

PAUTA Auxiliar 8 Sistemas Newtonianos

Resumen Oscilaciones

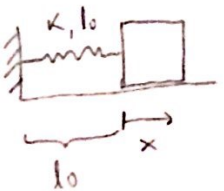
Existen distintos tipos de oscilaciones que estudiaremos en el curso: Movimiento Armónico Simple / sin amortiguar, oscilaciones amortiguadas, osc. acopladas y osc. forzadas

Recomiendo seguir los siguientes pasos para resolver estos Problemas:

1. Reconocer fuerzas (DCL) y armar 1^{ra} Ley de Newton
 2. dejar todo en función de la variable a observar ($x, \dot{x}, \ddot{x}$) y dejar al lado izquierdo todo lo que tenga que ver con la variable y al derecho todo lo que no
 3. Ver si se necesitan otras condiciones, torque, etc.
 4. Dividir lo que acompaña a $\ddot{x}$ y encontrar parámetros conocidos como:
 - ω^2 : frecuencia angular, es lo que acompaña a x
 - $\frac{1}{\tau}$: τ representa el tiempo de atenuación, depende del roce normalmente y es debido al amortiguamiento, acompaña a $\dot{x}$
 - alguna fuerza forzada sinusoidal, por ej $F_0 \sin(\omega t)$ u otras fuerzas constantes que no dependen de x , van al lado derecho de m la ecuación
- * puede ser necesario

1) Movimiento armónico simple, oscilación sin amortiguar

Ej: Resorte ideal este k



$$\left\{ \begin{array}{l} 1) F_c = -k\Delta x \Rightarrow \Delta F = -kx = ma \\ 2) -kx = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \\ 4) \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \end{array} \right.$$

Solución: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$\swarrow$ Amplitud $\swarrow$ fase $\swarrow$ este de fase

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

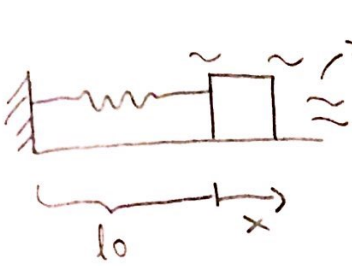
$$\tan \varphi_0 = \frac{-v_0}{x_0 \omega_0}$$

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2$$

* Podemos usar la aprox $\sin \theta \sim \theta$ para pequeñas oscilaciones ($\theta \ll 1 \text{ rad}$)

2) Oscilaciones Amortiguadas:



→ roce viscoso $-bv$

$$\left. \begin{array}{l} 1) F_e = -Kx \\ F_r = -bv \end{array} \right\} \Delta F = -Kx - bv = ma$$

$$2) -Kx - b\dot{x} = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = 0$$

$$4) \ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

⇒ Solución:

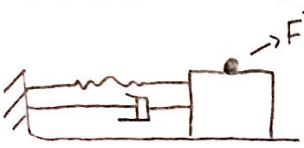
$$x(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

con

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$$

* A y φ_0 se obtienen de las cond. iniciales.

3) Oscilaciones forzadas:



→ $F_m = F_0 \text{sen}(\omega t)$

$$\left. \begin{array}{l} 1) \vec{F}_m, \vec{F}_e \text{ y } \vec{F}_r \Rightarrow \Delta F = -Kx - bv + F_0 \text{sen}(\omega t) = Ma \\ 2) -Kx - b\dot{x} + F_0 \text{sen}(\omega t) = M\ddot{x} \Rightarrow M\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = F_0 \text{sen}(\omega t) \\ 3) \ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{M} \text{sen}(\omega t) \end{array} \right\}$$

⇒ Solución:

$$x(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{F_0 / M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \text{sen}(\omega t - \delta)$$

con

$$\text{tg } \delta = \frac{\omega}{\tau(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

es la diferencia de fase entre la solución estacionaria y el forzamiento

* solución estacionaria $e^{-t/2\tau} \rightarrow 0$

• Amplitud sol estacionaria

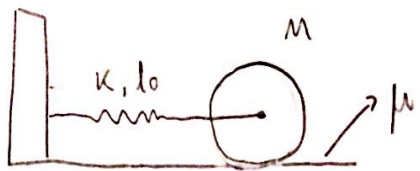
$$B = \frac{F_0 / M}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}$$

• Frecuencia de resonancia:

$$\omega_r^2 = \omega^2 = \omega_0^2 - 2\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$$

* con $\omega < \omega_r \Rightarrow \delta \approx 0^\circ$; con $\omega \gg \omega_r \Rightarrow \delta \approx 180^\circ$; con $\omega = \omega_r \Rightarrow \delta = 90^\circ$

P11

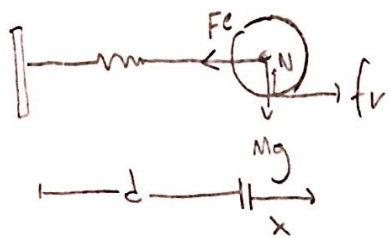


Anillo que rueda sin resbalar, $I_{\text{anillo}} = mR^2$

a) Encuentre la ecuación de movimiento del anillo para pequeños osc.

i) Despreciando el roce del aire

Estando estirado, del, si estaba en reposo a una dist. d (puede ser distinto a l_0)



1) f_r y F_e en $\hat{x}$ (no nos interesa $\hat{y}$)

$$\Rightarrow \square F_x = f_r - F_e = ma \Rightarrow f_r - K(x + d - l_0) = ma$$

$$2) f_r - K(x + d - l_0) = m\ddot{x}$$

3) Necesitamos usar el torque y la condición de que rueda sin resbalar

• Torque desde el CM: $f_r \cdot R = I_A \cdot \ddot{\theta}$ (1) suponiendo un sentido $\curvearrowright$

• condición de no resbalar: $\ddot{x} = -\ddot{\theta}R \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{\ddot{x}}{R}$ (2), (2) en (1)

$$\Rightarrow f_r = -I_A \cdot \frac{\ddot{x}}{R} \cdot \frac{1}{R} = -\frac{MR^2}{R^2} \ddot{x} = -M\ddot{x} \quad (3) \quad \text{en la ec. de movimiento}$$

$$\Rightarrow -M\ddot{x} - K(x + (d - l_0)) = M\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{2M}(x + (d - l_0)) = 0$$

definiendo la variable auxiliar $z = x + (d - l_0) \Rightarrow \dot{z} = \dot{x}$ y $\ddot{z} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{K}{2M}z = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \Rightarrow \boxed{z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)}$$

ii) Considerando el roce del aire $F_r = -bv$, $\Rightarrow$ es la misma ec pero con F_r

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{b}{2M}\dot{x} + \frac{K}{2M}(x + d - l_0) = 0 \quad \text{y con el mismo cambio de variable:}$$

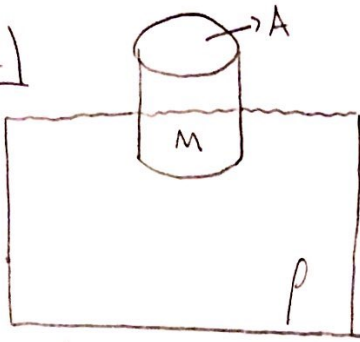
$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \Rightarrow \boxed{z(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \phi_0)}$$

tiempo de atenuación

$$\text{con } \Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2$$

$\hookrightarrow$ en 5τ decre un 99% aprox la oscilación.

PZ)

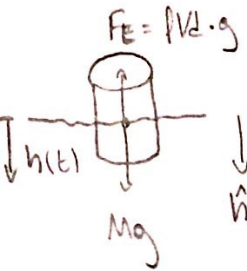


Cilindro de masa M y Área transversal A , flotando en un fluido de densidad ρ y experimenta fuerza de roce $F_r = -bv$, $F_E = \rho L V_d g$, V_d vol desplazado

a) Encuentre Periodo y tiempo de decaimiento en pequeños osc.

DCL:

donde $V_d = A \cdot h(t)$



$$1) F_E, Mg, F_r \Rightarrow -\rho A \cdot h g + Mg - bv = ma$$

$$2) -\rho A g \cdot h + Mg - b\dot{h} = m\ddot{h} \Rightarrow m\ddot{h} - b\dot{h} + \rho A g h = Mg$$

$$4) \ddot{h} + \frac{b}{m}\dot{h} + \frac{\rho A g}{m}h = g \rightarrow \text{no lo queremos, ¿qué hacemos?}$$

haremos un cambio de variable para incluir su efecto, pensemos en el movimiento del cilindro

Solución estacionario: avanzó un tiempo ∞ y se queda en equilibrio, entonces tendríamos

$$h(t^{\infty}) = h_e \quad \dot{h} = 0 \quad \ddot{h} = 0$$

$$\Rightarrow 0 + \cancel{\frac{b}{m} \cdot 0} + \frac{\rho A g}{m} h_e = g \Rightarrow \boxed{h_e = \frac{M}{\rho A} = \frac{g}{\omega_0^2}}$$

Solución transitoria: es lo que estudiamos, aquí oscila. entonces como se aleja de su punto de equilibrio definimos $s = h - h_e \Rightarrow h = s + h_e$, $\dot{h} = \dot{s}$ y $\ddot{h} = \ddot{s}$

$$\Rightarrow \ddot{s} + \frac{b}{m}\dot{s} + \frac{\rho A g}{m}s + \frac{\rho A g}{m}h_e = g$$

$$\Rightarrow \ddot{s} + \frac{b}{m}\dot{s} + \frac{\rho A g}{m}s + \cancel{\frac{\rho A g}{m} \cdot \frac{M}{\rho A}} = \cancel{g}$$

$$\Rightarrow \ddot{s} + \frac{b}{m}\dot{s} + \frac{\rho A g}{m}s = 0$$

$$\text{con } \boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}}; \boxed{\omega_0^2 = \frac{\rho A g}{m}}; \boxed{\Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega}}$$

P2] b) Encuentre Amplitud y este de fase φ_0 , h_0 = altura eq y $v_0 = 2 \text{ cm/s}$

$$\text{de } \ddot{s} + \frac{b}{m} \dot{s} + \frac{\rho A g}{m} s = 0 \Rightarrow s(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

Para calcular A y φ_0 necesitamos ver las condiciones iniciales

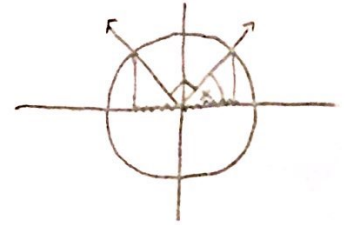
$$\Rightarrow s(0) = A \cdot 1 \cdot \cos(\varphi_0) = h(0) - h_e = 0$$

$$\therefore \cos(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow s(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + 90^\circ) = -A e^{-t/2\tau} \sin(\Omega t)$$

$$\text{y } \dot{s}(t) = -A \cdot \left(\frac{1}{2\tau}\right) \cdot e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t) \cdot \Omega$$

$$\dot{s}(0) = A \cdot \left(\frac{1}{2\tau}\right) \cdot 1 \cdot 1 \cdot \Omega = 2 \Rightarrow \boxed{A = \frac{4\tau}{\Omega}}$$



c) Fuerza empuja el cilindro desde arriba según $F = F_0 \sin(\omega t)$

$$\Rightarrow \ddot{h} + \frac{b}{m} \dot{h} + \frac{\rho A g}{m} h = g + \frac{F_0}{m} \sin(\omega t), \text{ usando el mismo cambio de variables}$$

$$\Rightarrow \ddot{s} + \frac{b}{m} \dot{s} + \frac{\rho A g}{m} \left(s + \frac{M}{\rho A}\right) = g + \frac{F_0}{m} \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow \text{Solución: } s(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\Omega t + \varphi_0) + \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \sin(\omega t - \delta)$$

$$\text{con } \boxed{\tau = \frac{m}{b}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega}} \text{ y } \boxed{\Omega^2 = \omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2}$$

* Cuando se tiene una ecuación del tipo $\ddot{x} + \omega_0^2 x = c$ con " c " conste

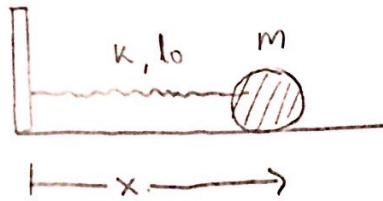
$$\text{hacer el remplazo } s = x - \frac{c}{\omega_0^2} \Rightarrow \ddot{s} + \omega_0^2 s = 0 //$$

• Como se calcula la amplitud máxima? $\rightarrow$ tiene que haber resonancia

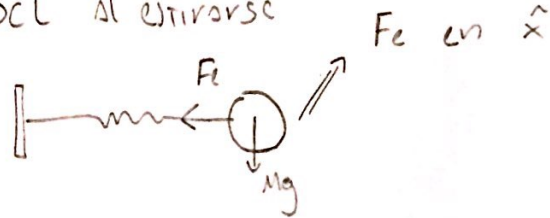
$$\text{ie, } \omega_r^2 = \omega_0^2 - 2 \left(\frac{1}{2\tau} \right)^2 //$$

P3) Encontrar ec de movimiento a) Despreciando el roce

$x_0 \sin(\omega t)$



1) DCL al estirarse



1) $-K \Delta x = ma$ pero como es Δx ? tiene que incluir tambien el movimiento de la pared, pensemos en un t pequeño, $\sin(\omega t)$ debiese ser positivo, osea que contrae el resorte y como en nuestro dcl suponemos estiramiento, tendremos:

$$\Delta x = ((x - x_0 \sin(\omega t)) - l_0)$$

$$\Rightarrow -K((x - x_0 \sin(\omega t)) - l_0) = ma$$

$$2) -K((x - x_0 \sin(\omega t)) - l_0) = m\ddot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + K(x - l_0) = Kx_0 \sin(\omega t)$$

y necesitaremos hacer un cambio de variables $z = x - l_0$; $\dot{z} = \dot{x}$; $\ddot{z} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{z} + Kz = Kx_0 \sin(\omega t)$$

$$4) \ddot{z} + \frac{K}{m}z = \frac{Kx_0}{m} \sin(\omega t) \Rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{Kx_0}{m} \sin(\omega t)$$

$\Rightarrow$ solución

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{Kx_0}{m} \sin(\omega t - \delta)$$

P3) ii) Ahora considerando el roce con el aire $F_r = -bv$

La parte difícil ya está hecha, ahora solo agregamos $-bv$

$$1) \quad ma = -K((x - x_0 \sin(\omega t)) - l_0) - bv$$

$$2) \quad m\ddot{x} = -K(x - l_0) + Kx_0 \sin(\omega t) - b\dot{x} \Rightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + K(x - l_0) = Kx_0 \sin(\omega t)$$

$$3) \quad \ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}(x - l_0) = \frac{Kx_0 \sin(\omega t)}{m}$$

y utilizando el mismo cambio de variable $z = x - l_0$, $\dot{z} = \dot{x}$, $\ddot{z} = \ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \frac{1}{\tau}\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{Kx_0}{m} \sin(\omega t)$$

y su solución es:

$$z(t) = A e^{-t/2\tau} \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{Kx_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}} \sin(\omega t)$$