Pauta Auxiliar 2

Introducción a la Física Newtoniana — Profesor: Luis Foa Torres
10 de abril de 2017 — Auxiliares: Danilo Passi, Héctor Ramos, Nicolás Valdés

P1. (a) El gráfico muestra que en $t = 0$s, la partícula está en $x = 0$m. Luego, en $t = 1$s, la partícula se encuentra en $x = -1$m. Por lo tanto, de 0s a 1s la partícula se desplazó -1m. De manera análoga, en $t = 1$s la partícula está en $x = -1$m, y en $t = 3$s, la partícula se encuentra en $x = 6$m. Entonces entre 1s y 3s, la partícula se desplazó 6m-(-1m)=7m. (Nota: la posición de la partícula en cada tiempo t también se podría haber determinado con la fórmula $x(t)$ entregada en el enunciado.)

(b) La velocidad media en el intervalo entre 0s y 1s: por definición, esta velocidad es igual al desplazamiento realizado en este intervalo, dividido por el tiempo que transcurrió. Entonces (utilizando la parte anterior), $\vec{v}_{\text{media}} = -1$m/s. De manera similar, para el intervalo entre 1s y 3s, la velocidad media está dada por $\vec{v}_{\text{media}} = 3.5$m/s.

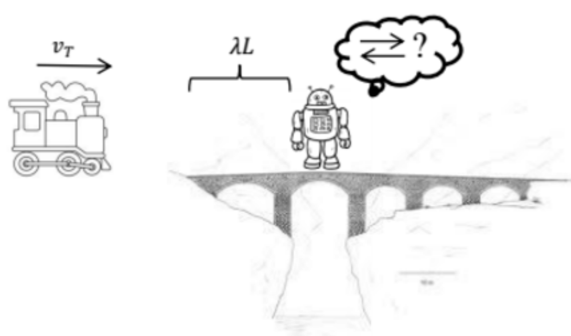
(c) Aquí recordamos que en un movimiento con aceleración constante, se cumplen las siguientes relaciones:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \tag{1}$$

$$v(t) = v_0 + at \tag{2}$$

Dado que en este problema la posición de la partícula está dada por $x = -4t + 2t^2$, podemos concluir de la ecuación 1 que la aceleración es 4m/s^2, y que la velocidad inicial es -4m/s. Utilizando estos datos en la ecuación 2, sabemos que $v = -4 + 4t$. Por lo tanto, en el segundo 2,5 de la trayectoria, $v = (-4 + 2.5 * 4)$m/s = 6 m/s. (No es para nada necesario derivar ni nada así en este problema :D)

P2. El tren se acerca con rapidez v_T; digamos que el robot tiene una rapidez u. Además, debemos agregar una variable; no tenemos idea a qué distancia del puente está el tren inicialmente, entonces llamaremos d a esta distancia (y esperar que después desaparezca).



Poniendo el origen del sistema de coordenadas en la punta izquierda del puente, nos ponemos en un primer caso que el robot decide ir hacia la izquierda. La posición del robot x_R y la posición del tren x_T estarán dadas por

$$x_R(t) = \lambda L - ut \tag{3}$$

$$x_T(t) = -d + V_T t \tag{4}$$

En un tiempo especial (llamémoslo τ), tanto el robot como el tren llegan al extremo izquierdo del puente (entonces $x_R(\tau) = x_T(\tau) = 0$). De la ecuación 3 podemos despejar τ:

$$\tau = \frac{\lambda L}{u}$$

Y si metemos este valor en la ecuación 4, vemos que

$$d = \frac{\lambda L V_T}{u} \tag{5}$$

Ahora podemos hacer esto mismo, solo que poniéndonos en el otro caso: que el robot vaya al lado derecho del puente, y el tren lo alcance ahí (lo bacán es que ahora conocemos la distancia d en términos de las otras variables).

$$x_R(t) = \lambda L + ut \tag{6}$$
$$x_T(t) = -d + V_T t \tag{7}$$

Tendremos otro tiempo especial (lo llamaremos t^*) en el cual ambos llegan al lado derecho del puente ($x_R(t^*) = x_T(t^*) = L$). Reemplazando esta condición en la ecuación 6, vemos que

$$t^* = \frac{(1-\lambda)L}{u}$$

Y este tiempo lo reemplazamos en la ecuación 7 (al igual que la distancia d):

$$L = -d + V_T t^* = -\frac{\lambda L V_T}{u} + V_T \frac{(1-\lambda)L}{u}$$

Despejar u es sólo álgebra; encontramos que

$$\boxed{u = V_T(1-2\lambda)}$$

Es bien impresionante que esto sea independiente hasta del largo del puente!

P3. (a) Fijamos el origen del sistema de coordenadas en el comienzo del parque. Entonces, la posición de la persona x_P y la posición del ciclista x_C están dadas por

$$x_P(t) = D + vt \tag{8}$$
$$x_C(t) = ut \tag{9}$$

Para ver cuánto se demora el ciclista en alcanzar al peatón, decimos que esto ocurre en un tiempo τ, y que $x_P(\tau) = x_C(\tau)$ (es decir, el ciclista alcanza al peatón). Entonces,

$$D + v\tau = u\tau \implies \boxed{\tau = \frac{D}{u-v}}$$

(b) La distancia que recorrió el peatón es $D_P = x_P(\tau) - x_P(0)$ (su posición final menos su posición inicial, ya que en este caso sólo se mueve en una dirección):

$$D_P = \frac{Dv}{u-v}$$

Mientras tanto, para el ciclista tenemos $D_C = x_C(\tau) - x_C(0)$:

$$D_C = \frac{Du}{u-v}$$

(c) Hay una distancia d hasta el final. El ciclista avanza tal distancia de ida y luego vuelve a encontrarse con el peatón. Dado que el ciclista tiene rapidez u, se demora un tiempo $T = d/u$ llegar hasta el final del parque. En este tiempo, el peatón avanzó una distancia $vT = vd/u$, por lo que se encuentra a una distancia $d - vd/u$ del final del parque. Entonces las posiciones del peatón y el ciclista cuando el ciclista comienza a volver (poniendo el origen del sistema de coordenadas en el final del parque) serán:

$$x_P(t) = (\frac{vd}{u} - d) + vt$$
$$x_C(t) = -ut$$

Igualando las posiciones para ver cuándo se encuentran (llamemos T_0 a este tiempo), vemos que

$$\frac{vd}{u} - d + vT_0 = -uT_0 \implies T_0 = \frac{d(u-v)}{u(v+u)} \tag{10}$$

Entonces, el tiempo total que toma el ciclista en volver a encontrarse con el peatón es

$$T + T_0 = \frac{d}{u} + \frac{d(u-v)}{u(v+u)} = \boxed{\frac{2d}{u+v}} \tag{11}$$

P4. (a) La bola se dejó caer desde una altura $H + h$, y cae dentro del agua una distancia h. Dado esto, sabemos que estuvo en caída libre desde $H + h$ hasta h, y después de esto cae una altura h con velocidad constante. Entonces podemos dividir el movimiento en dos tramos (ponemos el origen del sistema de coordenadas en el suelo, y el eje y positivo hacia arriba):

$$y_1(t) = H + h - \frac{1}{2}gt^2 \tag{12}$$
$$y_2(t) = h + ut \tag{13}$$

Aquí, u es la velocidad con que la pelota entra al agua (notamos que será negativa). Nuestro plan será el siguiente: diremos que el primer tramo toma una cantidad de tiempo t_1, y al segundo tramo toma un tiempo t_2; este segundo tramo tendrá una relación con h, la cual podremos despejar ya que $T = t_1 + t_2$ (conocido).

Primero encontramos t_1: usamos la primera ecuación, notando que $y_1(t_1) = h$ (después de t_1 segundos, la bola llega a la superficie del agua).

$$h = H + h - \frac{1}{2}gt_1^2 \implies t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Este es un tiempo conocido ahora. Luego, utilizamos la segunda ecuación para encontrar una relación entre t_2 y h. Sabemos que $y_2(t_2) = 0$ (la bola llega al suelo en el tiempo que le toma recorrer el segundo tramo). Entonces,

$$0 = h + ut_2 \implies h = -ut_2 = -u(T - t_1)$$

Ahora nos falta encontrar u. Para determinar esto, notamos que $v(t) = v_0 + at$ en general con aceleración constante. En este caso, si consideramos el primer tramo del movimiento, $v(t) = -gt$ (cero velocidad inicial), y además, $v(t_1) = u$ (esta es la velocidad con que se llega a la superficie del agua). Por lo tanto, $u = -gt_1$. Combinando todo,

$$h = gt_1(T - t_1) = g\sqrt{\frac{2H}{g}}(T - \sqrt{\frac{2H}{g}}) = \boxed{T\sqrt{2gH} - 2H}$$

(b) Ahora si se quita el agua de la piscina, tenemos un sólo movimiento de caída libre. Dado que el agua ya no está y le toma los mismos T segundos caer a la bola, es razonable que se lanzó hacia arriba inicialmente la bola (digamos que con una rapidez inicial v_0). Entonces, el movimiento será descrito por:

$$y(t) = H + h + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

Y sabemos que $y(T) = 0$ (llega al suelo en T segundos). Aplicando esta condición en la ecuación de arriba vemos que

$$0 = H + h + v_0 T - \frac{1}{2} g T^2 \implies \boxed{v_0 = \frac{1}{T}(\frac{1}{2} g T^2 - H - h)}$$

P5. (a) Dado que el segundo jugador debe recorrer una distancia d_2 a rapidez constante v_2, el tiempo que le toma llegar a la pelota es $t_2 = d_2/v_2$. Análogamente, al primer jugador le toma $t_1 = d_1/v_1$ segundos llegar a la pelota. Debemos, eso si, tomar en cuenta que el segundo jugador empieza a correr medio segundo después que el primero, por lo que requerimos que $t_2 + \frac{1}{2}[s] = t_1$

$$\frac{d_1}{v_1} = \frac{d_2}{v_2} + \frac{1}{2}[s] \implies v_2 = \frac{d_2}{\frac{d_1}{v_1} - \frac{1}{2}[s]}$$
$$v_2 = \frac{2 v_1 d_2}{2 d_1 - [s] v_1}$$

Donde dejamos el $[s]$ en las expresiones para que haya consistencia en las dimensiones de las ecuaciones.

(b) El primer jugador llega primero y patea la pelota con el triple de la velocidad con que se mueve ($3v_1$). Debemos encontrar el ángulo al cual pateó la pelota si justo resultó ser palo (el balón golpea contra el punto superior del arco que se encuentra a una distancia horizontal D, y altura H). Colocando el origen del sistema de coordenadas en la posición inicial de la pelota, notamos que la posición en los ejes X e Y de la pelota está dada por:

$$x(t) = v_{0x} t \tag{14}$$
$$y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{15}$$

Dado que es palo, sabemos que en algún tiempo especial τ, $x(\tau) = D$, además $y(\tau) = H$. Imponemos esto en las ecuaciones de posición de la pelota en el eje X:

$$D = v_{0x} \tau \implies \tau = \frac{D}{v_{0x}}$$

Reemplazando esto en la ecuación de $y(\tau) = H$,

$$H = \frac{D v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{1}{2} g (\frac{D}{v_{0x}})^2$$

Ahora debemos encontrar las componentes v_{0x} y v_{0y} de la velocidad inicial en cada eje: esto es simplemente trigonometría, ya que hay una rapidez inicial $3v_1$, orientada en un ángulo θ respecto a la horizontal (el eje X). Vemos que $v_{0y} = 3 v_1 \sin(\theta)$, y que $v_{0x} = 3 v_1 \cos(\theta)$. Reemplazando en la última ecuación (y recordando que $\tan(\theta) = \sin(\theta)/\cos(\theta)$),

$$H = D \tan(\theta) - \frac{1}{2} g (\frac{D}{3 v_1 \cos(\theta)})^2$$
$$= D \tan(\theta) - \frac{g D^2 \sec^2(\theta)}{18 v_1^2}$$

Donde utilizamos que $\sec(\theta) = 1/\cos(\theta)$. Aquí podemos aplicar una identidad trigonométrica: $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$. Nos quedamos entonces con

$$H = D \tan(\theta) - \frac{g D^2}{18 v_1^2} (\tan^2(\theta) + 1)$$

Ordenando un poco la ecuación,

$$\boxed{\tan^2(\theta) - \frac{18v_1^2}{gD}\tan(\theta) + \frac{18v_1^2 H}{gD^2} + 1 = 0}$$

Esta es una ecuación cuadrática para $\tan(\theta)$ que puede ser resuelta con la solución usual de la ecuación de segundo grado.

(c) Ahora debemos trabajar con los datos $v_1 = 5\text{m/s}$, $D = 10\text{m}$, $H = 5/2\text{m}$, y $g = 10\text{m/s}^2$. Además, debemos utilizar las aproximaciones $\sqrt{47} \approx 7$, y $\arctan(0,5) \approx 0,5$.

Reemplazando todo esto en la ecuación a la cual llegamos, tenemos que

$$\begin{aligned}\tan^2(\theta) - \frac{18 \times 25}{100}\tan(\theta) + \frac{18 * 25 * 5/2}{1000} + 1 = 0\\ \tan^2(\theta) - 4.5\tan(\theta) + 2.125 = 0\end{aligned}$$

Entonces,

$$\tan(\theta) = \frac{4.5 \pm \sqrt{4.5^2 - 4 * 2.125}}{2} = \frac{1}{4}(9 \pm \sqrt{47}) \approx \frac{1}{4}(9 \pm 7)$$

Entonces tenemos dos posibilidades: $\tan(\theta) = 4$, y $\tan(\theta) = 0,5$. Aproximadamente entonces tenemos que $\theta = \arctan(4) \approx 1,3$, o que $\theta = \arctan(0,5) \approx 0,5$.

(d) La pelota tiene la misma trayectoria que antes:

$$x(t) = v_{0x}t \tag{16}$$

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{17}$$

La diferencia es que ahora, llega a otra altura H_0 y avanza una distancia d_2 horizontalmente en un tiempo "especial" T. La distancia d_2 es conocida, pero la altura H_0 no. Lo que podemos hacer para encontrar H_0 es considerar el movimiento del jugador que salta para interceptar el balón:

$$y_2(t) = h + ut - \frac{1}{2}gt^2$$

Donde u es la velocidad inicial con que salta este jugador (que es la variable por determinar en el problema), y h es la altura del jugador (estamos pensando en la cabeza de éste). Dado que intercepta la pelota a una altura H_0 en el momento especial T, podemos decir que $y_2(T) = H_0$. Entonces,

$$H_0 = uT - \frac{1}{2}gT^2 \tag{18}$$

Ahora utilizamos las ecuaciones de la pelota, imponiendo que $x(T) = d_2$, $y(T) = H_0$. Esto nos entrega dos ecuaciones:

$$d_2 = v_{0x}T \implies T = \frac{d_2}{v_{0x}} \tag{19}$$

$$H_0 = v_{0y}T - \frac{1}{2}gT^2 \tag{20}$$

Ahora igualamos las ecuaciones 18 y 20, reemplazando T por lo que encontramos en 19:

$$\frac{ud_2}{v_{0x}} + h = \frac{v_{0y}d_2}{v_{0x}} \implies u = v_{0y} - \frac{hv_{0x}}{d_2} \tag{21}$$

Reemplazando valores numéricos $d_2 = 6$m, $h = \sqrt{3}m$, $v_0 = 15$m/s, y $\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 60°$ (probando dos ángulos distintos), vemos que

$$u_1 = 15 \sin(30°) - \frac{\sqrt{3} * 15 \cos(30°)}{6} \text{ m/s} = 3.75 \text{ m/s}$$
$$u_2 = 15 \sin(60°) - \frac{\sqrt{3} * 15 \cos(60°)}{6} \text{ m/s} \approx 10.8 \text{ m/s}$$

De estas opciones, u_1 parece ser la más razonable (la otra opción es una velocidad muy alta, que una persona probablemente no pueda alcanzar en un salto).