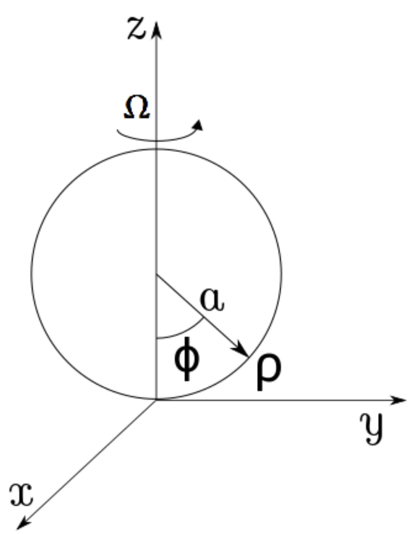
Pauta Ejercicio 7

Ítem	**Puntaje**
Planteo de fuerzas reales	Normal ½ Peso ½
Planteo de fuerza no real[1]	1
Ecuación de movimiento	1
Encontrar potencial	1
Determinar equilibrios estables	½ para el punto más bajo, ½ para los que están a los lados del riel.
Determinar frecuencias	½ y ½ .

a. Utilizando un sistema de coordenadas cartesianas fijo al piso, así como un sistema polar que se mueve solidariamente con el anillo que gira (ver figura) se obtienen los siguientes vectores significativos:



$$\vec{R} = a\hat{k} \rightarrow \ddot{\vec{R}} = 0$$
$$\vec{\Omega} = \Omega\hat{k}$$
$$\vec{r} = a\hat{\rho}$$
$$\vec{v} = a\dot{\phi}\hat{\phi}$$

Haciendo el diagrama de cuerpo libre, se obtiene que las fuerzas reales son:

$$\vec{p} = -mg\hat{k}$$
$$\vec{N} = -N\hat{\rho}$$

Notemos que, cuando ϕ es 0, $\hat{k} = -\hat{\rho}$, y en $\phi = \frac{\pi}{2}$ se tiene $\hat{k} = \hat{\phi}$. De ello, concluimos que

$$\hat{k} = -\cos\phi\,\hat{\rho} + \sin\phi\,\hat{\phi}$$

Reemplazando en los vectores significativos anteriores:

$$\vec{\Omega} = \Omega\left(-\cos\phi\,\hat{\rho} + \sin\phi\,\hat{\phi}\right)$$
$$\vec{r} = a\hat{\rho}$$
$$\vec{v} = a\dot{\phi}\hat{\phi}$$
$$\vec{p} = mg\left(\cos\phi\,\hat{\rho} - \sin\phi\,\hat{\phi}\right)$$
$$\vec{N} = -N\hat{\rho}$$

Operamos los vectores para obtener los componentes de la ecuación de movimiento relativo:

$$m\ddot{\vec{R}} = 0$$
$$m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) = -ma\sin\phi\,\Omega^2\left[\sin\phi\,\hat{\rho} + \cos\phi\,\hat{\phi}\right]$$

[1] Basta con indicar la fuerza centrífuga como $ma\Omega^2\cos\phi\sin\phi$ en la dirección radial hacia afuera.

$$2m\vec{\Omega}\times\vec{v} = -2ma\Omega\dot{\phi}\cos\phi\,\hat{k}$$
$$m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r} = 0$$

Finalmente, reemplazamos en la ecuación de movimiento para $\hat{\rho}$ y para $\hat{\phi}$:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = mg\cos\phi - N + ma\Omega^2\sin^2\phi$$
$$m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) = -mg\sin\phi + ma\Omega^2\cos\phi\sin\phi$$
$$= m\sin\phi\,(a\Omega^2\cos\phi - g)$$

Pero el radio ρ es constante e igual a a, por lo que se obtiene:

$$ma\ddot{\phi} = m\sin\phi\,(a\Omega^2\cos\phi - g)$$

b. Debemos recordar que $ma_{eff} = -\nabla U_{eff}$. Además, la aceleración efectiva en coordenadas polares es $a_{eff} = \ddot{\rho}\hat{\rho} + \rho\ddot{\phi}$ y que nabla es $\nabla_{polar} = \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}$

Se reconoce entonces que la ecuación destacada en gris es la masa por la aceleración efectiva angular. Creando la igualdad:

$$ma\ddot{\phi} = m\sin\phi\,(a\Omega^2\cos\phi - g) = -\frac{1}{a}\frac{dU}{d\phi}$$

Pero ocurre que buscamos puntos de equilibrio, en los cuales se tiene que $\frac{dU}{d\phi} = 0$

Reemplazando en la igualdad anterior:

$$ma\sin\phi\,(-a\Omega^2\cos\phi + g) = 0$$

Se obtiene entonces un total de cuatro soluciones:

- $\phi = 0$
- $\phi = \pi$
- $\cos\phi = \frac{g}{a\Omega^2}$, siempre y cuando $\frac{g}{a\Omega^2} \in [-1,1]$, pero dado que ambas magnitudes son positivas, la restricción se reduce a $\frac{g}{a\Omega^2} \leq 1 \rightarrow g \leq a\Omega^2$.

Conclusión: siempre existen dos equilibrios. Pueden ser 4 dependiendo de la condición hallada entre la rapidez del giro y la aceleración de gravedad.

Verificaremos si los equilibrios son estables o inestables. Para ello, utilizamos que ya conocemos $\nabla U_{eff} = ma\sin\phi\,(-a\Omega^2\cos\phi + g)$. Se debe encontrar que $\nabla^2 = \frac{1}{a}\frac{d}{d\phi}\left(\frac{1}{a}\frac{dU}{d\phi}\right) = \frac{1}{a}\frac{d}{d\phi}\left(m\sin\phi\,(g - a\Omega^2\cos\phi)\right) = \frac{m}{a}[g\cos\phi - a\Omega^2(1 - 2\sin^2\phi)]$

Debemos evaluar en los equilibrios. Si $\nabla^2 U > 0$, el equilibrio es estable, pero en caso contrario, es inestable.

- $\nabla^2 U(0) = \frac{m}{a}[g - a\Omega^2]$. Para que sea estable, debe cumplirse que $g > a\Omega^2$. Nótese que esta es la condición opuesta para la existencia de equilibrios en $\cos\phi = \frac{g}{a\Omega^2}$, por lo que si estos equilibrios existen, el punto más bajo es inestable. Por el contrario, si el punto más bajo es un equilibrio estable, los equilibrios teóricos en $\cos\phi = \frac{g}{a\Omega^2}$ no existen.
- $\nabla^2 U(\pi) = \frac{m}{a}[-g - a\Omega^2]$ lo cual es irremediablemente negativo, por lo que este equilibrio es inestable bajo cualquier circunstancia.

- $\nabla^2 U\left(\phi = \arccos\frac{g}{a\Omega^2}\right) = \frac{m}{a}\left[a\Omega^2 - \frac{g^2}{a\Omega^2}\right]$. Para que sea estable, debe cumplirse que $a\Omega^2 - \frac{g^2}{a\Omega^2} > 0 \to g < a\Omega^2$. Esta condición es **la misma** que debe cumplirse para que este ángulo sea un equilibrio. Por lo tanto, estos equilibrios **en caso de existir, son estables.** Además, si estos existen, el equilibrio del punto más bajo es inestable. En caso contrario, no existen y el equilibrio del punto más bajo es estable.

c. Dado que se ha utilizado ∇ con su correspondiente factor de escala, se obtiene cumple:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{U''}{\alpha}} = \sqrt{\frac{\nabla^2 U}{m}}$$

Evaluamos en el punto más bajo y se obtiene:

$$\omega_0(\phi = 0) = \sqrt{\frac{g}{a} - \Omega^2}$$

Evaluando en los puntos que, de existir, son estables:

$$\omega_0\left(\phi = \arccos\frac{g}{a\Omega^2}\right) = \sqrt{\left[\Omega^2 - \frac{g^2}{a^2\Omega^2}\right]}$$

Fin!