Pauta Auxiliar 9

Introducción a la Física Newtoniana
2 de junio de 2017

Profesor: Luis Foa Torres
Auxiliares: Danilo Passi, Héctor Ramos, Nicolás Valdés

P1. Antes de empezar a resolver, hagamos un plan. Para saber la altura máxima alcanzada por las masas, será útil saber su velocidad en el punto más bajo (y probablemente podamos aplicar conservación de la energía). Pero para conocer esta velocidad, hay que considerar que hubo un choque entre las masas, y que la masa que cayó tenía una velocidad antes del choque (entonces tendremos que utilizar conservación de momentum!). Y la velocidad de esta masa que cayó, la podremos averiguar conociendo la altura desde la cual cayó (lo cual es un dato). Entonces comencemos!

Llamemos a la masa que se suelta desde arriba masa 1, y a la que estaba abajo, masa 2.

La masa 1 se suelta desde una altura R y cae sin efectos de roce u otras fuerzas no conservativas. Por lo tanto, podemos aplicar conservación de energía aquí. Poniendo como punto de cero energía potencial gravitatoria al suelo, tenemos que la energía inicial del sistema es (dado que las masas comienzan en reposo):

$$E_i = mgR \tag{1}$$

La energía final será

$$E_f = \frac{1}{2}mv_1^2 \tag{2}$$

Donde v_1 es la rapidez con la cual la masa 1 llega al suelo. Podemos despejar esta rapidez al igualar E_i con E_f, y encontramos que $v_1 = \sqrt{2gR}$.

Ahora que conocemos la rapidez con que la masa 1 llega al suelo, podemos aplicar conservación de momentum al choque de las dos masas. (Todo lo trabajaremos en una sola dimensión, entonces consideraremos sólo la magnitud de $\vec{p}$. Esto no se puede hacer siempre!!!) El momentum inicial es

$$p_i = p_{1i} + p_{2i} = mv_1 \tag{3}$$

El final, mientras tanto, es

$$p_f = p_{1f} + p_{2f} = 2mv_2 \tag{4}$$

Y esto se tiene porque las masas se quedan unidas tras el impacto, por lo que tienen la misma rapidez final, v_2. Igualando p_i con p_f, vemos que $v_2 = v_1/2 = \sqrt{gR/2}$. Dada esta rapidez, queremos ver ahora hasta qué altura llegan las masas. La energía inicial en el sistema ahora será

$$E_i = \frac{1}{2}(2m)v_2^2 = \frac{1}{2}mgR \tag{5}$$

(Vemos que se perdió la mitad de la energía del principio del problema debido a la colisión.) La energía cuando las masas lleguen a su altura máxima H será (dado que tienen cero rapidez en el punto de altura máxima)

$$E_f = 2mgH \tag{6}$$

Igualando las energías, tenemos que $\boxed{H = \frac{1}{4}R}$

P2. Nuevamente, hagamos un plan primero y pensemos en qué está ocurriendo conceptualmente. La bolita sube con velocidad inicial tal que puede llegar a una altura $2h$; mediante energía, vamos a poder convertir esta frase en información para determinar la rapidez inicial de la bolita. Luego, la bolita choca contra el techo del cilindro elásticamente; esto es una colisión (en la cuál podremos aplicar conservación de momentum, y hasta energía cinética si lo necesitamos). Intuitivamente, el cilindro debe comenzar a subir con una velocidad inicial dada por la colisión, y la bolita que rebota bajará. Entonces esto se convierte en un problema de cinemática, donde tendremos que ver a qué altura de la base del cilindro, la altura de la base es igual a la de la bolita.

La velocidad inicial de la bolita será v_0, y podemos aplicar conservación de energía dado que puede alcanzar una altura $2h$ con esta velocidad:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgh \implies v_0 = 2\sqrt{gh} \tag{7}$$

Ahora hay que ver con qué velocidad llega la bolita al techo del cilindro. Llamémosla v, y apliquemos conservación de energía nuevamente (y reemplazamos v_0 que encontramos recién):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \tag{8}$$

$$2mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mgh \implies v = \sqrt{2gh} \tag{9}$$

Ok, entonces sabemos la velocidad que tiene la bolita justo antes de chocar con el techo. Luego hay un choque elástico, entonces sabemos que el momentum inicial es igual al momentum final (total), y que la energía cinética inicial es igual a la final (total). La velocidad antes del choque de la bolita es $v = \sqrt{2gh}$ y del cilindro es 0, y después del choque digamos que la bolita tiene velocidad u_b, y el cilindro u_c. Tenemos entonces:

$$p_i = mv \tag{10}$$

$$p_f = mu_b + mu_c \tag{11}$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2 \tag{12}$$

$$K_f = \frac{1}{2}mu_b^2 + \frac{1}{2}mu_c^2 \tag{13}$$

Dado que $p_i = p_f$, $K_i = K_f$ (y reemplazando $v = \sqrt{2gh}$), tenemos:

$$m\sqrt{2gh} = mu_b + mu_c \tag{14}$$

$$\frac{1}{2}m \cdot 2gh = \frac{1}{2}mu_b^2 + \frac{1}{2}mu_c^2 \tag{15}$$

En la ecuación 14 podemos despejar u_b:

$$u_b = \sqrt{2gh} - u_c \tag{16}$$

Y luego reemplazarlo en la ecuación 15 (y dividiendo por m ambos lados de la ecuación):

$$gh = \frac{1}{2}(\sqrt{2gh} - u_c)^2 + \frac{1}{2}u_c^2 \tag{17}$$

Esta es una ecuación cuadrática para u_c, hagámosla más bonita:

$$0 = u_c^2 - u_c\sqrt{2gh} \implies u_c = \sqrt{2gh}, \quad u_c = 0 \tag{18}$$

La solución de $u_c = \sqrt{2gh}$ corresponde a la velocidad del cilindro después del choque (la solución de 0 la descartamos ya que necesariamente después del choque comienza a subir; imagínense una pelota de pool chocando contra otra: la que es golpeada es la que se mueve). Refiriéndonos a la ecuación 16, vemos que la velocidad de la bolita justo después del choque es 0. Otra cosa: las ecuaciones para u_c y u_b son simétricas; hacer el intercambio $u_c \leftrightarrow u_b$ no afecta las ecuaciones. Entonces vemos que las dos soluciones de la cuadrática para u_c deben existir; una va a corresponder a la solución correcta para u_c, y la otra para u_b.

Entonces ahora conocemos la velocidad con que comienza el cilindro, y la que tiene la bolita justo después de que la bolita choca con el techo. Lo que falta es ver a qué altura con respecto al suelo, la bolita vuelve a chocar con la base. Para hacer esto escribamos la ecuación de itinerario para la base del cilindro, $y_c(t)$, y para la bolita, $y_b(t)$. Tomamos hacia arriba positivo, y el punto de altura cero como el suelo. Entonces,

$$y_c(t) = u_c t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{19}$$

$$y_b(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{20}$$

Imponemos que tengan la misma altura la base y la bolita en un tiempo $\tau : y_c(\tau) = y_b(\tau)$.

$$u_c\tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = h - \frac{1}{2}g\tau^2 \implies \tau = \frac{h}{u_c} \tag{21}$$

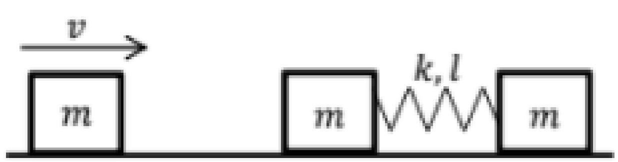
Reemplazando $u_c = \sqrt{2gh}$, tenemos que

$$\tau = \sqrt{\frac{h}{2g}} \tag{22}$$

Este tiempo ahora lo podemos reemplazar en cualquiera de las dos ecuaciones de itinerario que anotamos antes; hagámoslo en la de y_b:

$$y_b(\tau) = h - \frac{1}{2}g\tau^2 = h - \frac{1}{2}g \cdot \frac{h}{2g} = \boxed{\frac{3h}{4}} \tag{23}$$

P3. Considerar la figura de abajo:



Primero debemos mostrar que las barras se mueven siempre en la misma dirección. Para esto, consideramos el momentum total y la energía cinética total antes de la colisión:

$$p_i = mv \tag{24}$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv^2 \tag{25}$$

Es un choque elástico, entonces estas dos cantidades se van a conservar. Cuando la masa m de la izquierda choca con la masa del medio, se quedará quieta, y la otra masa tendrá una velocidad v hacia la derecha. Esto se puede hacer considerando la conservación de momentum y energía:

$$p_f = mu_1 + mu_2 = p_i \tag{26}$$

$$K_f = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 = K_i \tag{27}$$

Pero no lo desarrollo acá porque en la P2 teníamos el mismo sistema de ecuaciones.

Entonces tenemos que la masa m del medio, es decir, la que está a la izquierda del resorte, tiene velocidad inicial v hacia la derecha. La masa de la derecha no tiene velocidad inicial.

Teorema (Bacán). *Ambas masas unidas al resorte se mueven hacia la derecha después del choque.*

Dem. Queda propuesta para el lector.

xD Broma esto no es DIM. Ok, veamos. Por contradicción: si no se mueven ambas masas a la derecha, hay dos posibilidades: que una se mueva a la derecha y la otra a la izquierda, o que ambas vayan a la izquierda. Empecemos con que ambas masas se mueven hacia la izquierda con velocidades $-u_1$ y $-u_2$ (con u_1, u_2 cantidades positivas). Entonces el momentum total del sistema será:

$$p_f = -mu_1 - mu_2 \tag{28}$$

Por conservación del momentum, sabemos que (dado que el momentum inicial es mv)

$$mv = -m(u_1 + u_2) \tag{29}$$

Pero esto no es posible, dado que el lado derecho es negativo y el derecho es positivo.

Ahora veamos si es posible la otra cosa: que una de las masas vaya a la derecha con velocidad u_1, y la otra a la izquierda, y tenga velocidad $-u_2$. Igual que antes, imponemos conservación de momentum:

$$mv = mu_1 - mu_2 \implies u_1 = v + u_2 \tag{30}$$

Pero ahora consideremos la energía del sistema: inicialmente, el resorte no estaba estirado, entonces no hay energía potencial. Pero sí tenemos energía cinética, igual a $mv^2/2$. Entonces $E_i = mv^2/2$. La energía después, cuando las masas tengan velocidades u_1 y $-u_2$, será

$$E_f = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 + U \tag{31}$$

Donde U es la energía potencial debido al estiramiento del resorte. Esta energía siempre es positiva, dado que depende de x^2. Entonces,

$$E_f \geq \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2 = \frac{m}{2}\left((v+u_2)^2 + u_2^2\right) > \frac{mv^2}{2} = E_i \tag{32}$$

Entonces vemos que si una partícula va a la izquierda, la energía necesariamente será mayor que al principio, lo cual no puede ocurrir. En palabras, lo que dijimos es que si queremos conservar el momentum y además tener que una partícula vaya a la izquierda, la otra debe ir más rápido que v a la derecha. Pero entonces la energía cinética al final será mayor al final, dado que las dos partículas contribuyen positivamente, y una por sí sola (la que va más rápido que v) ya tendrá más energía cinética que la inicial.

Ahora queremos determinar las velocidades de las masas cuando el muelle está estirado al máximo, y la separación entre las masas. Digamos que la máxima separación entre las masas será D, y que tienen velocidades v_1 y v_2 en ese momento. Utilicemos conservación de momentum y energía (recordando el momentum y la energía con que empieza el sistema):

$$mv = mv_1 + mv_2 \tag{33}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 \tag{34}$$

Donde Δx es el estiramiento del resorte cuando está estirado al máximo. Tenemos que dado que el largo natural del resorte es L, y ahora se encuentra con largo D, $\Delta x = D - L$.

Ahora analicemos la relación entre v_1 y v_2. Esta situación es de máximo estiramiento, entonces es un poco parecida al problema de lanzamiento vertical; cuando uno lanza un objeto verticalmente, el punto de máxima altura cumple que la rapidez es cero en ese punto. De manera similar, cuando el resorte está estirado al máximo, las masas por un instante no tienen velocidad relativa (están quietas una respecto a la otra). Si se estuvieran alejando, no se encontrarían en el punto de estiramiento máximo, y si se estuvieran acercando, habrían tenido un momento anterior con mayor estiramiento, entonces tampoco estarían en estiramiento máximo. Por lo tanto, $v_1 = v_2 = u$ (u es una nueva variable) en el momento de estiramiento máximo. Las ecuaciones se convierten en:

$$mv = 2mu \implies \boxed{u = \frac{v}{2}} \tag{35}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mu^2 + \frac{1}{2}k(D-L)^2 \tag{36}$$

Reemplazando u en la última ecuación,

$$\frac{1}{2}mv^2 = k(D-L)^2 \implies D = L \pm \sqrt{\frac{mv^2}{2k}} \tag{37}$$

Donde tomamos la solución con signo positivo, dado que esa es la que corresponde a estiramiento máximo (en vez de compresión máxima, que también satisface las ecuaciones):

$$\boxed{D = L + \sqrt{\frac{mv^2}{2k}}} \tag{38}$$

P4. Plan: la bolita cae desde su altura L hasta el piso, a chocar con el bloque. Entonces tendremos que aplicar conservación de energía para determinar la rapidez con que la bolita llega al piso. Luego, habrá que considerar el choque (conservación de momentum) en el caso elástico e inelástico. Gracias a esto podremos determinar velocidad de la bolita después del choque, y con esto podremos conocer la altura máxima a la que llega (nuevamente aplicando conservación de energía).

Empezamos :). La energía inicial en el sistema está dada por (considerando el suelo como punto de energía potencial gravitacional cero):

$$E_i = mgL \tag{39}$$

La energía al final, justo antes del choque, es

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 \tag{40}$$

Igualando las energías, vemos que $v = \sqrt{2gL}$. Ahora analicemos el choque:

1. **Caso elástico**:
Sabemos que la energía cinética en el sistema se conserva, además del momentum. Entonces tenemos las siguientes ecuaciones (considerando u_1, u_2 las velocidades de la bolita m y el bloque M después del choque, respectivamente):

$$mv = mu_1 + Mu_2 \tag{41}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}Mu_2^2 \tag{42}$$

Este sistema de ecuaciones es muy parecido al que vimos en la P1. Despejamos u_2 en la primera ecuación y lo reemplazamos en la segunda:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}M \cdot (\frac{mv - mu_1}{M})^2 \tag{43}$$

Ordenemos un poco esta ecuación (y reemplacemos $v = \sqrt{2gL}$):

$$mgL = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{m^2}{2M}(\sqrt{2gL} - u_1)^2 \tag{44}$$

$$0 = u_1^2(\frac{m}{2} + \frac{m^2}{2M}) + u_1(-\frac{m^2\sqrt{2gL}}{M}) - mgL + \frac{m^2}{M}gL \tag{45}$$

Y la solución de esta cuadrática es

$$u_1 = \frac{\frac{m^2\sqrt{2gL}}{M} \pm \sqrt{\frac{2m^4gL}{M^2} + 2(m + \frac{m^2}{M})(mgL - \frac{m^2}{M}gL)}}{m + m^2/M} \tag{46}$$

Notamos aquí que cuando $M = m$, tenemos exactamente las mismas soluciones que aparecieron en la P2 para u_c (demuestren esto!). Esto nos ayuda a escoger el signo correcto; será el negativo (piénsenlo! Si no cachan por qué, pregunten por el foro y lo hablamos :D).
Ya, entonces conocemos la velocidad después del choque de la bolita. Sólo hay que aplicar conservación de energía una vez más para determinar hasta qué altura llega desde el piso con esta velocidad.

$$mgH_e = \frac{1}{2}mu_1^2 \implies H_e = \frac{u_1^2}{2g} \tag{47}$$

Reemplazando el corcho, tenemos:

$$H_e = \frac{1}{2g(m + m^2/M)^2} \cdot \left(\frac{m^2\sqrt{2gL}}{M} - \sqrt{\frac{2m^4gL}{M^2} + 2(m + \frac{m^2}{M})(mgL - \frac{m^2}{M}gL)}\right)^2 \tag{48}$$

Esto lo podemos hacer (mucho) más lindo (les dejo los pasos intermedios a ustedes porque escribirlos es bien largo y fome. Sólo factoricé y cancelé muchos terminos y expandí el producto dentro de la raíz, se cancelaba casi todo):

$$\boxed{H_e = L \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2} \tag{49}$$

2. **Caso Inelástico**:
   Este caso es más simple que el anterior. Como es típico de los choques inelásticos, lo que ocurre es que las masas se quedarán pegadas después del choque, entonces tendrán la misma velocidad u. Ahora sólo podemos aplicar conservación de momentum ya que la energía cinética no se conserva:

   $$mv = (m+M)u \implies u = \frac{mv}{m+M} \tag{50}$$

   Entonces tenemos que la masa m con M comienzan desde el piso, pegadas, y viajan juntas hasta su altura máxima, done su velocidad será cero. Aplicamos conservación de energía mecánica (porque ahora *sí* se conserva):

   $$\frac{1}{2}(m+M)u^2 = (m+M)gH_i \implies H_i = \frac{u^2}{2g} \tag{51}$$

   Reemplazamos u y tenemos:

   $$H_i = \frac{m^2v^2}{2g(M+m)^2} \tag{52}$$

   Ahora sólo falta reemplazar $v = \sqrt{2gl}$, la velocidad de m antes del choque. Nos quedamos con:

   $$\boxed{H_i = L \cdot \left(\frac{m}{M+m}\right)^2} \tag{53}$$

Luego de haber encontrado H_i y H_e (las alturas máximas para el caso inelástico y el elástico, respectivamente), queremos encontrar M para que sean iguales. Igualamos las expresiones encontradas, entonces:

$$L \cdot \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = L \cdot \left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \tag{54}$$

Ordenando un poco,

$$(M-m)^2 = m^2 \implies \boxed{M = 0, \quad M = 2m} \tag{55}$$