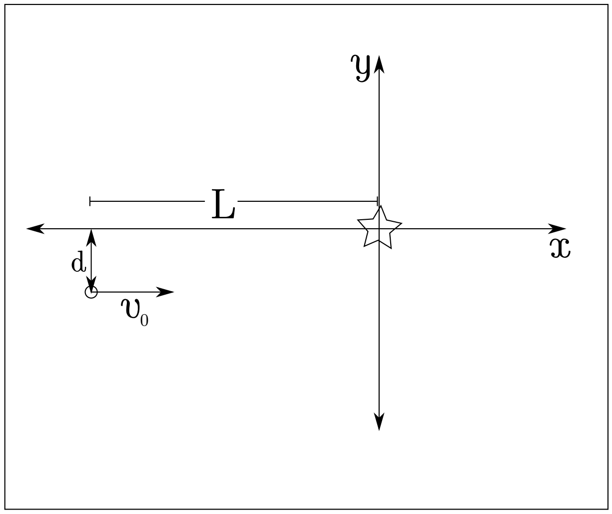
De esto podemos concluir que la excentricidad corresponde a:

$$e = \sqrt{2} \tag{2}$$

Además, según Binet, tenemos:

$$e^2 = 1 + \frac{2El^2}{(GM)^2 m^3} = 1 + \frac{d^2 v_0^4}{(GM)^2} \tag{3}$$

Donde se usó que la energía en el infinito, donde el potencial es nulo, es la energía cinética $EMT = K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ y que el momento angular, en módulo, corresponde a $l = mdv_0$ (Ver Mono 2).




Mono 2

$$\overrightarrow{r} = -L\hat{\imath} - d\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{v_0} = v_0\hat{\imath}$$

$$\overrightarrow{l} = m\overrightarrow{r} \times \overrightarrow{v_0} = mdv_0\hat{k}$$

Finalmente, de las ecuaciones (2) y (3) se determina que $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{d}}$

La distancia mínima se produce cuando $\phi = 0$. Para esta imposición, usamos que la nave se encuentra cerca de la estrella, por lo que $d$ ya no es despreciable. De esta forma:

$$r_{min} = \frac{\Re}{1+\sqrt{2}} \tag{4}$$

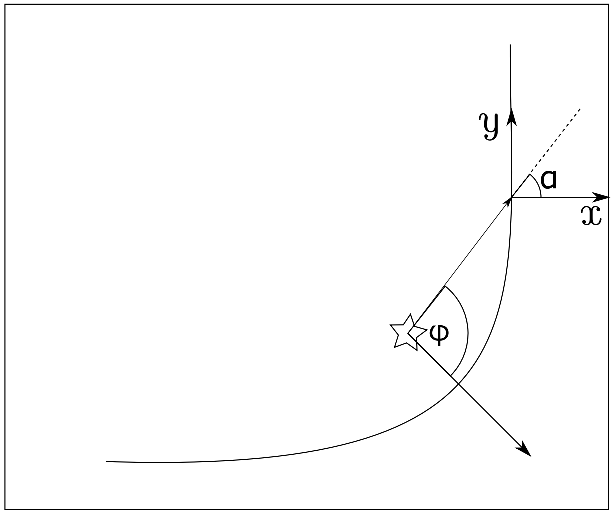
Además utilizamos que:

$$\Re = \frac{l^2}{GMm^2} = d$$

Finalmente,

$$r_{min} = \frac{d}{1+\sqrt{2}}$$

Como la nave no rota, fijaremos un sistema cartesiano no inercial para la nave, asociada a un sistema polar con centro en la estrella y eje polar de simetría para la trayectoria (Ver Mono 3).




Mono 3

$$\alpha = \phi - \frac{\pi}{4}$$

$$\hat{\rho} = \cos\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\hat{\imath} + \sin\left(\phi - \frac{\pi}{4}\right)\hat{\jmath}$$

De la no rotación, desprendemos que $\overrightarrow{\Omega} = 0$. Por lo que, usando la masa de la tripulación como $\mu$, se tiene

$$\mu \overrightarrow{a}' = \overrightarrow{F} - \mu \ddot{\overrightarrow{R}} \tag{5}$$

Buscamos $\ddot{\overrightarrow{R}} \cdot \hat{\rho}$:

$$\overrightarrow{R} = r$$
$$\ddot{\overrightarrow{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{\rho}$$

Como necesitamos sólo la fuerza central experimentada por la tripulación, haremos producto punto con $\hat{\rho}$ a ambos lados de la ecuación (5), obteniendo lo siguiente:

$$\overrightarrow{F_c} = -\frac{GM\mu}{r^2} - \mu\left(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2\right) \tag{6}$$

Se sabe que $m\ddot{r} = -\nabla U^*(r)$ de donde:

$$\ddot{r} = \frac{GM}{r^2}\left[\frac{d}{r} - 1\right]$$

Por conservación de momento angular, $l = mr^2\dot{\phi} = mdv_0 \to \dot{\phi}_{max} = \frac{dv_0}{r^2_{min}}$. Reemplazando los valores conocidos en (7) se obtiene, finalmente:

$$\overrightarrow{F_c} = \frac{GM\mu}{d^2}(4 + 3\sqrt{2})\hat{\rho} \tag{7}$$