Pauta Auxiliar 5

Introducción a la Física Newtoniana — Profesor: Luis Foa Torres

7 de mayo de 2017 — Auxiliares: Danilo Passi, Héctor Ramos, Nicolás Valdés

P1. (a) Veamos la componente en el eje X primero. Sabemos, gracias a la segunda ley de Newton, que

$$\sum F_x = ma_x \implies F_{1x} + F_{2x} = -9[N] = ma_x = 2[kg]a_x \tag{1}$$

Entonces, $a_x = -4.5[m/s^2]$. De manera similar, calculamos a_y:

$$\sum F_y = ma_y \implies F_{1y} + F_{2y} = 3[N] = ma_y = 2[kg]a_y \tag{2}$$

Entonces, $a_y = 1.5[m/s^2]$.

Ahora nos piden calcular la velocidad después de 10 segundos. Recordamos que cuando hay aceleración constante, $\vec{v}(t) = \vec{v_0} + \vec{a}t$. Esto lo podemos aplicar en cada eje, y recordamos que la partícula está inicialmente en reposo (entonces $\vec{v_0} = (0,0)[m/s]$).

$$v_x(10) = a_x * 10[s] = -45[m/s] \tag{3}$$
$$v_y(10) = a_y * 10[s] = 15[m/s] \tag{4}$$

Tenemos entonces que $\vec{v}(10) = (-45, 15)[m/s]$.

(b) La dirección en que se mueve la partícula en $t = 10s$ se puede especificar por el ángulo α que forma su velocidad con respecto al eje X. Si aplicamos trigonometría sabemos que

$$\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{1}{3} \implies \alpha = \arctan(-\frac{1}{3}) \tag{5}$$

(c) El desplazamiento durante los primeros 10 segundos estará dado por $\vec{r}(10) - \vec{r}(0)$. Nuevamente vemos por componentes. (Y recordemos la ecuación de itinerario: $\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$.)

$$x(10) = x_0 + v_{0x} * 10[s] + \frac{1}{2}a_x * (10[s])^2 = -2[m] - \frac{1}{2} * 4.5[m/s^2] * (10[s])^2 = -24.5[m]$$
$$y(10) = y_0 + v_{0y} * 10[s] + \frac{1}{2}a_y * (10[s])^s = 4[m] + \frac{1}{2} * 1.5[m/s^2] * (10[s])^2 = 11.5[m]$$

Entonces, el desplazamiento en los primeros 10 segundos será $\vec{r}(10) - \vec{r}(0) = (-24.5, 11.5)[m] - (-2, 4)[m] = (-22.5, 7.5)[m]$.

(d) Sus coordenadas en $t = 10[s]$ serán $x = -24.5[m]$, $y = 11.5[m]$, como ya encontramos en la parte anterior.

P2. Será conveniente hacer tres diagramas de cuerpo libre, uno para m_1, otro para m_2, y otro para el sistema completo. Fijamos el sistema de coordenadas de modo que el eje X es horizontal, y apunta hacia la derecha; el eje Y es vertical y apunta hacia arriba en sentido positivo. Del DCL de la masa m_1, encontramos la siguiente ecuación:

$$\sum F_x = m_1 a_{1x} \implies T = m_1 a_{1x} \tag{6}$$

Donde a_{1x} es la aceleración de m_1 en el eje X. Considerando ahora la masa m_2, tenemos

$$\sum F_y = m_2 a_{2y} \implies T - m_2 g = a_{2y} \tag{7}$$

Donde a_{2y} es la aceleración de m_2 en el eje Y. Notemos que la tensión en esta segunda ecuación es igual a la primera por la tercera ley de Newton. Finalmente, si pensamos en el sistema completo, tenemos una última ecuación:

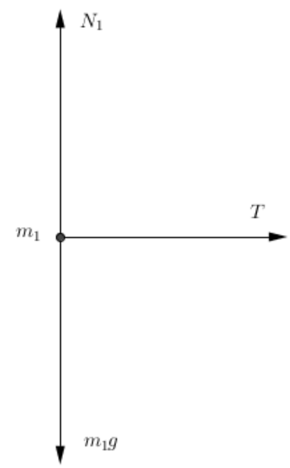
$$\sum F_x = (M + m_1 + m_2)a_x = \implies F = (M + m_1 + m_2)a_x \tag{8}$$

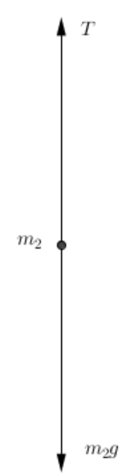
Donde a_x es la aceleración del sistema completo en el eje X. Ahora imponemos las condiciones físicas presentes en el problema: queremos que la masa m_2 no suba ni baje. Para que esto se cumpla, su velocidad debe ser cero en el eje Y, y además, su aceleración debe ser cero en este eje. Por lo tanto, podemos a partir de la ecuación 7 deducir que $T = m_2 g$. Además de esto, si la masa m_2 no sube ni baja, la masa m_1 no se puede deslizar sobre la masa M. Para que esto último se cumpla, imponemos que $a_{1x} = a_x$, lo que implica (combinando las ecuaciones 6 y 8) que

$$\frac{T}{m_1} = \frac{F}{M + m_1 + m_2} \tag{9}$$

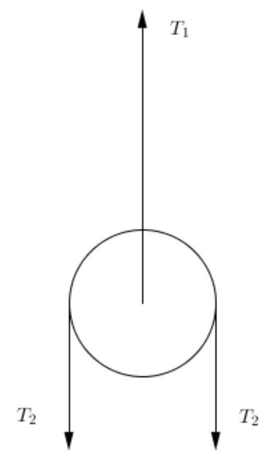
Reemplazando $T = m_2 g$, vemos que la fuerza F requerida cumple

$$\boxed{F = \frac{m_2 g(M + m_1 + m_2)}{m_1}} \tag{10}$$





P3. En este problema es importante tener cuidado y hacer diagramas de cuerpo libre para cada polea y cada masa. No lo haré para las masas aquí (ya que sobre cada una actúa sólo una tensión hacia arriba, y un peso hacia abajo), pero sí lo haré para la polea que cuelga por el lado derecho. IMPORTANTE: las poleas no tienen masa, pero *esto no significa que no puedan acelerar*! Fijamos el sistema de coordenadas de modo que el eje Y es vertical (y positivo hacia arriba) y el eje X es horizontal. Todas las fuerzas y aceleraciones son sólo a lo largo del eje Y, por lo que ignoraremos el eje X aquí.



Usaremos la siguiente notación: la masa m_1 tiene aceleración a_1, la masa m_2 tiene aceleración a_2, la masa m_3 tiene aceleración a_3, y la polea que cuelga por el lado derecho tiene aceleración a_4 (todas éstas en el eje Y).

Planteamos las ecuaciones de movimiento para cada cuerpo. Una cosa importante es que dado que las poleas no tienen masa, las tensiones se transmiten perfectamente a través de ellas. Entonces para la polea de arriba, las tensiones en ambos lados son iguales, y para la polea del lado derecho abajo, ocurre lo mismo (pero son dos cuerdas–éstas tensiones no tienen por qué ser iguales).

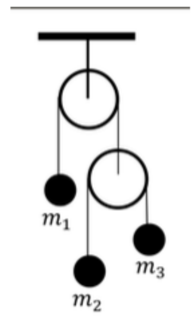
$$\sum F_{1y} = m_1 a_1 \implies T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \tag{m_1}$$
$$\sum F_{2y} = m_2 a_2 \implies T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \tag{m_2}$$
$$\sum F_{3y} = m_3 a_3 \implies T_2 - m_3 g = m_3 a_3 \tag{m_3}$$
$$\sum F_{4y} = m_4 a_4 \implies T_1 - 2T_2 = m_4 a_4 \tag{Polea}$$

Tenemos muchas incógnitas! Pero podemos simplificar un poco, y agregar más ecuaciones (haciendo algo que llamo “análisis dibujístico”). Una primera simplificación: $m_4 = 0$ (la polea no tiene masa), entonces con la ecuación de movimiento de la polea podemos concluir que $T_1 - 2T_2 = 0 \implies T_1 = 2T_2$. (Y de ahora en adelante usaremos $T = T_2$.) Este tipo de argumento es importante; básicamente, la fuerza neta sobre un objeto con masa cero debe ser cero; de otro modo, su aceleración tendría que ser infinita! (RECUERDEN: No significa que el cuerpo tendrá cero aceleración.)

Ahora aplicamos análisis dibujístico. Para esto, será importante considerar el dibujo.

La idea es la siguiente: podemos considerar restricciones geométricas o físicas que vemos en el dibujo, y aplicarlas para relacionar las aceleraciones de las masas (esto suena medio abstracto: léanlo de nuevo después de ver el proceso para que les quede más claro).

Comenzamos observando que las cuerdas tienen un largo constante (son inextensibles). El largo L_1 de la cuerda de arriba lo podemos descomponer en distintas partes: el largo debido a la parte de la cuerda



que cuelga por el lado izquierdo (llamémoslo x_1), el largo que cuelga por el lado derecho (x_4) y el largo de cuerda que siempre está enrollado en la polea (L_0). Es decir, $L_1 = L_0 + x_1 + x_4$. Si ahora analizamos cómo cambia esta expresión en el tiempo, notamos que dado que L_1 es constante,

$$\frac{\Delta L_1}{\Delta t} = 0 \implies \frac{\Delta(L_0 + x_1 + x_4)}{\Delta t} = 0 \tag{11}$$

Entonces

$$\frac{\Delta L_0}{\Delta t} + \frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_4}{\Delta t} = 0 \tag{12}$$

Pero el largo de la cuerda que está enrollado (L_0) también es constante, por lo que su variación en el tiempo será cero. Entonces,

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_4}{\Delta t} = 0 \tag{13}$$

Si vemos la variación de esta nueva expresión en el tiempo, vemos que

$$\frac{\Delta(\frac{\Delta x_1}{\Delta t} + \frac{\Delta x_4}{\Delta t})}{\Delta t} = 0 \tag{14}$$

Ahora notamos algo: la cantidad $\Delta x_1/\Delta t$ corresponde a la velocidad de m_1 (entonces la llamaremos v_1, y $\Delta x_4/\Delta t$ corresponde a la velocidad de la polea (la cual llamaremos v_4). Entonces,

$$\frac{\Delta(v_1 + v_4)}{\Delta t} = 0 \implies \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = -\frac{\Delta v_4}{\Delta t} \implies a_1 = -a_4 \tag{15}$$

Esa es la magia del análisis dibujístico :). Nota: Podemos hacer algo análogo con las masas m_2 y m_3 para determinar que $a_2 = -a_3$... Pero esto está mal! Es sólo válido desde el punto de vista de la polea de la cual cuelgan m_2 y m_3, y esta polea está acelerando. Entonces visto "desde afuera", no podemos decir que $a_2 = -a_3$ (este es un punto bien delicado–piénsenlo harto, y si no lo entienden pregunten en el foro o en clases!).

Yap (se pone un poco difícil pero no tanto!). Aplicar $a_2 = -a_3$ sólo es válido cuando la polea derecha está quieta... Veamos qué ocurre cuando se puede mover :). El lado del cual cuelga m_2 tiene cuerda de largo L_2, y el lado derecho tiene largo L_3. La posición de m_2, eso sí, estará dada por y_2, y la de m_3 por y_3. La posición de (la parte de abajo de) la polea la denotaremos y_4. Si consideramos como origen del sistema de coordenadas la posición inicial de la parte de abajo de la polea (ya sé, extraño–pero es conveniente!), tenemos que

$$y_3(t) = -L_3(t) + y_4(t) \tag{16}$$
$$y_2(t) = -L_2(t) + y_4(t) \tag{17}$$

Cada cosa puede variar en el tiempo (es importante), pero de ahora le quito el (t) a las expresiones para hacerlo más corto. Sumando las ecuaciones,

$$y_3 + y_2 = -(L_3 + L_2) + 2y_4 \tag{18}$$

Ahora vemos como cambia esto en el tiempo:

$$\frac{\Delta y_3}{\Delta t} + \frac{\Delta y_2}{\Delta t} = -\frac{\Delta(L_3 + L_2)}{\Delta t} + 2\frac{\Delta y_4}{\Delta t} \tag{19}$$

Análogo a lo que vimos en el caso más simple del análisis dibujístico, notamos que $L_3 + L_2$ no cambia en el tiempo (cuerda inextensible), por lo que

$$\frac{\Delta y_3}{\Delta t} + \frac{\Delta y_2}{\Delta t} = 2\frac{\Delta y_4}{\Delta t} \tag{20}$$

Variando en el tiempo una vez más podemos concluir sobre las aceleraciones de cada objeto:

$$a_3 + a_2 = 2a_4 \implies \frac{a_3 + a_2}{2} = -a_1 \tag{21}$$

Analizamos ahora el sistema de ecuaciones que teníamos al comienzo gracias a las leyes de Newton (y reemplazamos $T_2 = T, T_1 = 2T$ acorde a lo discutido antes):

$$2T - m_1 g = m_1 a_1 \tag{22}$$
$$T - m_2 g = m_2 a_2 \tag{23}$$
$$T - m_3 g = m_3 a_3 \tag{24}$$

Esto, combinado con la ecuación 21, nos da 4 ecuaciones y 4 incógnitas, por lo que podremos encontrar las aceleraciones de cada masa. Ponderamos las últimas dos ecuaciones por m_3 y m_2 respectivamente y las sumamos:

$$T(m_2 + m_3) - 2m_2 m_3 g = m_2 m_3 (a_2 + a_3) \tag{25}$$

Aplicando 21, vemos que

$$T(m_2 + m_3) - 2m_2 m_3 g = -2m_2 m_3 a_1 \tag{26}$$

Multiplicamos esto por 2:

$$2T(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3 g = -4m_2 m_3 a_1 \tag{27}$$

Y en la ecuación 22 despejamos $2T$, reemplazándolo en esta última ecuación:

$$m_1(a_1 + g)(m_2 + m_3) - 4m_2 m_3 g = -4m_2 m_3 a_1 \tag{28}$$

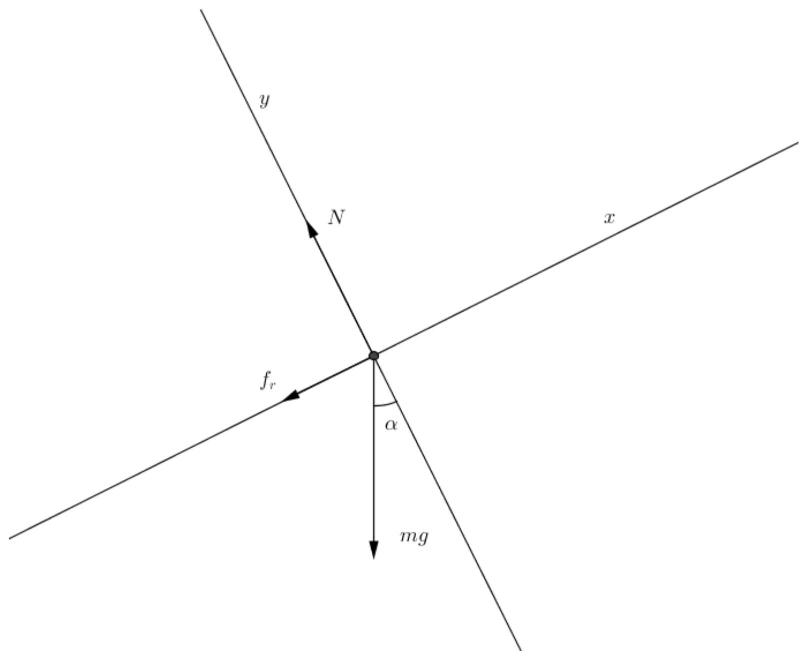
Ahora es sólo despejar a_1:

$$\boxed{a_1 = g \cdot \frac{4m_2 m_3 - m_1(m_2 + m_3)}{4m_2 m_3 + m_1(m_2 + m_3)}} \tag{29}$$

Determinar a_2 y a_3 se los dejo propuesto, es más álgebra nomás :D.

P4. 1) Para esta pregunta, está claro que vamos a necesitar cinemática. Esto es porque tenemos una velocidad inicial dada, y como veremos, una aceleración constante (y lo que nos piden es determinar la altura máxima alcanzada). Lo que debemos hacer primero, eso sí, es usar dinámica para determinar la aceleración que tendrá la masa mientras que va sobre el plano.

Para encontrar esta aceleración, primero hacemos un DCL.



N es la fuerza normal, mg es el peso, y f_r es la fuerza de roce.

Fijamos los ejes de coordenadas x e y de la forma que se ve en el dibujo. Esto es por conveniencia (sabemos que la aceleración perpendicular al plano es cero, ya que la masa sube pegada al plano, entonces podremos imponer $a_y = 0$). El ángulo α de inclinación del plano se repite de la manera que se ve en el DCL (pregúntenme en persona si no saben por qué ocurre esto). Ahora planteamos la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = ma_x \implies -f_r - mg\sin(\alpha) = ma_x \tag{30}$$

$$\sum F_y = ma_y \implies N - mg\cos(\alpha) = 0 \tag{31}$$

(Recordemos que $a_y = 0$. Lo otro que hice fue proyectar el peso sobre los distintos ejes usando trigonometría.) De la segunda ecuación podemos despejar $N = mg\cos(\alpha)$. Ahora aplicamos que $f_r = \mu_c N$, ya que la masa está en movimiento. Entonces,

$$ma_x = -\mu_c mg\cos(\alpha) - mg\sin(\alpha) \tag{32}$$

$$a_x = -g(\mu_c\cos(\alpha) + \sin(\alpha)) \tag{33}$$

Vemos que efectivamente la aceleración es constante (mientras que está en movimiento la masa). Este valor de la aceleración lo podemos usar ahora, además del v_0 conocido, para encontrar la altura que alcanza m. Primero vamos a determinar la distancia D que recorre sobre el plano. Luego la altura será (trigonometría!) $H = D\sin(\alpha)$. Planteamos la siguiente ecuación de cinemática:

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a_x D \implies D = -\frac{v_0^2}{2a_x} \tag{34}$$

Donde utilizamos que $v_f = 0$ en el punto de altura máxima. Reemplazamos la aceleración encontrada anteriormente, y podemos determinar H:

$$\boxed{H = \frac{v_0^2\sin(\alpha)}{2g(\mu_c\cos(\alpha) + \sin(\alpha))}} \tag{35}$$

2) Para que el bloque vuelva a descender, en el punto más alto de la trayectoria su aceleración debe ser menor que cero. Algo importante aquí es que la fuerza de roce cambia de dirección; dado que el bloque quiere descender ahora, la fuerza de roce estático intentará mantenerlo quieto. Entonces ahora en el eje x la ecuación que tenemos es:

$$f_r - mg\sin(\alpha) = ma_x \leq 0 \implies f_r \leq mg\sin(\alpha) \tag{36}$$

Recordamos ahora que en el caso crítico (cuando la fuerza de roce se "esfuerza" al máximo), $f_r = \mu_e N$ (y en otros casos es menor). Lo que nos interesa es que la masa vuelva a descender, por lo que hay que considerar este caso máximo de la fuerza de roce.

$$mg\sin(\alpha) \geq \mu_e N \implies mg\sin(\alpha) \geq \mu_e mg\cos(\alpha) \tag{37}$$

(Nota: la fuerza normal es la misma que en la parte anterior.) Entonces finalmente tenemos

$$\boxed{\mu_e \leq \tan(\alpha)} \tag{38}$$

3) Si desciende, para determinar la velocidad con que llega a la base podemos aplicar cinemática.

$$v_f^2 = v_i^2 - 2aD \tag{39}$$

Aquí, $v_i = 0$, D fue determinada en la parte 1 del problema (y va con un signo menos dado que ahora la masa desciende), y a lo vamos a determinar ahora. Para encontrar la aceleración, es análogo a la parte 1 sólo que ahora el roce apunta hacia arriba. Entonces,

$$\sum F_x = ma \implies f_r - mg\sin(\alpha) = ma \tag{40}$$

Nuevamente $f_r = \mu_c N$, y $N = mg\cos(\alpha)$ (ya que en el eje y nada cambió). Entonces,

$$a = -(\sin(\alpha) - \mu_c\cos(\alpha)) \tag{41}$$

Reemplazando en la ecuación de cinemática (y reemplazando D también),

$$v_f^2 = 2(\sin(\alpha) - \mu_c\cos(\alpha))\frac{v_0^2}{2g(\mu_c\cos(\alpha) + \sin(\alpha))} \tag{42}$$

Entonces

$$\boxed{v_f = -v_0 \cdot \sqrt{\frac{\sin(\alpha) - \mu_c\cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \mu_c\cos(\alpha)}}} \tag{43}$$

Varios comentarios:

- Escogimos la solución negativa de v_f porque va en descenso.
- Se ve que $|v_f| \leq |v_0|$, y esto es razonable ya que el roce hace que la masa pierda energía. Sólo son iguales la velocidad con que baja, con la que tenía al subir, si $\mu_c = 0$ (esto también es bacán–se reduce a algo razonable cuando no hay roce).
- Las unidades están bien.
- El término dentro de la raíz no será negativo nunca si se cumple la condición de la parte 2, y si además se cumple que $\mu_c \leq \mu_e$ (lo cual es algo razonable y que casi siempre se cumple). Confirmen esto para asegurarse :) (y recuerden que α está entre 0 y $\pi/2$)