Auxiliar 8: Energía y fuerzas centrales

Docente: Patricio Cordero
Profesores Auxiliares: Germán Fernández, Teresa Valdivia

07 de abril, 2017

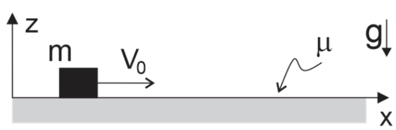
Integral de trabajo	$W_F = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \bullet \overrightarrow{ds}$
Fuerzas conservativas	$\overrightarrow{F} = -\nabla U(u_1, u_2, u_3)$
Gradiente vectorial	$\nabla = \Sigma_{i=1}^{3} \frac{1}{e_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\widehat{u_i}$
$\nabla = \frac{d}{dx}\hat{\imath} + \frac{d}{dy}\hat{\jmath} + \frac{d}{dz}\hat{k}$	$\nabla = \frac{d}{d\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\phi}\hat{\phi} + \frac{d}{dz}\hat{k}$
$\nabla = \frac{d}{dr}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{d\phi}\hat{\phi}$	
Factores de escala **(!)**	$e_i = \lvert\lvert \frac{\partial \overrightarrow{r}(u_1,u_2,u_3)}{\partial u_i} \rvert\rvert$
Energía cinética	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Roce viscoso	$F_{roce} = -\gamma v^{\alpha}\widehat{t}$

Cuadro 1: Resumencito ♡

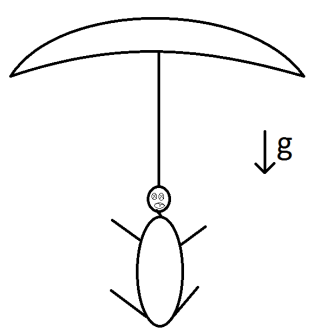
P1. Una partícula se mueve sobre una mesa horizontal bajo el campo conservativo:

$$V(x, z) = C(z + 2x)$$

Si inicialmente se le otorga una velocidad v_0, determine la máxima distancia que alcanza a recorrer.



P2. Un paracaidista puede ser modelado gracias al roce viscoso que se ha estudiado en cátedra, como se indica en la figura. Si se asume que el roce entre el hombre y el aire es suficientemente pequeño para ser despreciable, que las masas son M (para el humano) y m para el paracaídas, y que el roce viscoso es dado por γ y $\alpha = 2$ para el paracaídas; determine la velocidad del sistema para todo momento. Encuentre además, a partir de la parte anterior, el valor de la velocidad con que toca el suelo, asumiendo que el salto se produce a una gran altura ($t \to \infty$)



Puede serle de utilidad la siguiente primitiva (No. Es necesaria)

$$\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}$$

P3. En un experimento (ficticio xD) se desea calcular la masa de la tierra, aunque su radio R ya se conoce, gracias a las mediciones superficiales que se han podido realizar en el pasado. Se construye una torre de altura h perpendicular a la superficie (ver figura) y se lanza una bala extremadamente aerodinámica ($\gamma \to 0$) de masa m en dirección paralela a la superficie von rapidez v_0, logrando que esta describa una trayectoria elíptica que rosa perfectamente la superficie en el punto diametralmente opuesto del planeta. Utilizando el concepto de potencial, se le pide desarrollar las siguientes preguntas:

a) Utilizando la expresión para la fuerza gravitatoria, encuentre el potencial gravitatorio en función de la posición radial.

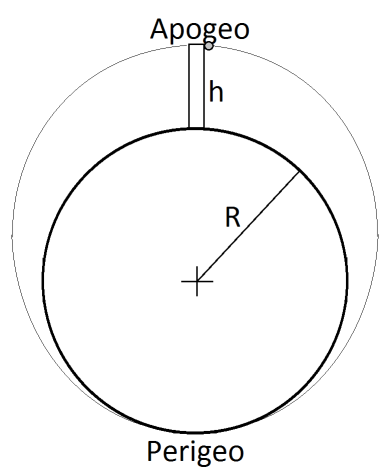
$$\vec{F}_g = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$$

b) Recordando que en el apogeo [1] y en el perigeo [2] el momento angular es el mismo, determinar la relación que existe entre las rapideces en dichos puntos.

c) Calcule la masa de la Tierra.

d) Asuma que conoce la masa de la Tierra M. ¿Qué velocidad es necesaria para que se cumpla lo anterior si el lanzamiento se realiza desde una torre muy pequeña comparada con el radio de la Tierra?

e) Verifique que el resultado de la parte (3*d*) se puede obtener de forma directa utilizando materias anteriores (Cinemática y dinámica).



[1] Punto más lejano entre la órbita de un satélite terrestre y el centro del planeta
[2] Punto más cercano entre la órbita de un satélite terrestre y el centro del planeta