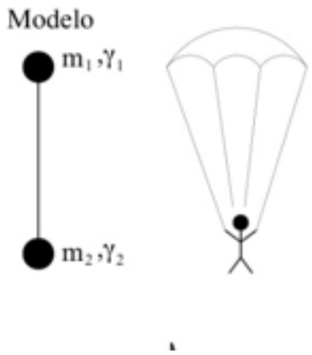
Pauta Ejercicio 3

P2 Una persona que cae con un paracaídas puede ser modelado como dos partículas de masas m_1 (paracaídas) y m_2 (persona) que están unidas por una cuerda de largo L. El paracaídas y la persona sufren fuerzas de roce viscoso con el aire del tipo $\vec{F} = -\gamma\vec{v}$ ($\vec{v}$ es la velocidad de la partícula), con coeficientes γ_1 y γ_2, respectivamente. Las condiciones son tales que $m_2 > m_1$ y $\gamma_1 > \gamma_2$. Suponga, además, que la cuerda siempre está tensa y que el movimiento es vertical y por ende unidimensional.

(a) Determine la velocidad con que cae el paracaidista en función del tiempo, si inicialmente parte del reposo.

(b) Calcule la tensión de la cuerda en función del tiempo. Muestre ahora que la cuerda siempre está tensa.



Solución P2 Si y es la coordenada vertical de la partícula "2" (persona) e $y+L$ la de la partícula "1", entonces las ecuaciones de movimiento para ambas partículas son:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{y} &= -m_1 g - \gamma_1\dot{y} - T \qquad (1) \\ m_2\ddot{y} &= -m_2 g - \gamma_2\dot{y} + T \qquad (2) \end{aligned}$$

1 punto

Sumando (1) con (2) se tiene

$$(m_1+m_2)\ddot{y} = -(m_1+m_2)g - (\gamma_1+\gamma_2)\dot{y}$$

1 punto

Llamando $v = \dot{y}$ se tiene

$$\dot{v} = -g - \frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{(m_1+m_2)}v$$

1 punto

cuya solución, al imponer $v(0) = 0$, es

$$v(t) = \frac{(m_1+m_2)}{(\gamma_1+\gamma_2)}g\left(e^{-\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{(m_1+m_2)}t} - 1\right)$$

1 punto

Al restar $m_1\times$(2) con $m_2\times$(1) se obtiene

$$0 = (m_2\gamma_1 - m_1\gamma_2)v + (m_1+m_2)T$$

con lo que se despeja

1 punto

$$T = \frac{(m_2\gamma_1 - m_1\gamma_2)}{m_1+m_2}(-v)$$

Como v es negativo y $m_2\gamma_1 > m_1\gamma_2$, entonces la tensión es siempre positiva.

1 punto