FI1001-1
Introducción a la Física Newtoniana
Otoño 2017
16 de Junio del 2017

Profesor: Luis Foa Torres
Auxiliares: Danilo Passi
Héctor Ramos
Nicolás Valdés

Pauta Auxiliar 10

Problema 1

Con las fórmulas de tiempo de vuelo y alcance podemos calcular la velocidad inicial del proyectil, para luego saber la posición exacta donde se dividió en dos:

$$t_{vuelo} = T = \frac{2Voy}{g}$$
$$V_{oy} = \frac{gT}{2}$$

$$L = V_{ox}T$$
$$V_{ox} = L/T$$

Luego, digamos que el punto más alto donde el proyectil se divide tiene coordenadas (D, h), entonces, considerando el tiempo en el que se llega al punto más alto como T/2, se tiene que:

$$D = V_{ox}(T/2)$$
$$D = \frac{L}{T}\frac{T}{2} = \frac{L}{2}$$

$$h = V_{oy}(T/2) - \frac{g(T/2)^2}{2}$$
$$h = \frac{gT}{2}\frac{T}{2} - \frac{gT^2}{8}$$
$$h = \frac{gT^2}{8}$$

Luego, en un tiempo T/2 la mitad 1 vuelve al origen desde el punto (D, h), con eso podemos calcular sus velocidades en cada eje:

$$0 = D + V_{1x}(T/2)$$
$$V_{1x} = -\frac{L}{T}$$

$$0 = h + V_{1y}\frac{T}{2} - \frac{g(T/2)^2}{2}$$
$$0 = \frac{gT^2}{8} + V_{1y}\frac{T}{2} - \frac{gT^2}{8}$$
$$V_{1y} = 0$$

Luego, de este último resultado se infiere inmediatamente que la velocidad en en el y de la segunda mitad también es cero, ya que el proyectil, en el punto más alto sólo tenía velocidad en el eje x, mientras que en el eje y era nula, por lo tanto, si una de las velocidades es nula, la velocidad de la otra mitad también debe serlo para conserar el momentum en el eje y. Entonces, por conservación de momentum, encontraremos la velocidad de salida de la segunda mitad en el eje x:

$$P_{xi} = P_{xf}$$
$$mV_{ox} = \frac{m}{2}V_{1x} + \frac{m}{2}V_{2x}$$
$$\frac{L}{T} = -\frac{L}{2T} + V_{2x}/2$$
$$\frac{3L}{T} = V_{2x}$$

Entonces las velocidades de la segunda mitad en cada eje serían: $V_{2x} = 3L/2T$ y $V_{2y} = 0$ y con ellas, podemos calcular el tiempo que se demora en caer, con la ecuación de itinerario del eje y, y dónde caerá con la ecuación de itinerario del eje x:

$$0 = h - \frac{g(t_{caida}^2)}{2}$$
$$t_{caida} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$t_{caida} = \sqrt{\frac{2gT^2}{8g}} = \frac{T}{2}$$

$$Lugar\ caida = D + V_{2x}t_{caida}$$
$$Lugar\ caida = \frac{L}{2} + \frac{3L}{T}\frac{T}{2}$$
$$Lugar\ caida = \frac{L}{2} + \frac{3L}{2}$$
$$Lugar\ caida = 2L$$

Problema 2

Lo primero a notar en este problema es que dado que todos los choques son elásticos se tiene la siguiente igualdad entre las energías y los momentum de cada choque:

$$E_i = E_1 = E_2 = E_3 = E_4\ ...$$
$$P_i = P_1 = P_2 = P_3 = P_4\ ...$$

Donde los números 1, 2, 3, 4. . . indican la energía y el momentum después del choque 1, choque 2. . . etc. Entonces, con ésto, encontraremos las velocidades después de cada choque (u_i para la bolita y v_i para el aro), pero igualando al momentum y energía del inicio (antes del primer choque), para hacer algo más fácil el desarrollo:

Primer choque:

$$mu = mu_1 + Mv_1\ (*)$$
$$v_1 = \frac{m}{M}(u - u_1)$$

Luego, este resultado en la ecuación de energía queda:

$$\frac{mu^2}{2} = \frac{mu_1^2}{2} + \frac{Mv_1^2}{2}\ (**)$$
$$mu^2 = mu_1^2 + \frac{Mm^2(u-u_1)^2}{M^2} / \times (M/m)$$

$$Mu^2 = Mu_1^2 + mu^2 - 2muu_1 + mu_1^2$$

$$u_1^2(M+m) - 2muu_1 + u^2(m-M) = 0$$

$$u_1 = \frac{2mu \pm \sqrt{4m^2u^2 - 4u^2(m+M)(m-M)}}{2(m+M)}$$

$$u_1 = \frac{2mu \pm \sqrt{4m^2u^2 - 4u^2m^2 + 4u^2M^2}}{2(m+M)}$$

$$u_1 = \frac{2mu \pm 2Mu}{2(m+M)}$$

$$u_1 = u\frac{m \pm M}{(m+M)}$$

Notablemente, si usamos la solución positiva, llegamos al típico resultado de que el segundo cuerpo no existe, en este caso el aro. Así que nos quedamos con la solución negativa:

$$u_1 = u\frac{m - M}{(m+M)}$$

Con esto, v_1 queda:

$$v_1 = \frac{m(u-u_1)}{M}$$

$$v_1 = \frac{2mu}{(m+M)}$$

Luego, con lo explicado en el principio, para el segundo choque, se repiten los mismos pasos, pero se tomará la solución positiva (ya que la bolita vuelve a moverse hacia la derecha), por lo tanto:

$$u_2 = u$$

$$v_2 = 0$$

Es entonces, que nos damos cuenta de que el proceso es cíclico, donde después del tercer choque tendremos las mismas velocidades que después del primer choque, luego en el cuarto las del segundo, y así sucesivamente. Por lo tanto, ahora solo queda cualcular los tiempos en los que ocurrió el choque uno y el choque dos y lo que recorrió la bolita en esos respectivos tiempos:

$$t_1 = D/u$$

$$t_2 = D/(u_1 + v_1)$$

$$t_2 = D(m+M)/u(3m-M)$$

Con esto, la distancia recorrida antes del primer choque es D y la recorrida durante el segundo es:

$$d = u_1 \times t_2$$

$$d = u\frac{m-M}{m+M} \times \frac{D(m+M)}{u(3m-M)}$$

$$d = D\frac{m-M}{3m-M}$$

Luego, la posición del segundo choque será D + d. Notar que para que t_2 seas positivo 3m debe ser mayor a M, por lo tanto, d es una distancia negativa. Por eso se coloca suma y no resta. Con esto se puede construir el gráfico (Por razones de tiempo queda propuesto, pero es simplemente poner líneas rectas horizontales en el gráfico de velocidad, donde corresponde y poner rectas con pendientes distintas de cero en el gráfico de posición con los valores correspondientes ya sacados anteriormente).

Problema 3

Para este problema partiremos con la situación al revés, es decir, veremos la condición de no caer del loop para luego llegar al resorte comprimido.

En el loop, se debe cumplir, a modo general, para que un bloque pueda pasar sin caer que la Normal sea cero, es decir, la ecuación de movimiento en el eje y queda:

$$N - mg = -ma_{centripeta}$$
$$g = \frac{V^2}{R}$$
$$V^2 = gR$$

Entonces, notamos que como el loop es el mismo para ambos bloques, ambos pasan con la misma velocidad por ese punto, la cual es:

$$V^2 = \frac{gh}{2}$$

Luego, hacemos conservación de la energía con las velocidades con que los bloques entrearon al loop, que es la misma con la que dejan al resorte:
Para el bloque de masa m:

$$\frac{mV_m^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgh$$
$$V_m^2 = \frac{gh}{2} + gh$$
$$v_m^2 = \frac{3gh}{2}$$

Para el bloque de masa 2m:

$$\frac{2mV_{2m}^2}{2} = \frac{2mV^2}{2} + 2mgh$$
$$2V_{2m}^2 = 2\frac{gh}{2} + 4gh$$
$$V_m^2 = 5gh$$

Finalmente, hacemos conservación de energía de cuando los bloques salieron y el resorte estaba completamente comprimido:

$$\frac{kx^2}{2} = \frac{mV_1^2}{2} + \frac{2mV_2^2}{2}$$
$$x^2 = \frac{m(V_1^2 + 2V_2^2)}{k}$$
$$x^2 = \frac{m(13gh/2)}{k}$$
$$x = \sqrt{\frac{13mgh}{2k}}$$

Problema 4

Calculamos primero la velocidad de salida de la mujer:

$$V_f^2 - V_s^2 = -2g(0{,}8)$$
$$V_s = \sqrt{16}$$
$$V_s = 4\ m/s$$

Luego, calculamos el impulso antes de saltar, es decir, $V_i = 0$:

$$\Delta p = I$$
$$60 \times 4 - 60 \times 0 = I$$
$$240\ Ns = I$$

Luego, desglosamos la fórmula del Impulso para calcular la fuerza:

$$I = F \times t$$
$$I = F \times 0{,}3$$
$$800N = F$$

Problema 5

Como la partícula de masa M sale con un ángulo de 45 grados y la partícula de masa m sale directamente hacia abajo, se tendrán las siguientes ecuaciones para el momentum:

En x:

$$mv_o + Mv = Mv_f\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En y:

$$0 = -m\frac{v_o}{2} + Mv_f\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$v_f = \frac{mv_o}{M\sqrt{2}}$$

Entonces, ahora despejamos v:

$$mv_o + Mv = M\frac{mv_o}{M\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$v = -\frac{mv_o}{2}$$

Entonces, ahora usamos la ecuación de energía para llegar a la relación pedida:

$$\frac{mv_o^2}{2} + \frac{Mv^2}{2} = \frac{m(v_o/2)^2}{2} + \frac{Mv_f^2}{2}$$
$$\frac{mv_o^2}{2} + \frac{Mm^2v_o^2}{8M^2} = \frac{mv_o^2}{8} + \frac{Mm^2v_o^2}{4} / \times (8/mv_o^2)$$
$$4m + \frac{m}{M} = m + 2\frac{m}{M}$$
$$3 = \frac{m}{M}$$
$$\frac{M}{m} = \frac{1}{3}$$