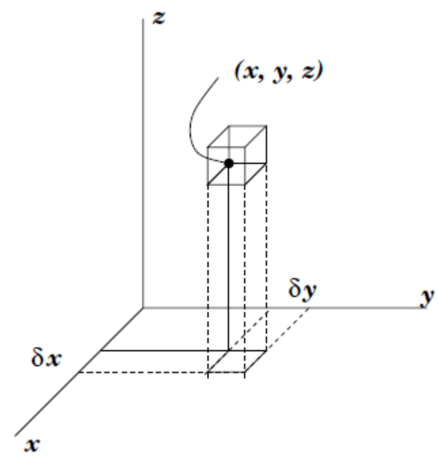
Sistemas de Coordenadas

Rectangulares $(x, y, z) \rightarrow (\hat{\imath},\ \hat{\jmath},\ \hat{k})$

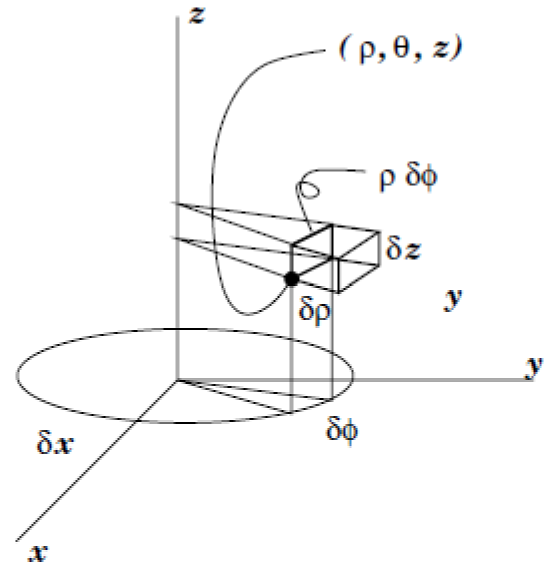


$$\vec{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

Cilíndricas $(\rho, \phi, z) \rightarrow (\hat{\rho},\ \hat{\phi},\ \hat{k})$

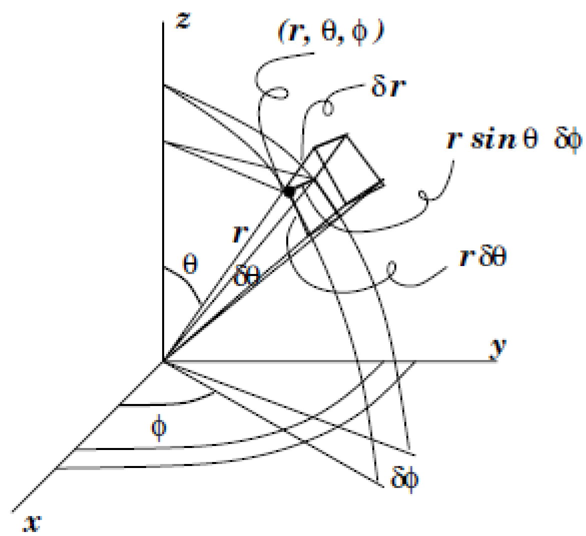


$$\vec{r} = \rho\,\hat{\rho} + z\,\hat{k}$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{\rho} + \rho\,\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = (\,\ddot{\rho} - \rho\,\dot{\phi}^2\,)\,\hat{\rho} + (\,\rho\,\ddot{\phi} + 2\,\dot{\rho}\,\dot{\phi}\,)\,\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{k}$$

Esféricas $(r, \theta, \phi) \rightarrow (\hat{r},\ \hat{\theta},\ \hat{\phi})$



$$\vec{r} = r\,\hat{r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\,\dot{\theta}\hat{\theta} + r\,\dot{\phi}\,\sin(\theta)\,\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2(\theta)\right)\hat{r}$$

$$+ \left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta} - r\,\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\hat{\theta}$$

$$+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(\dot{\phi}r^2\sin^2\theta)\,\hat{\phi}$$

Fuerzas Conservativas

$\vec{F} = f_1\hat{\imath} + f_2\hat{\jmath} + f_3\hat{k}$es campo conservativo si se cumple alguno de estos puntos:

- f_i es de clase C^1 , para i=1,2,3 y además $\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$
- Si existe una función g escalar de clase C^2 tal que $-\nabla g = \vec{F}$, entonces g es potencial de $\vec{F}$.

Cartesianas:

$(x, y, z) \rightarrow (\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$

$g(x, y, z) = g$

$\vec{F} = f_1\hat{\imath} + f_2\hat{\jmath} + f_3\hat{k}$

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Cilíndricas:

$(\rho, \theta, z) \rightarrow (\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k})$

$g(\rho, \theta, z) = g$

$\vec{F} = f_1\hat{\rho} + f_2\hat{\theta} + f_3\hat{k}$

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{k}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_3}{\partial \theta} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial \rho}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho f_2)}{\partial \rho} - \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right)\hat{k}$$

Esféricas:

$(r, \theta, \phi) \rightarrow (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$

$g(r, \theta, \phi) = g$

$\vec{F} = f_1\hat{r} + f_2\hat{\theta} + f_3\hat{\phi}$

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\, sin\theta}\frac{\partial g}{\partial \phi}\hat{\phi}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, f_3)}{\partial \theta} - \frac{\partial f_2}{\partial \phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_1}{\partial \phi} - \frac{\partial(r f_3)}{\partial r}\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r f_2)}{\partial r} - \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\right)\hat{\phi}$$

Trabajo y Energía

El trabajo de una fuerza $\vec{F}$ desde la posición $\overrightarrow{r_1}$ a $\overrightarrow{r_2}$ a lo largo de la curva $\mathcal{C}$ se calcula como

$$W^{\vec{F}}_{\overrightarrow{r_1}\to\overrightarrow{r_2},\mathcal{C}} = \int_{\overrightarrow{r_1}\ \mathcal{C}}^{\overrightarrow{r_2}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

El potencial de una fuerza conservativa $\vec{F_c}$ se puede definir en un punto tomando una posición de referencia como

$$V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_{ref}}^{\overrightarrow{r_2}} \vec{F_c}\cdot d\vec{r}$$

Equilibrio y Oscilaciones

Se puede describir la energía mecánica total de un sistema donde actúan solo fuerzas conservativas de la forma

$$EMT = \frac{1}{2}\alpha\,\dot{u}^2 + G(u)$$

Derivando en el tiempo, podemos llegar a la expresión

$$\ddot{u} = -\frac{G'(u)}{\alpha}$$

Para encontrar puntos de equilibrio buscamos puntos que cumplan

$$G'(u_{eq}) = 0 \leftrightarrow \ddot{u} = 0$$

Para analizar la estabilidad de estos, tendremos que

$$\text{Sea } u_{eq} \text{ un punto de equilibrio}\begin{cases} u_{eq}\ estable\ si\ G''(u_{eq}) > 0 \\ u_{eq}\ inestable\ si\ G''(u_{eq}) < 0 \end{cases}$$

Donde si el equilibrio es estable, la frecuencia de pequeñas oscilaciones está dada por

$$\omega_{po}^2 = \frac{G''(u_{eq})}{\alpha}$$

Movimiento planetario

Podemos describir el movimiento de un cuerpo de masa m orbitando en torno a otro de masa M tal que $M \gg m$ de acuerdo a las siguientes ecuaciones de la trayectoria, equivalentes entre si

$$r(\theta) = \frac{h^2/C}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} cos\theta} \qquad r(\theta) = \frac{r_0(1 + e)}{1 + e\ cos\theta}$$

Ec Física

Ec Geométrica

Donde h: Momento angular por unidad de masa.

C: $G \cdot M$

ϵ: Energía mecánica total por unidad de masa.

r_0: Radio mínimo de la órbita.

e: Excentricidad de la trayectoria.

Además estas ecuaciones pueden igualarse entre denominadores y numeradores

$$\frac{h^2}{C} = r_0(1 + e) \qquad \wedge \qquad 1 + \sqrt{1 + \frac{2\epsilon h^2}{C^2}} cos\theta = 1 + e\ cos\theta$$

Movimiento Relativo

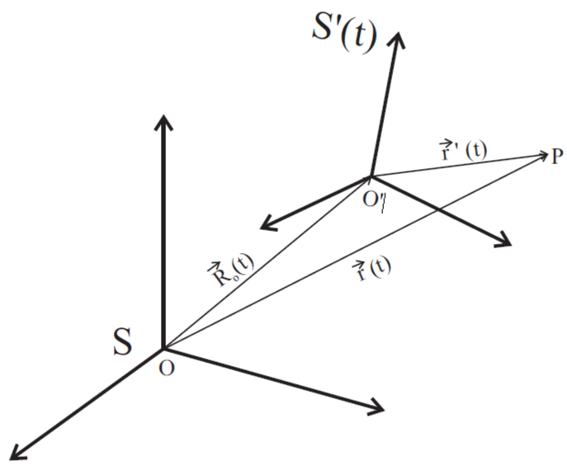


Figura 8.3 Apunte RMM
Posición de un punto P respecto a S y S'

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}' + \overrightarrow{\Omega_e} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{A}_0 + \vec{a}' + 2\vec{\Omega}_e x \vec{v}' + \vec{\Omega}_e x\left(\vec{\Omega}_e x \vec{r}'\right) + \vec{\alpha}_e x \vec{r}'$$

$$m\vec{a}' = \vec{F}^{neta} - m\vec{A}_0 - 2m\vec{\Omega}_e x \vec{v}' - m\vec{\Omega}_e x\left(\vec{\Omega}_e x \vec{r}'\right) - m\vec{\alpha}_e x \vec{r}'$$

Ecuaciónde movimiento para SRNI

Donde

$\vec{r}$:Posición absoluta, de P respecto a O.

$\vec{r}_0$:Posición de O respecto a O'.

$\vec{r}'$:Posición de P respecto a O'.

$\vec{v}$:Velocidad absoluta, de P respecto a O.

$\vec{v}_0$:Velocidad de Orespecto a O'.

$\vec{v}'$:Velocidad de Prespecto a O'.

$\overrightarrow{\Omega_e}$:Velocidad angular entre los ejes cartesianos de O y O'.

$\vec{a}$:Aceleración absoluta, de P respecto a O.

$\vec{A}_0$:Aceleración de O respecto a O'.

$\vec{a}'$:Aceleración de P respecto a O'.

$\vec{\alpha}_e$:Aceleración angular entre los ejes cartesianos de O y O'