Pauta Auxiliar 10: Materias C2

Docente: Patricio Cordero
Profesores Auxiliares: Germán Fernández, Teresa Valdivia
10 de Mayo, 2017

P1. Pauta subida por Teresa en el Aux 9!

P2. Se determina el potencial asociado a la fuerza eléctrica:

$$k\frac{Q^2}{r^2}\widehat{\rho} = -\nabla V$$
$$k\frac{Q^2}{r^2}\widehat{r} = -\frac{\partial V}{\partial r}\widehat{r}$$
$$k\frac{Q^2}{r^2}dr = -dV$$
$$-kQ^2\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{ref}}\right) = V_{ref} - V(r)$$

Fijando que r_{ref} es en el infinito y que el potencial V_{ref} asociado a dicho punto es nulo, se tiene:

$$k\frac{Q^2}{r} = V(r)$$

Como se trata de una fuerza conservativa, ocurre que se conserva la energía. Por lo tanto, llamando D a la mínima distancia que habrá entre el protón fijo y el móvil, se calcula la energía inicial y la final:

$$E_0 = K_0 + V_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$
$$E_f = K_f + V_f = \frac{1}{2}mv_D^2 + k\frac{Q^2}{D}$$

Y dado que E_0 y E_f son iguales, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + k\frac{Q^2}{D}$$

Dado que se tienen dos incógnitas y una sola ecuación, se utiliza la conservación de momento angular para btener otra relación entre ambas incógnitas.

Llamando P al punto más cercano entre la recta y el protón fijo, y llamando L a la distancia entre dicho punto y el protón móvil, se tiene:

$$\overrightarrow{l_0} = m\overrightarrow{r}\times\overrightarrow{v} = m\left(\sqrt{d^2+L^2}\hat{\rho}\right)\times\left(-\frac{v_0L}{\sqrt{d^2+L^2}}\hat{\rho}+\frac{v_0d}{\sqrt{d^2+L^2}})\hat{\phi}\right) = mv_0d\hat{k}$$

Como en D la velocidad es perpendicular al radio (es el punto más cercano) se tiene que $\overrightarrow{l_D} = mv_D D\hat{k}$, y por conservación de momento angular (fuerza central) se tiene:

$$v_D = v_0 \frac{d}{D}$$

se reemplaza esta igualdad en la ecuación de igualdad de energía y se reduce con la indicación del ejercicio, para obtener D, v_D y $F(D)$.

P3. Próximamente :(

P4. Si la rapidez disminuye linealmente, se tendrá que $v(h) = v_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right)$ Además, se sabe que $v = \dot{h}$. de esta relación se obtiene, utilizando el cambio de variable $u = 1 - \frac{h}{H} \rightarrow \dot{u} = -\frac{\dot{h}}{H}$

$$\frac{du}{u} = -\frac{v_0}{H}dt \rightarrow u = e^{-\frac{v_0}{H}t} \rightarrow h(t) = H\left(1 - e^{-\frac{v_0}{H}t}\right)$$

Ahora veamos que para cualquier punto del trayecto, $E_h = \frac{1}{2}m\dot{h}^2 + mgh$, y recordando que la energía inicial es $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ se cumple que el trabajo ejercido en función de la altura es:

$$W(t) = E(t) - E(0) = \frac{1}{2}mv_0^2\left(\left(e^{-\frac{v_0}{H}t}\right)^2 - 1\right) + mgH\left(1 - e^{-\frac{v_0}{H}t}\right)$$

Finalmente, $P = \frac{dW}{dt}$