

Pauta Auxiliar 12

Introducción a la Física Newtoniana
25 de junio de 2017

Profesor: Luis Foa Torres
Auxiliares: Danilo Passi, Héctor Ramos, Nicolás Valdés

- P1.** Consideramos una órbita circular, con una masa m orbitando en torno a una masa M (asumimos que $M \gg m$, de manera que M está quieta). La única fuerza sobre m es la fuerza gravitacional, con dirección a M :

$$\sum F = F_g = \frac{mMG}{R^2} \quad (1)$$

Donde R es el radio de la órbita. Además de esto, sabemos que m está en movimiento circular, por lo que la fuerza neta en la dirección radial (hacia M) provoca una aceleración centrípeta:

$$\frac{mMG}{R^2} = \frac{mv^2}{R} \quad (2)$$

Donde v es la rapidez con que m orbita. Ahora, sabemos que la tercera ley de Kepler relaciona el periodo de órbita con el radio... Arriba tenemos el radio, pero falta el periodo. Para introducir esta variable, nos damos cuenta que

$$v = \frac{2\pi R}{T} \quad (3)$$

Con esto decimos que la rapidez de m es igual a la distancia que recorre en un periodo, dividida por el periodo. Reemplazando esto en la ecuación 2, tenemos:

$$\frac{mMG}{R^2} = \frac{m}{R} \cdot \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 \quad (4)$$

Ordenando esto un poco, llegamos a la ecuación buscada:

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{MG} = \text{constante}} \quad (5)$$

- P2.** Aquí conocemos la fuerza que ejerce una partícula sobre la otra en función de la distancia a la que están, entonces en principio podríamos utilizar cinemática (porque al conocer fuerza, conocemos la aceleración). Pero el problema es que va cambiando esta aceleración (es más grande mientras más se acercan las masas). Entonces vamos a utilizar energía y momentum, ya que no hay fuerzas externas al sistema (dado que es el universo completo, no hay nada externo xD), y además la gravedad es una fuerza conservativa.

Recordamos que la energía potencial gravitacional U en un sistema con una partícula de masa m y otra de masa M , separadas por una distancia r , es:

$$U = -\frac{mMG}{r} \quad (6)$$

Por lo tanto al comienzo, cuando las masas están separadas infinitamente (y asumimos que están quietas), tenemos que

$$E_i = 0 \quad (7)$$

$$p_i = 0 \quad (8)$$

Luego, cuando las masas se han acercado hasta estar a una distancia D , la masa m tendrá velocidad v_m , y M tendrá velocidad v_M , entonces:

$$E_f = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 - \frac{mMG}{D} \quad (9)$$

$$p_f = mv_m + Mv_M \quad (10)$$

Igualando energías y momenta (plural para momentum, es bacán), tenemos dos ecuaciones:

$$0 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 - \frac{mMG}{D} \quad (11)$$

$$0 = mv_m + Mv_M \quad (12)$$

Lo que queríamos encontrar es la velocidad relativa v_r , entonces tendremos otra ecuación:

$$v_r = v_m - v_M \quad (13)$$

(Podría ser con el signo cambiado, no importa. Lo importante es que corresponde a lo que vimos sobre movimiento relativo.)

Entonces con esta ecuación, podemos decir:

$$v_m = v_r + v_M \quad (14)$$

Además, con la ecuación 12, vemos que:

$$v_m = -\frac{Mv_M}{m} \implies v_r + v_M = -\frac{Mv_M}{m} \quad (15)$$

Despejando v_M ,

$$v_M = -\frac{mv_r}{m + M} \quad (16)$$

Ahora reemplazando esto en la ecuación 14, vemos que

$$v_m = \frac{Mv_r}{m + M} \quad (17)$$

Ahora estas dos últimas expresiones las podemos reemplazar en la ecuación 11, donde sólo hay que despejar v_r . El resultado final (les dejo los pasos de álgebra a ustedes) es

$$\boxed{v_r = \pm \sqrt{\frac{2G(m+M)}{D}}} \quad (18)$$

P3. Este problema es muy parecido al P1. Primero hay que recordar que nos están pidiendo el periodo T en términos del periodo T_0 de una sola luna en torno a la tierra; este periodo T_0 cumplirá

$$\frac{T_0^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{MG} \quad (19)$$

Donde R es el radio de órbita, y M la masa de la tierra. En este nuevo problema, consideramos que hay dos lunas, con el mismo radio R en torno a la tierra, y están diametralmente opuestas. Esto es importante porque significa que sobre cada luna, la fuerza gravitatoria sigue apuntando en dirección a la tierra, ya que la otra luna (que también la atrae) estará detrás de la tierra. (Y esto nos gusta porque justo resultará sumarse para formar una fuerza centrípeta.)

Analicemos a sólo uno de las lunas. La fuerza total sobre ella será:

$$\sum F = \frac{mMG}{R^2} + \frac{m^2G}{4R^2} \quad (20)$$

Donde el primer término toma en cuenta la atracción gravitacional debido a la tierra, y el segundo debido a la otra luna (que estará a una distancia $2R$). Igual que en el P1, esta fuerza neta debe resultar en una fuerza centrípeta:

$$\frac{mMG}{R^2} + \frac{m^2G}{4R^2} = \frac{mv^2}{R} = \frac{m}{R} \cdot \left(\frac{2\pi R}{T} \right)^2 \quad (21)$$

Ordenamos esto un poco

$$\frac{G(4M + m)}{4R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} \quad (22)$$

Entonces

$$T^2 = \frac{16\pi^2 R^3}{G(4M + m)} = \frac{4\pi^2 R^3}{MG} \cdot \frac{1}{1 + \frac{m}{4M}} \quad (23)$$

Revisando lo que dijimos al principio sobre T_0 , vemos que

$$\boxed{T^2 = \frac{T_0^2}{1 + m/4M}} \quad (24)$$

- P4.** (a) Si el par cae hacia al asteroide, tendremos que la masa más cercana al asteroide sentirá más atracción gravitacional, por lo que probablemente la tensión la tirará hacia atrás (y a la masa más lejana la “ayudará” a acelerar). Consideramos las fuerzas sobre la masa m que está más cerca al asteroide, llamémosla masa 1:

$$\sum F = \frac{mMG}{R^2} - T = ma_1 \quad (25)$$

Ahora sobre la otra masa:

$$\sum F = \frac{mMG}{(R+h)^2} + T = ma_2 \quad (26)$$

Queremos que ambas masas aceleren a la misma tasa ya que la cuerda es inextensible, entonces podemos igualar las fuerzas sobre la masa 1, con las fuerzas sobre la masa 2:

$$\frac{mMG}{R^2} - T = \frac{mMG}{(R+h)^2} + T \quad (27)$$

Queremos encontrar la tensión:

$$2T = \frac{mMG}{R^2} - \frac{mMG}{(R+h)^2} \implies T = \frac{mMG}{2} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2} \right) \quad (28)$$

En teoría estamos listos, pero este resultado es un poco feo... Usemos la aproximación, que $h \ll R$ para mejorar el término en paréntesis (llamémoslo $\mathcal{P}$):

$$\mathcal{P} = \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+h)^2} = \frac{(R+h)^2 - R^2}{R^2(R+h)^2} = \frac{2hR + h^2}{R^2(R+h)^2} \quad (29)$$

El término $(R + h)^2$ en el denominador lo aproximaremos como R^2 , ya que h casi no contribuye. Entonces,

$$\mathcal{P} \approx \frac{2hR + h^2}{R^4} = \frac{2h}{R^3} + \frac{h^2}{R^4} \quad (30)$$

El segundo término lo podemos despreciar, ya que $h \ll R$. Contribuye mucho menos que el otro término (prueben con números si no me creen! Asegurándose, claro, que h sea mucho menor a R , como mil veces menor, por ejemplo). Entonces finalmente tenemos

$$\mathcal{P} \approx \frac{2h}{R^3} \quad (31)$$

Esto lo reemplazamos dentro del paréntesis del resultado exacto que teníamos para la tensión T , y llegamos a una tensión aproximada:

$$\boxed{T \approx \frac{mMGh}{R^3}} \quad (32)$$

- (b) Ahora consideramos una atracción gravitacional entre las partículas. Veamos qué debe cumplir m para que la tensión sea nula. Las fuerzas sobre la masa 1 van a ser

$$\sum F = \frac{mMG}{R^2} - F_g \quad (33)$$

Donde F_g es la fuerza gravitacional entre las dos masas pequeñas. La puse con signo negativo porque la masa más lejos del asteroide tira a la otra hacia atrás. No incluí la tensión ya que queremos que sea nula. Las fuerzas sobre la masa 2 serán

$$\sum F = \frac{mMG}{R^2} + F_g \quad (34)$$

Ahora la atracción gravitacional va con signo positivo, ya que la masa más cercana al asteroide tira a la masa lejana hacia adelante. Comparen estas ecuaciones con las que teníamos al comienzo de la parte (a). Son exactamente las mismas, con el intercambio $T \rightarrow F_g$. Entonces para que las masas aceleren al mismo ritmo hacia el asteroide, tendremos que igual F_g al valor de T que encontramos en la parte (a):

$$F_g = \frac{mMGh}{R^3} \quad (35)$$

Recordemos que también

$$F_g = \frac{m^2G}{h^2} \quad (36)$$

Entonces,

$$\frac{m^2G}{h^2} = \frac{mMGh}{R^3} \implies \boxed{m = M \left(\frac{h}{R} \right)^3} \quad (37)$$