Pauta Control 2

Docente: Patricio Cordero
Profesores Auxiliares: Germán Fernández, Teresa Valdivia
17 de Mayo, 2017

P1.
a)
- Ecuación de movimiento. 1pto
- Cálculo de la velocidad. 1pto

b)
- Momento angular inicial. 1pto
- Igualar con momento angular al instante de corte. 1pto

c)
- Conservación de energía. 1pto
- Conservación de momento angular. 1pto

P2.
a)
- Cálculo de energía inicial. 1pto
- Planteo de la ecuación diferencial (Energía en función del ángulo). 1pto
- Resolución de la EDO. 1pto

b)
- Encontrar el rango en que está definida la solución. 1pto
- Determinar la ascíntota. 1pto
- Gráfico (que esté parecido en algo al gráfico de la pauta). 1pto

---

P1. *a*) Utilizando coordenadas esféricas con origen en el vértice del cono y eje cenital vertical hacia arriba, se tiene:

$$\vec{p} = mg(-\cos\theta\hat{\rho} + \sin\theta\hat{\theta})$$
$$\vec{N} = -N\hat{\theta}$$
$$\vec{T} = -T\hat{\rho}$$

Nos interesa particularmente la tensión, por lo que usamos $\vec{a}_\rho = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 - \rho\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{\rho}$ para la ecuación Newtoniana de movimiento. Sin embargo, recordemos que θ es constante, por lo que $\dot{\theta} = 0$. También debemos recordar que para la primera parte, la longitud de la cuerda se conserva, por lo que $\rho = L \to \dot{\rho} = 0$.

$$F_\rho = ma_\rho$$
$$-mg\cos\theta - T = -mL\dot{\phi}^2\sin^2\theta$$
$$\dot{\phi}^2 = \frac{mg\cos\theta + T}{mL\sin^2\theta}$$

Para que exista una tensión $T = mg$ se tiene:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{\frac{mg}{2} + mg}{\frac{3}{4}mL} = \frac{\frac{3}{2}g}{\frac{3}{4}L} = 2\frac{g}{L}$$

Y la rapidez es $v = L\sin\theta\dot{\phi}$:

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}L\sqrt{2\frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{3}{2}gL}$$

b) De lo anterior se obtiene el momento angular inicial $\overrightarrow{l_0} = m\overrightarrow{r}_0 \times \overrightarrow{v}_0$

$$\overrightarrow{r}_0 = L\widehat{\rho}$$

$$\overrightarrow{v}_0 = \sqrt{\frac{3}{2}gL}\widehat{\phi}$$

$$\overrightarrow{l_0} = mL\widehat{\rho} \times \sqrt{\frac{3}{2}gL}\widehat{\phi} = m\sqrt{\frac{3}{2}gL^3}\widehat{\theta}$$

Para la distancia en que se corta L_c, ya vimos que

$$\dot{\phi}^2 = \frac{mg\cos\theta + T}{mL\sin^2\theta}$$

Pero buscamos $T = 2mg$:

$$\dot{\phi}_c^2 = \frac{mg\cos\theta + 2mg}{mL\sin^2\theta}$$

$$\dot{\phi}_c^2 = \frac{\frac{mg}{2} + 2mg}{\frac{3}{4}mL_c} = \frac{\frac{5}{2}g}{\frac{3}{4}L_c} = \frac{10g}{3L_c}$$

Pero dado que el momento angular se conserva, buscamos una expresión para $\overrightarrow{l}_c = m\overrightarrow{r}_c \times \overrightarrow{v}_c$

$$\overrightarrow{l}_c = mL_c\widehat{\rho} \times L_c\sin\theta\dot{\phi}_c\widehat{\phi} = m\sqrt{\frac{5}{2}gL_c^3}\widehat{\theta}$$

Por conservación de momento angular, hacemos $\overrightarrow{l}_0 = \overrightarrow{l}_c$:

$$m\sqrt{\frac{3}{2}gL^3} = m\sqrt{\frac{5}{2}gL_c^3} \rightarrow L_c = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}L$$

c) En el punto más alto, se tiene que la energía corresponde a:

$$E_f = \frac{1}{2}m\left(L_f\sin\theta\dot{\phi}_f\right)^2 + mgL_f\cos\theta$$

Además, dado que el momento angular se ha conservado, la expresión para el momento angular $\overrightarrow{l}_f$ es equivalente al momento angular inicial[1].

$$\overrightarrow{l}_f = mL_f\widehat{\rho} \times L_f\sin\theta\dot{\phi}_f\widehat{\theta}$$

Igualando al momento inicial $\overrightarrow{l}_0 = m\sqrt{\frac{3}{2}gL^3}\widehat{\theta}$ se obtiene la relación siguiente:

$$\dot{\phi}_f = \frac{1}{L_f^2}\sqrt{2gL^3}$$

Reemplazando en la ecuación de la energía final:

$$E_f = \frac{1}{2}m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{L_f}\sqrt{2gL^3}\right) + \frac{mgL_f}{2}$$

La energía inicial es:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgL\cos\theta$$

[1]puede utilizarse como referencia la condición de la velocidad de la parte (a) o de la parte (b) dado que entre sí, son iguales. Por simplicidad de estructura se elige la parte (a).

Pero v_0 fue calculado en la parte (a):

$$E_0 = \frac{5}{4}mgL$$

Y como la energía se conserva, $E_0 = E_f$, de donde se concluye la ecuación:

$$L_f^3 - \frac{5}{2}LL_f^2 + \frac{3}{2}L^3 = 0$$

P2. *a*) Tomando la referencia en el suelo (punto más bajo del anillo) la energía inicial es:

$$E_0 = K_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(4gR) = 2mgR$$

En un punto cualquiera del movimiento, la energía corresponde a:

$$E(h,v) = K(\dot{\phi}) + U_g(\phi) = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

Notemos que las incógnitas v y h se pueden obtener como sigue:

$$\overrightarrow{v} = \dot{\rho}\widehat{\rho} + \rho\dot{\phi}\widehat{\phi}$$
$$v = |\overrightarrow{v}| = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\phi})^2}$$

Y dado que el radio es constante $\rho = R \rightarrow \dot{\rho} = 0$:

$$v = R\dot{\phi}$$

Y por geometría, $h = R(1-\cos\phi)$. Finalmente, reemplazando en la energía

$$E(\phi,\dot{\phi}) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + mgR(1-\cos\phi)$$

Como no existen fuerzas disipativas, la energía se conserva a lo largo del movimiento: $E(\phi,\dot{\phi}) = E_0$. Igualando ambas expresiones, se obtiene:

$$\dot{\phi}^2 = \frac{2g}{R}(1+\cos\phi)$$
$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{2g}{R}}\sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}}\sqrt{2}^2 = 2\sqrt{\frac{g}{R}}\cos\frac{\phi}{2}$$
$$\frac{d\phi}{dt} = 2\sqrt{\frac{g}{R}}\cos\frac{\phi}{2}$$
$$\frac{d\phi}{\cos\frac{\phi}{2}} = 2\sqrt{\frac{g}{R}}dt$$

Utilizando el cambio de variable $u = \frac{\phi}{2}$ se obtiene:

$$\frac{du}{\cos u} = \sqrt{\frac{g}{R}}dt$$

Integrando con los límites correspondientes (cuando el tiempo es nulo, u es nula):

$$\sec(u)du = \sqrt{\frac{g}{R}}dt\int_0^u\int_0^t$$

[2]Se ha realizado una amplificación por $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ para obtener la estructura del coseno del ángulo medio

$$\ln\left(\frac{\operatorname{tg} u + \sec u}{\operatorname{tg} 0 + \sec 0}\right) = \sqrt{\frac{g}{R}}t$$

Se despeja el tiempo, devolviendo el cambio de variable:

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} + \sec\frac{\phi}{2}\right)$$

b) Se debe notar que esta función está bien definida para el rango $\phi \in [0, \pi[$, pues el argumento del logaritmo es positivo y mayor a la unidad en todo momento. Fuera de este rango, no nos interesa dado que la energía inicial NO permite que la partícula avance más allá del ángulo π. Sin embargo, ocurre que, en particular, el ángulo $\phi = \pi$ produce una indeterminación que indica que $t_{\phi\to\pi} = \infty$. Esto, gráficamente, indica que existe una ascíntota vertical en $\phi = \pi$. Además, el argumento del logaritmo comienza valiendo 1 cuando el ángulo es nulo, indicando que el tiempo inicial es 0. Finalmente, podemos ver que la derivada del tiempo es:

$$\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} + \sec\frac{\phi}{2}\right)' = \frac{1}{2\cos\frac{\phi}{2}} > 0$$

De ello concluimos que la función es creciente De hecho, la segunda derivada:

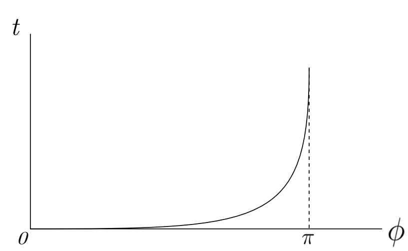
$$\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\phi}{2} + \sec\frac{\phi}{2}\right)'' = \frac{\sin\phi}{2\cos^4\frac{\phi}{2}} > 0$$

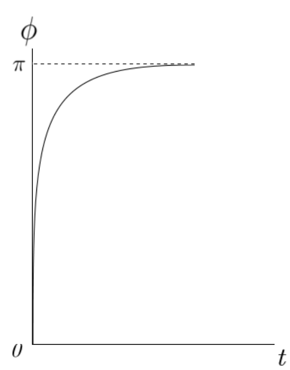
Por lo que incluso se puede concluir que es una función convexa.

Con la información anterior se tiene:

- $t > 0$
- t es creciente
- t es convexa
- t tiene una ascíntota vertical en $\phi = \pi$

por lo que se bosqueja $\phi(t)$[3]:





[3]Se grafica $t(\phi)$ primero, utilizando que la inversa $\phi(t)$ es su reflejo con respecto a la identidad