Integral de trabajo

Definición:

Se define la integral de trabajo con la fórmula:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Notemos que la complejidad se encuentra en hallar $d\vec{r} = \sum_1^3 d\left(r_{u_i}\right)\hat{u}_i$. Para cada sistema de coordenadas tendremos diferentes diferenciales de línea:

1. Cartesianas:

$$d\vec{r} = d\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) = \left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right)$$

2. Cilíndricas:

$$d\vec{r} = d\left(\rho\hat{\rho} + z\hat{k}\right) = \left(d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\theta} + dz\hat{k}\right)$$

3. Esféricas:

$$d\vec{r} = d(\rho\hat{\rho}) = d\rho\hat{\rho} + \rho d\hat{\rho} = \left(d\rho\hat{\rho} + \rho d\phi \sin\theta\hat{\phi} + \rho d\theta\hat{\theta}\right)$$

En seguida, recordemos que las fuerzas se escribirán como sigue:

1. Cartesianas:

$$\vec{F} = \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\right)$$

2. Cilíndricas:

$$\vec{F} = \left(F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_z\hat{k}\right)$$

3. Esféricas:

$$\vec{F} = \left(F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_\phi\hat{\phi}\right)$$

Reemplazamos en la definición de la integral:

1. Cartesianas:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = \int_{\Gamma} \left(F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}\right) \cdot \left(dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right) = \int_{x_0}^{x_f} F_x dx + \int_{y_0}^{y_f} F_y dy + \int_{z_0}^{z_f} F_z dz$$

2. Cilíndricas:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \left(F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_z\hat{k}\right) \cdot \left(d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\theta} + dz\hat{k}\right) = \int_{\rho_0}^{\rho_f} F_\rho d\rho + \int_{\theta_0}^{\theta_f} F_\theta \rho d\theta + \int_{z_0}^{z_f} F_z dz$$

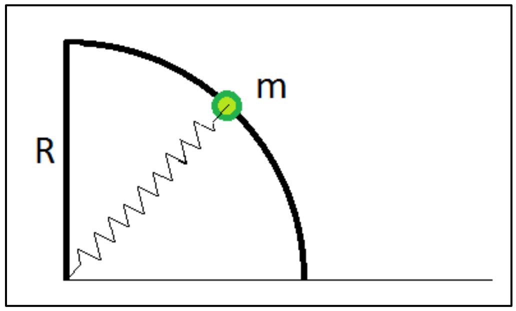
3. Esféricas:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \left(F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_\phi\hat{\phi}\right) \cdot \left(d\rho\hat{\rho} + \rho d\theta\hat{\theta} + \rho d\phi \sin\theta\,\hat{\phi}\right) = \int_{\rho_0}^{\rho_f} F_\rho d\rho + \int_{\theta_0}^{\theta_f} F_\theta \rho d\theta + \int_{\phi_0}^{\phi_f} F_\phi \rho d\phi \sin\theta$$

Notar que es muy importante que, si algo es constante, puede salir de las integrales; pero si algo es variable, debe ser expresado en función de la variable de integración y luego resolver.

Ejemplo

a) En la figura, se presenta una masa sometida a la gravedad, vertical hacia abajo y a un resorte de constante elástica k de longitud natural l_0. La partícula es movida, en primer lugar, verticalmente hacia arriba, desde el origen de coordenadas polar. En seguida, continúa un tramo de cuarto de circunferencia en sentido horario hasta toparse con el eje polar. Determine el trabajo realizado por la fuerza elástica y el trabajo realizado por el peso.



Definimos las fuerzas que actuarán sobre la partícula en nuestro sistema coordenado:

$$\vec{p} = mg(-cos\theta\hat{\theta} - \sin\theta\,\hat{r})$$

$$\vec{F_e} = k(l_0 - r)\hat{r}$$

- Trabajo realizado por el peso en el tramo vertical:

$$W_{p1} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \left(-mg\sin\theta\,\hat{r} - mg\cos\theta\,\hat{\theta}\right)\cdot\left(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}\right) = \int_{r_0}^{r_f} -mg\sin\theta\,dr + \int_{\theta_0}^{\theta_f} -mg\cos\theta\,rd\theta$$

$$= \int_0^R -mgdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -mg\cdot 0\cdot rd\theta = -mgR$$

- Trabajo realizado por el peso en el tramo curvo:

$$W_{p2} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma \left(-mg\sin\theta\,\hat{r} - mg\cos\theta\,\hat{\theta}\right)\cdot\left(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}\right) = \int_R^R -mg\sin\theta\,dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -mg\cos\theta\,Rd\theta$$

$$= -mgR\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\cos\theta\,d\theta = -mgR\left(\sin 0 - \sin\frac{\pi}{2}\right) = mgR$$

De los dos resultados anteriores, obtenemos que el trabajo total que ejerce el peso sobre la partícula es $W_{peso} = 0$.

- Trabajo realizado por la fuerza elástica en el tramo vertical:

$$W_{F_e1} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (k(l_0 - r)\hat{r})\cdot\left(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}\right) = \int_{r_0}^{r_f} k(l_0 - r)dr = \int_0^R k(l_0 - r)dr = Rkl_0 - \frac{kR^2}{2} = kR\left(l_0 - \frac{R}{2}\right)$$

- Trabajo realizado por la fuerza elástica en el tramo curvo:

$$W_{F_e2} = \int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\Gamma (k(l_0 - r)\hat{r})\cdot\left(dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta}\right) = \int_R^R k(l_0 - r)dr = 0$$

De donde se obtiene que el trabajo ejercido por la fuerza elástica es simplemente $W_{F_e} = kR\left(l_0 - \frac{R}{2}\right)$.