

## Pauta Auxiliar 10 Sistemas

### Resumen: Ondas Propagativas y Estacionarias

- Oscilación colectiva: todo el sistema oscila colectivamente con una amplitud que depende de la posición
- Propagación de pulsos: perturbación que se propaga casi sin deformación

- Ecuación general de ondas:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = c^2 \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)$$

- Para una cuerda, que se puede deformar levemente en forma vertical (transversal),  
velocidad de propagación, con  $T$  tensión de la cuerda,  $\rho_L$  densidad lineal de la cuerda.  
 $\times c$  depende exclusivamente del medio, no de condiciones iniciales.

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = c^2 \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)$$

donde

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho_L}}$$

velocidad de propagación, con  $T$  tensión de la cuerda,  $\rho_L$  densidad lineal de la cuerda.

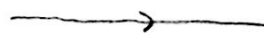
- Solución de D'Alembert:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

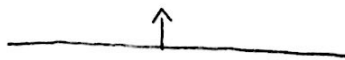
donde  $f(x - ct)$  describe una onda que se propaga hacia la derecha y  $g(x + ct)$  una que se propaga hacia la izquierda.

### Ondas Estacionarias

- deformaciones longitudinales.



- deformaciones transversales.



- Ondas armónicas:

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t - \phi)$$

donde tenemos que:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

;

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

número de onda

frecuencia angular

•  $A$  = amplitud

•  $\phi$  = constante de fase

} dependen de las condiciones iniciales.

• Se cumplen las relaciones  $\frac{\lambda}{T} = \frac{w}{k} = c = \sqrt{\frac{\text{Tensión}}{\rho}}$

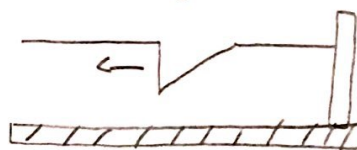
- Cuerdas semi-finitas

• Extremo fijo:  $y(0, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow y(x, t) = f(x - ct) - f(-(x + ct))$

Pulso incidente

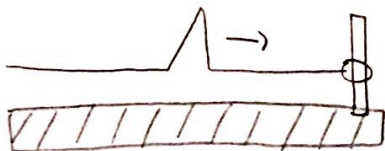


Pulso reflejado lado imaginario de cuerda

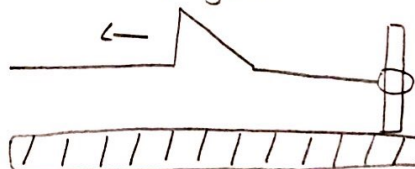


• Extremo móvil:  $\frac{\partial y(0, t)}{\partial x} = 0 \Rightarrow y(x, t) = f(x - ct) + f(-(x + ct))$

Pulso incidente



Pulso reflejado



- Modos normales en una cuerda finita: cuantas "lomas" o "valles" forma  $(\lambda_n, f_n)$

• Ambos extremos fijos:  $k_n = \frac{n\pi}{L}$  ;  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$  ;  $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$  ;  $f_n = \frac{nc}{2L}$

• Un extremo fijo y otro libre:  $\lambda_n = \frac{4L}{(2n-1)}$  ;  $f_n = \frac{(2n-1) \cdot c}{4L}$

• Ambos extremos libres:  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$  ;  $f_n = \frac{nc}{2L}$

$\Rightarrow$  obtenidos de la solución ondas estacionarias:  $y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t + \varphi)$

## Paura Auxiliar 10 Sistemas

P1 cuerda ideal muy larga, Tension  $T = 0,4 \text{ N}$ , densidad lineal  $\rho = 100 \text{ g/m}$

$$f(x) = e^{-\left(\frac{x+x_0}{d_0}\right)^2} \quad \text{y} \quad g(x) = e^{-\left(\frac{x-x_0}{d_0}\right)^2} \quad \begin{matrix} x_0 = 5 \text{ m} \\ \text{con } d_0 = 1 \text{ m} \end{matrix}$$

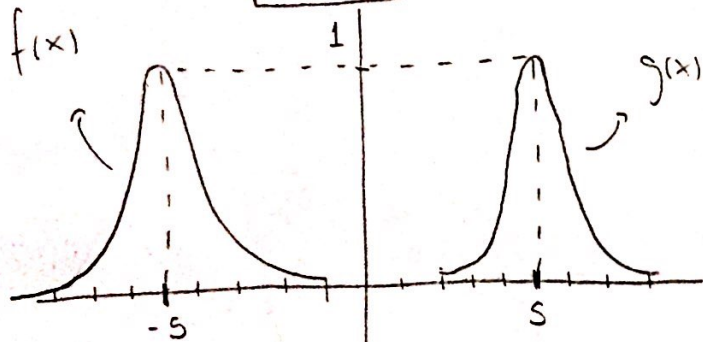
a) Dibujar forma de la cuerda en  $t=0$  y un seg. desps.

notemos que tanto  $f(x)$  como  $g(x)$  son funciones del tipo gaussianas, que se comportan así:

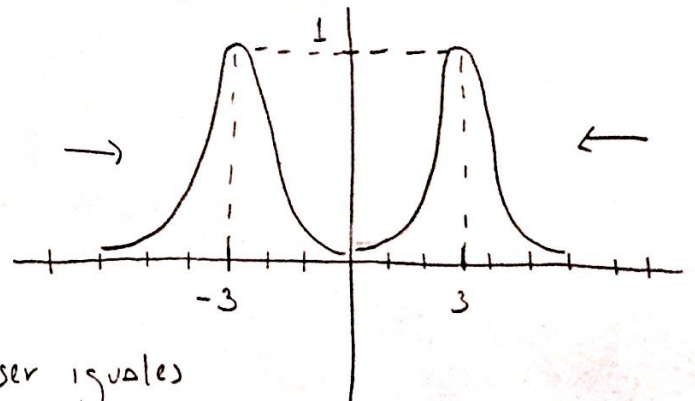
$h(x) = a e^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}}$ , donde  $a$  es la amplitud de la función,  $b$  es donde se centra y  $c$  es la desviación STD  $\Rightarrow$  que tan ancha es (la mayoría de los datos se encontraron entre  $-3c$  y  $3c$  del centro  $b$ ).

Como sabemos que en una cuerda  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \sqrt{\frac{0,4}{0,1}} = 2 \text{ m/s}$

en  $t=0$



en  $t=1 \text{ seg}$



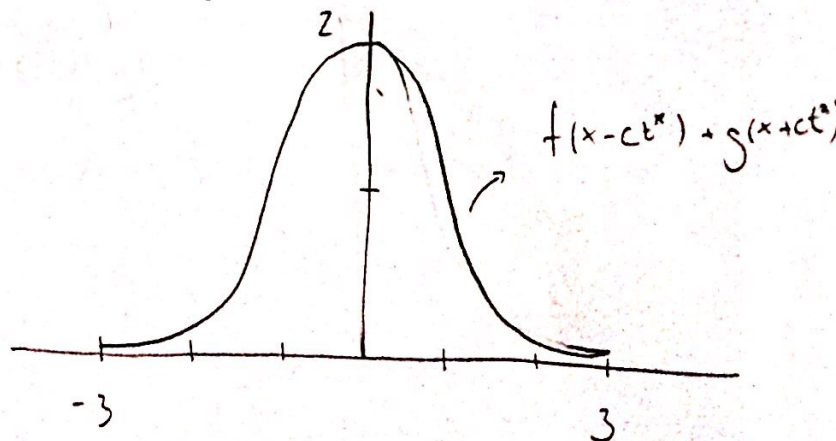
\* Los gráficos debiesen ser iguales pero desplazados.

b) Determine el tiempo  $t^*$  en que ambos pulsos se encuentran. Dibuje la cinemática del problema:

$$\Rightarrow f(x-ct^*) = g(x+ct^*) = e^{-\left(\frac{x}{d_0}\right)^2}$$

- ondas separadas por:  $10 \text{ m}$
- velocidad  $f(x)$ :  $2 \text{ m/s}$
- velocidad  $g(x)$ :  $2 \text{ m/s}$
- velocidad relativo:  $4 \text{ m/s}$

$$\Rightarrow \frac{10 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 2,5 \text{ s} = t^*$$



c) Grafique la velocidad transversal de la cuerda en  $t=0$  y  $t^*$   
 tenemos que  $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$  y queremos  $\dot{y}(x,t)$

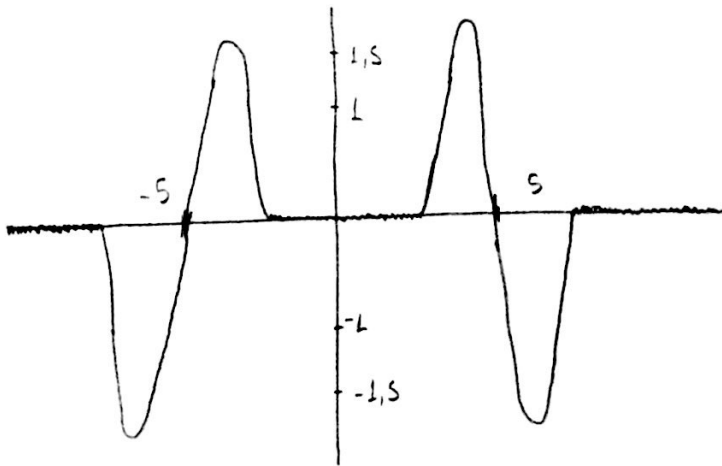
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(y(x,t)) = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)$$

$$\cdot f'(x-ct) = \left( -\frac{2(x-ct)}{d_0^2} - \frac{2x_0}{d_0^2} \right) \cdot e^{-\left( \frac{x-ct+x_0}{d_0} \right)^2}$$

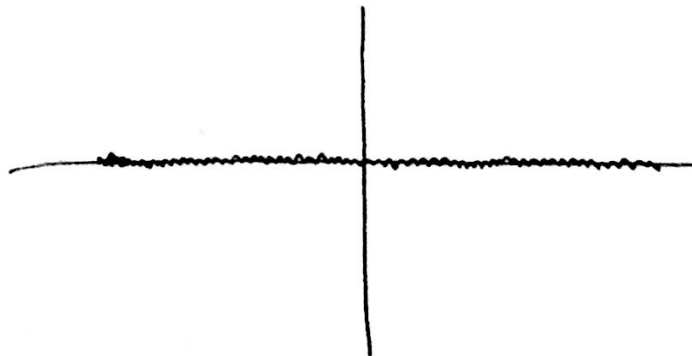
$$\cdot g'(x+ct) = \left( -\frac{2(x-ct)}{d_0^2} + \frac{2x_0}{d_0^2} \right) e^{-\left( \frac{x+ct-x_0}{d_0} \right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(y(x,t)) = 2c \left( \frac{x-ct+x_0}{d_0^2} \right) e^{-\left( \frac{x-ct+x_0}{d_0} \right)^2} - 2c \left( \frac{x+ct-x_0}{d_0^2} \right) e^{-\left( \frac{x+ct-x_0}{d_0} \right)^2}$$

$t=0s$



$t=2,5s$



$\Rightarrow$  las curvas se anulan por simetría c/r a la horizontal

## Parte Auxiliar 10 Sistemas

P2) Cuerda de guitarra,  $L = 0,7 \text{ m}$ , dens. lineal  $\mu_L = 75 \text{ kg/m}$ , nota de frecuencia  $f = 190 \text{ Hz}$  en primer modo de oscilación normal ( $f_1$ )

a) Det. longitud de onda del modo fundamental de oscilación ( $\lambda_1$ )

Al ser del tipo fijo-fijo:  $y(x=0) = y(x=L) = 0$ , podemos usar

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} ; c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f ; f_n = \frac{nc}{2L}$$

$$\therefore \lambda_1 = \frac{2 \cdot 0,7}{1} = 1,4 \text{ m}$$

b) velocidad de propagación

$$\Rightarrow c = \lambda \cdot f \Rightarrow c = 1,4 \text{ m} \cdot 190 \text{ Hz} = 266 \text{ m/s}$$

c) Tensión de la cuerda

→ Recordar que en una cuerda:  $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$  con  $T$  tensión

$$\therefore 266 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 = \frac{T}{0,0075 \text{ kg/m}} \Rightarrow T = 495,29 \text{ N}$$

c) frec. oscilación de los tres próximos modos normales

$$\text{usando } f_n = \frac{n \cdot c}{2L} \Rightarrow f_2 = \frac{2 \cdot 266}{1,4} \Rightarrow f_2 = 380 \text{ Hz}$$

$$\bullet f_3 = \frac{3 \cdot 266}{2L} = 570 \text{ Hz}$$

$$\bullet f_4 = 760 \text{ Hz}$$

e) frecuencia emitida en  $f_1$  si  $L' = 0,7 - 0,04 = 0,66$

$\Rightarrow L = 0,66 \text{ m} \Rightarrow f_1' = \frac{1 \cdot c}{2 \cdot 0,66} = \frac{1 \cdot 266}{2 \cdot 0,66} \Rightarrow \boxed{f_1' \approx 201,5 \text{ Hz}}$

f) Afinar para obtener  $f_1 = 196$  ¿Que tensión necesito?

$\Rightarrow f_1 = \frac{n \cdot c}{2 \cdot L} \Rightarrow 196 \cdot 1,4 = 1 \cdot c \Rightarrow c = 274,4 \text{ m/s}$

como  $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \Rightarrow 274,4^2 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \cdot 0,007 \text{ kg/m} = T$

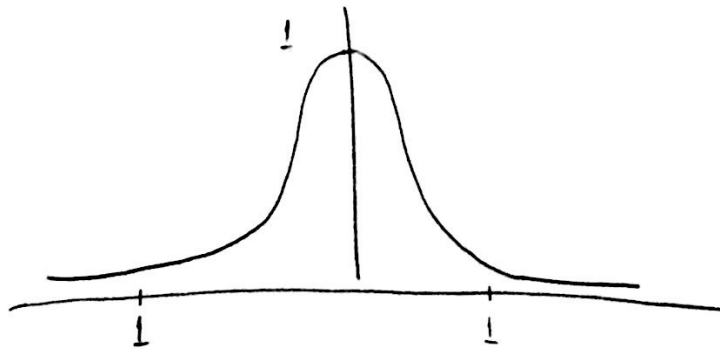
$\Rightarrow \boxed{T \approx 527,1 \text{ N}}$

P31 pulso  $y(x,t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x - ut)^2}$

a) Dibujar en  $t=0 \Rightarrow y(x,0) = \frac{b^3}{b^2 + 4x^2} \rightarrow$  simétrico en 0

si  $b=1 \Rightarrow y(0) = 1 ; y(1) = \frac{1}{5} ; y(0,5) = \frac{1}{2} ; y(0,3) = 0,74 ; y(0,8) = 0,28$

$y(0,9) = 0,236$



probar otros  $b$ , tienen forma similar, con distinta amplitud.

## Punto Auxiliar 10 Sistema

b) Determinar velocidad y sentido del pulso  $y(x, t) = \frac{b^3}{b^2 + (2x - ut)^2}$

queremos expresarlo como  $y(x - ct)$  o  $y(x + ct)$

Si identificamos  $\frac{u}{2}$  como  $c \Rightarrow y(x, t) = \frac{b^3}{b^2 + (2(x - \frac{u}{2}t))^2}$

$c$  es la velocidad de propagación  $\boxed{c = \frac{u}{2}}$  y al ser de la forma  $y(x - ct)$  el sentido es hacia la derecha!

c) Velocidad transversal

$$\frac{d}{dt}(y(x, t)) = -u \cdot \frac{-2b^3(2x - ut)}{[b^2 + (2x - ut)^2]^2}$$

$$V_y(0) = \frac{2ub \cdot 2x}{[b^2 + 4x^2]^2}$$

$\rightarrow$  solo de  $= -u \cdot \frac{d}{dx}(y(x, t))$