
Auxiliar Extra Control 1

Problema 1: Análisis dimensional

Un parámetro sin dimensiones es un número que busca ser la fracción entre dos cantidades que se midan en alguna unidad en especial. Para este caso buscamos un parámetro de densidad de masa Ω . Para esto, veamos las unidades de las constantes con las que nos piden construir este parámetro de densidad:

$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

$$\frac{kgm}{s^2} = \frac{Gkgkg}{m^2}$$

$$G \equiv \frac{m^3}{kgs^2}$$

$$v = H_o d$$

$$\frac{m}{s} = H_o m$$

$$H_o \equiv \frac{1}{s}$$

Luego, notamos que entre las unidades de la constante de gravedad está inmersa una unidad de densidad de masa, pero sobra segundos al cuadrado. Afortunadamente, la constante de Hubble está medida en 1/s, por lo tanto, podemos arreglar para eliminar los segundos y quedarnos solo con unidades de densidad, de manera que el parámetro de densidad deseado quedaría como:

$$\Omega = \frac{\rho G}{H_o^2}$$

Problema 2: Estimaciones

a) En clases determinamos que una persona promedio pasa escuchando 4 horas de música al día, por lo tanto, lo que queda es multiplicar hasta alcanzar la unidad de horas de música escuchadas por una vida completa:

$$\frac{4 \text{ horas escuchadas}}{\text{día}} \times \frac{365 \text{ días}}{\text{año}} \times \frac{80 \text{ años}}{\text{vida}} \sim 1,2 \times 10^6 \frac{\text{horas escuchadas}}{\text{vida}}$$

b) Si bien, hay muchos detalles que pueden entrar en esta estimación, haremos lo más simple al considerar como patadas al balón los pases, los corners, los goles y los remates que no fueron goles. Entonces veamos

En clases, determinamos que en promedio un jugador de fútbol da 50 pases por partido, por lo tanto, en un partido completo se tienen $50 \times 22 = 1100 \frac{\text{pases}}{\text{partido}}$. Luego, debemos sumar los remates, que se estimaron en 20 y los corners que se estimaron en 10. Los goles no fueron considerados porque se estimaron 3 por partido, lo que es un número muy bajo para entrar en consideración. Por lo tanto tenemos un total de 1130 patadas al balón por partido. Considerando que en el mundial se jugaron 64 partidos tenemos un total de $1130 \times 64 \sim 7,2 \times 10^4 \frac{\text{patadas al balón}}{\text{mundial}}$.

Problema 3: Cinemática 1D

2

a) Primero, considerando el origen de tiempo y posición el lugar donde parte el estudiante, tendremos las siguientes ecuaciones a nuestra disposición:

$$\begin{aligned}x_e(t) &= vt \\x_T(t) &= d + \frac{at^2}{2} \\v_T(t) &= at\end{aligned}$$

Entonces, como queremos encontrar la posición y el tiempo en que se encuentran (lo mismo que recorrió el estudiante), podemos igualar ambas ecuaciones de itinerario y decir que se encontraron en un tiempo t' :

$$\begin{aligned}x_e(t') &= x_T(t') \\vt' &= d + \frac{a(t')^2}{2} \\0 &= d - vt' + \frac{a(t')^2}{2}\end{aligned}$$

Lo que es una ecuación cuadrática para el tiempo y por lo tanto da el siguiente resultado para el tiempo:

$$t' = \frac{v \pm \sqrt{v^2 - 2ad}}{a}$$

Tiempo que dejaremos con ambos signos como correctos, ya que será parte de análisis en la parte c). Finalmente, reemplazamos en la ecuación de itinerario del estudiante para encontrar la distancia que él recorrió:

$$x_e(t') = \frac{v(v \pm \sqrt{v^2 - 2ad})}{a}$$

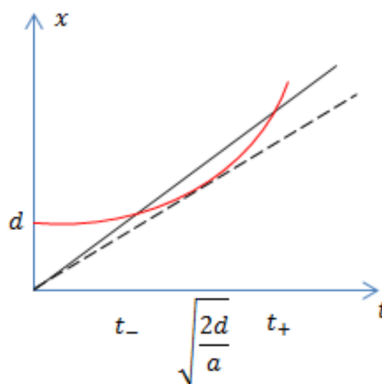
b) Para encontrar la velocidad del taxi en el momento (o los momentos, dado que tenemos las dos soluciones aún), simplemente hay que reemplazar el tiempo encontrado en la ecuación para la velocidad del taxi:

$$\begin{aligned}v(t') &= \frac{a(v \pm \sqrt{v^2 - 2ad})}{a} \\v(t') &= v \pm \sqrt{v^2 - 2ad}\end{aligned}$$

c) Aquí es donde debemos analizar la naturaleza de las soluciones encontradas anteriormente. Más específicamente, notamos que la solución para el tiempo nos puede dar dos soluciones reales y diferentes, una solución real o dos soluciones complejas. Para efectos de la física, el tiempo no puede tener un valor complejo, por lo tanto, que la raíz sea negativa, representa que en realidad ese tiempo en el que se encuentran no existe, es decir, no se encuentran. Luego, la solución única representa que el estudiante y el taxi se encuentran en un solo punto. Finalmente, las dos soluciones reales representan que el estudiante y el taxi se encontrarían dos veces. Por lo tanto, analizamos la expresión de la raíz:

$v^2 > 2ad$, representa que el estudiante alcanza al taxi de sobra.
 $v^2 = 2ad$, representa que el estudiante justo alcanza al taxi.
 $v^2 < 2ad$, significa que el estudiante no alcanza al taxi.

d) El gráfico queda representado por dos rectas, donde la línea continua representa la situación en que $v^2 > 2ad$ y por lo tanto se encontraría dos veces con el taxi, y la línea segmentada representa el caso donde $v^2 = 2ad$, y por lo tanto, solo se topan una vez el estudiante y el taxista.



Problema 4: Cinemática 2D

Primero, antes de empezar a resolver con un plano inclinado, que es la esencia de este problema, debemos encontrar la velocidad de impacto de la bola de golf con el plano inclinado, que será utilizada como la velocidad inicial del problema posteriormente:

$$V_{\text{impacto}}^2 = 2gh$$

$$V_{\text{impacto}} = \sqrt{2gh}$$

Esta será la velocidad inicial del movimiento parabólico que empieza la bola de golf, una vez que consideramos un plano cartesiano inclinado y con origen en el punto de impacto. Así mismo, consideramos que el tiempo que se usa en las ecuaciones de itinerario, lo empezamos a contar desde el momento del rebote. Luego, con ayuda de la imagen de abajo (espero se entienda), se logra determinar que existe aceleración en ambos ejes, ya que en un plano inclinado la gravedad sigue apuntando hacia abajo, pero no coincide con ningún eje, por lo tanto, hay que descomponerla en ambos ejes:

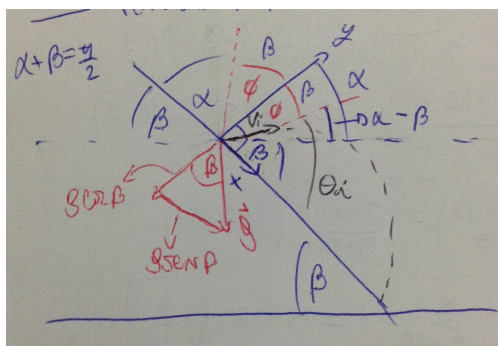
$$\text{aceleración eje } x = g \sin \beta$$

$$\text{aceleración eje } y = g \cos \beta$$

Finalmente, lo último que nos ayuda a determinar el gráfico es que el ángulo inicial de la velocidad con la que sale la bola de golf es $\theta_i = 90 - \beta$. Con lo que las componentes iniciales de la velocidad en cada eje quedan determinadas por:

$$V_{x_i} = \sqrt{2gh} \cos \theta_i = \sqrt{2gh} \cos(90 - \beta) = \sqrt{2gh} (\cos(90) \cos(\beta) + \sin(90) \sin(\beta)) = \sqrt{2gh} \sin(\beta)$$

$$V_{y_i} = \sqrt{2gh} \sin \theta_i = \sqrt{2gh} \sin(90 - \beta) = \sqrt{2gh} (\sin(90) \cos(\beta) - \cos(90) \sin(\beta)) = \sqrt{2gh} \cos(\beta)$$



Entonces, con cada componente de velocidad y aceleración determinados, sólo queda plantear las ecuaciones⁴ de itinerario e igualarlas en el momento y coordenadas en que la bola de golf toca por segunda vez el plano inclinado. A este punto donde la bola de golf toca por segunda vez el plano inclinado lo denominaremos $(D, 0)$, y al tiempo en que ocurre aquello t^* . Por lo tanto, para la ecuación en el eje y se tiene la siguiente igualdad:

$$0 = \sqrt{2gh} \cos(\beta) t^* - \frac{g \cos(\beta) (t^*)^2}{2}$$

$$0 = t^* (\sqrt{2gh} - \frac{gt^*}{2})$$

Lo que nos lleva a dos soluciones: Una es $t^* = 0$, la cual nos dice que en $t=0$ la bola de golf también estaba en el origen del plano y no nos aporta mayor información ni utilidad. La otra solución es la que nos sirve y nos dice el tiempo en que la bola de golf impactó el plano inclinado por segunda vez y es:

$$t^* = 2\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Luego, al meter este tiempo en la ecuación de itinerario para la coordenada x , podremos encontrar directamente la distancia pedida D :

$$D = \sqrt{2gh} \sin(\beta) 2\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{g \sin(\beta)}{2} \frac{8h}{g}$$

$$D = 4h \sin(\beta) + 4h \sin(\beta)$$

$$D = 8h \sin(\beta)$$