Matemática para el CBC, Parte 2
- 2da. edición. – Buenos Aires: Editorial Asimov, 2013

116 p.; 21 x 27 cm.
ISBN: 978-987-23534-4-5

Matemática para el CBC, Parte 2
- 2da ed. - Buenos Aires : Asimov, 2013

v. 2, 116 p. ; 20 x 27 cm.

ISBN 978-987-23534-4-5

1. Matemática - Enseñanza. I. Título
CDD 510.07

Fecha de catalogación: MAYO 2007

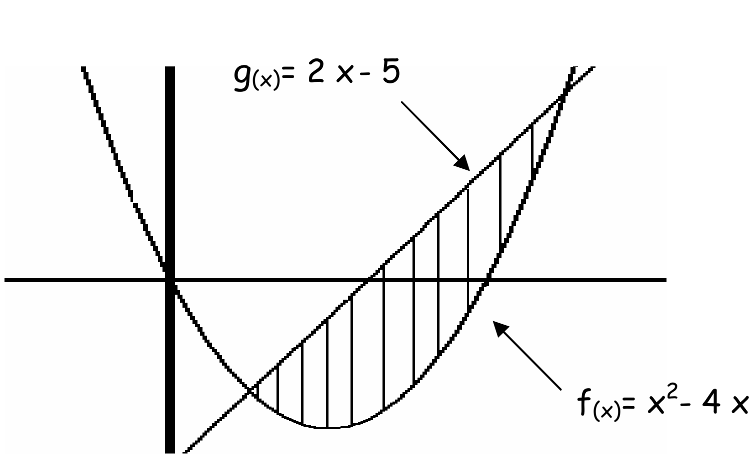
2da edición. Tirada: 100 ejemplares.
Se terminó de imprimir en enero de 2013

MATEMATICA

PARA EL CBC

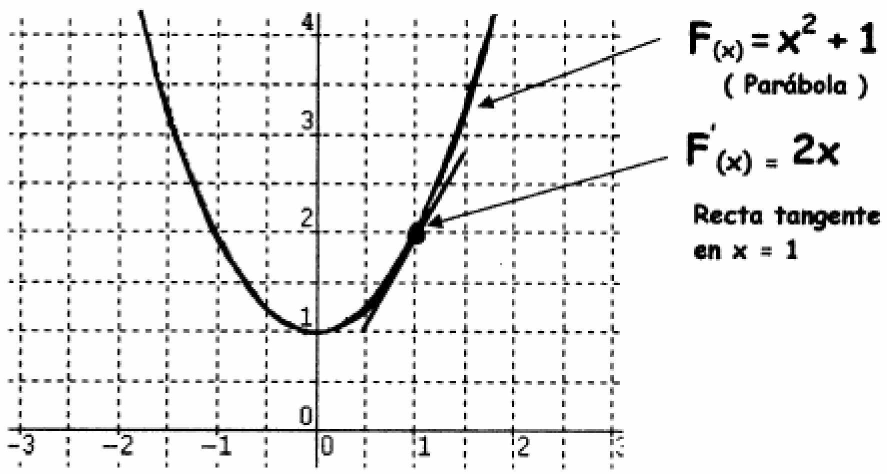
PARTE 2

* DERIVADAS
* INTEGRALES



¿ Ves algo en este libro que no está bien explicado ?
¿ Encontraste algún error ?
¿ La notación que uso yo no es la que usa la cátedra ?
Mandame un mail y lo corrijo.

www.asimov.com.ar



MATEMATICA PARA EL CBC

- PARTE 2 -

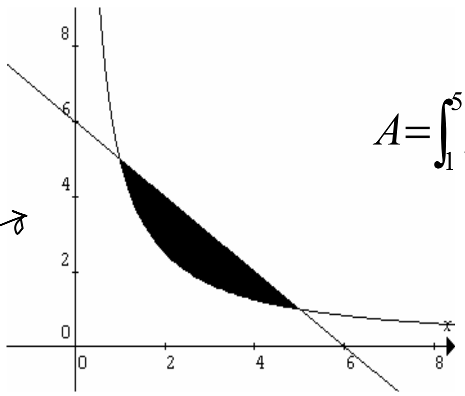
DERIVADAS e INTEGRALES

DERIVADAS :
Derivadas por definición. Derivada del producto y del cociente. Derivada de composición de funciones. Regla de la cadena. Derivada de funciones inversas. Derivadas sucesivas. Crecimiento y decrecimiento. Puntos críticos. Máximos y mínimos. Puntos de Inflexión. Concavidad. Método de la derivada segunda. Ejercicios tomados en parciales

INTEGRALES :
Integral indefinida. Método de Sustitución. Integración por partes. Integral Definida. Regla de Barrow. Propiedades de la integral definida. Cálculo de Áreas. Ejercicios de parciales.

INDICE

La recta es el techo y
la hipérbola es el piso



$$A=\int_1^5 f(x)-g(x)dx$$

Índice

Pag

2 .... **DERIVADAS**
7 Cálculo de derivadas por definición
9 ....Función derivada
11 Propiedades de las derivadas
14.......Derivada del producto y de la división
15 Tabla de derivadas
16....... Derivada de composición de funciones. Regla de la cadena
19 Velocidad
23.......Derivada de funciones inversas.
25 Derivadas sucesivas
25.......Crecimiento y decrecimiento.
27 Análisis de una función. Puntos críticos
27.......Máximos y mínimos. Puntos de Inflexión. Concavidad
34 Método de la derivada segunda
41...... EJERCICIOS DE PARCIALES

53 ...... **INTEGRALES.**
56 Integral indefinida.
58.......Integral indefinida de una función f(x)
59 Propiedades de la integral indefinida
61.......Método de Sustitución.
64 Integración por partes
70....... Integral Definida
70 Regla de Barrow
72.......Propiedades de la integral definida.
73 Cálculo de Áreas.
77.......Ejercicios de parciales.
97 Fórmulas útiles

OTROS APUNTES ASIMOV

*** MATEMATICA - EJERCICIOS RESUELTOS**
Son los ejercicios de la guía resueltos y explicados.

*** PARCIALES RESUELTOS DE MATEMATICA**
Son exámenes que fueron tomados el año pasado. Todos los ejercicios están explicados También hay parciales resueltos de años anteriores.

*** FINALES RESUELTOS**
Son exámenes que fueron tomados el año pasado. También hay finales resueltos de años anteriores. Todos los ejercicios están explicados

OTROS LIBROS DE ASIMOV:

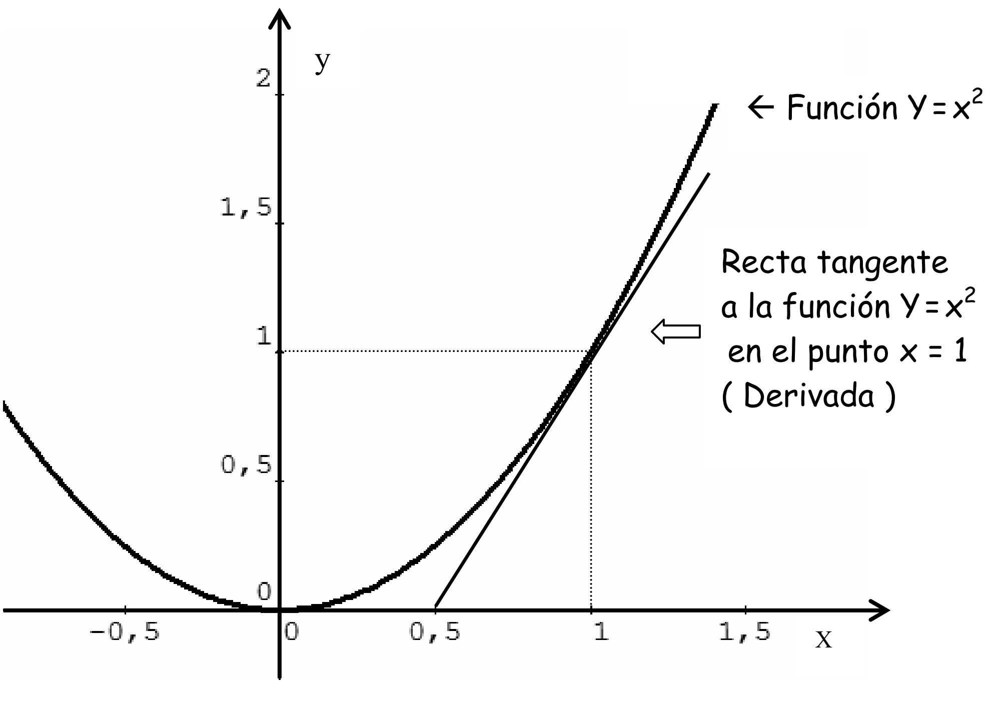
*** QUÍMICA PARA EL CBC**
*** FISICA PARA EL CBC**
*** BIOFISICA PARA EL CBC**

Estos libros tienen la explicación de lo que se da en clase pero hablado en castellano.

Temas que están en el libro 1:

FUNCIONES

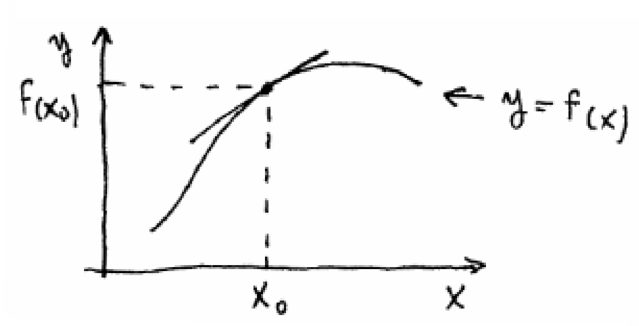
DERIVADAS



y
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
0
0,5
1
1,5
x
← Función $Y = x^2$
Recta tangente
a la función $Y = x^2$
en el punto x = 1
(Derivada)

DERIVADAS

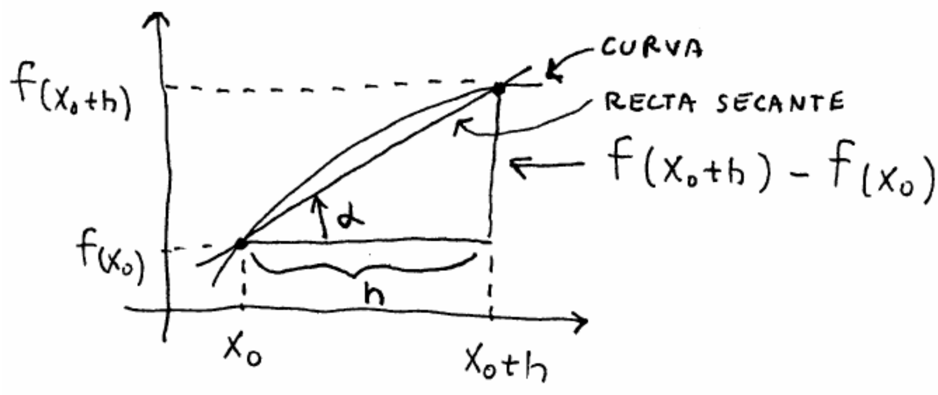
Vamos a agarrar una función cualquiera f(x). Por ejemplo esta:



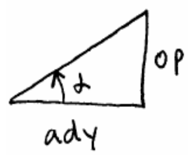
La recta que dibujé es la recta tg en el punto x_0. Acuérdense que la recta tangente es una recta que toca a la función en un solo punto. Digamos que "roza" a la función. ¿Hasta acá me siguieron? Bien. Lo que buscamos es un método para determinar la recta tg a una función en un punto. Hacer esto se llama DERIVAR una función. Entonces anoten lo siguiente. Dicto:

DERIVAR UNA FUNCIÓN ES HALLAR LA RECTA TANGENTE A ESA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Vamos a buscar un método matemático para encontrar esto. A ver, a ver, pensemos. Supongamos que tomo una recta secante a la curva. Eso significa agarrar a una recta que corte a la función en 2 puntos. Si conozco los puntos… ¿ Puedo determinar la pendiente de esa recta ? Piensen
Rta: Sí, puedo. Fíjense:



La pendiente de la recta secante la calculo hallando la tangente al triangulito que marqué:



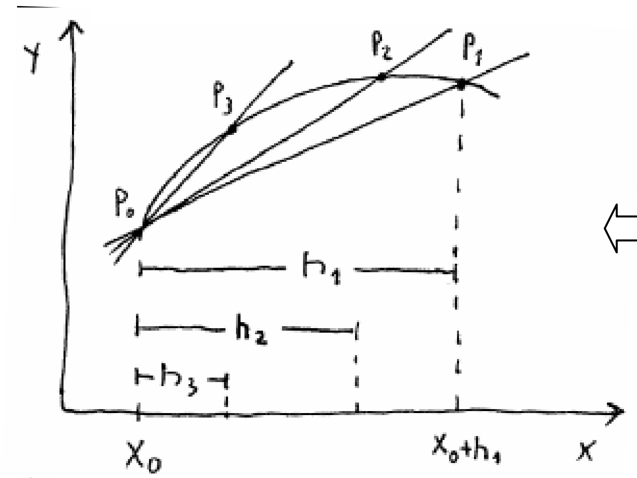
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{op}}{\text{ady}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{tg}\ \alpha = \frac{\mathbf{op}}{\mathbf{ady}} = \frac{\mathbf{f(x_0+h)-f(x_0)}}{\mathbf{(x_0+h)-x_0}}$$

Es decir:

$$\boxed{m\,(=\mathrm{tg}\alpha) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \quad \leftarrow \text{Pendiente de la recta secante}$$

Bueno, con esto obtuve la recta $\boxed{\text{SECANTE}}$. ¡ Pero ojus ! Yo buscaba la recta $\boxed{\text{TANGENTE}}$, no la recta secante. ¿ Entonces qué hago ?
Y bueno, voy achicando el intervalo h más y más. A medida que h se achica, la recta secante va a ir tendiendo a la recta tangente. Voy tomando h más chico y me queda lo siguiente: (miren bien este dibujo por favor)



⇦ El punto p se va corriendo, acercándose al punto P_0

Es decir ¿Qué es lo que voy haciendo? Voy acercando el punto P al Punto P_0.
Cuánto más lo acerque, más cerca estoy de obtener la recta tangente.
¿ Cuándo tendré $\boxed{\text{EXACTAMENTE}}$ la recta tangente ? ¡ Piensen ! Muy bien.
En el límite cuando h tienda a cero.
¿ Lo ven ? ¿ Ven esto ? Pregunten si no entienden porque esto es importante.
Entonces, esto de que en el límite cuando h es infinitamente chiquito me da la recta tangente, se escribe matemáticamente así:

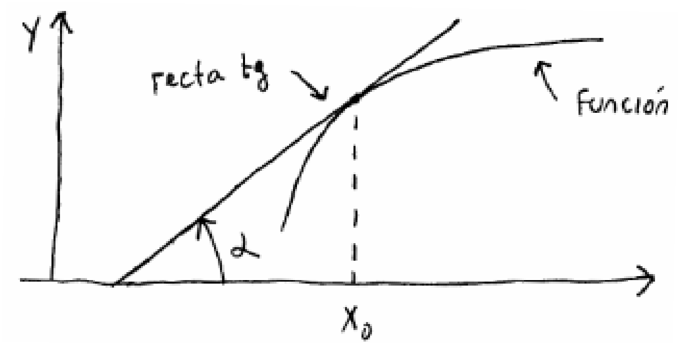
$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Pero la pendiente de la recta tg es la derivada de la función en ese punto.
Entonces si me dan la función f(x), voy a llamar f'(x) (efe prima de equis) a la derivada de la función. (Es la misma letra f con una comita arriba).
Me queda:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \longleftarrow$$

Definición de derivada de una función en un punto

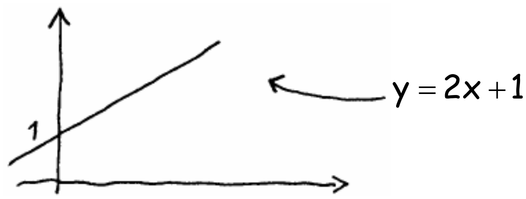
¿ Hasta acá está bien ? Che, ¿ Voy muy rápido ? Pregunten, chicos estos conceptos son muy importantes.
Todo lo que tienen que entender hasta ahora es que la derivada de una función en un punto x_0 es un NÚMERO. 3, 5, 20000, lo que sea. Ese número es LA PENDIENTE DE LA RECTA EN ESE PUNTO.
Si yo a ese número le saco el arco tangente, voy a tener QUÉ ?
Bien. El ángulo α que forma la recta tangente.



Vamos a hacer algunos ejemplos de cómo se calcula la derivada de una función.

CÁLCULO DE DERIVADAS

Vamos a tomar la función lineal. Supongamos que me dan la recta $y = 2x + 1$
Grafiquémosla.

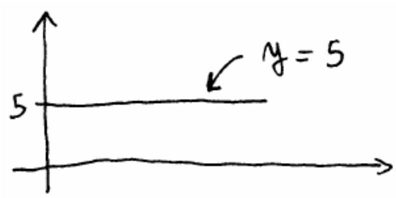


¿Cuál va a ser la derivada de esta función? Bueno, va a ser la pendiente de la recta. La pendiente de la recta es m = 2. Entonces:

$$\text{Si } f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2$$

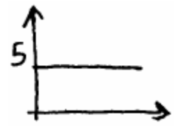
¿ En qué punto de la función la pendiente vale 2 ?
Rta: En TODOS los puntos. La recta tg a la función es la función misma, quiere decir que la pendiente es cualquier punto es siempre la misma. (Y vale 2)

¿ Hay preguntas sobre esto ? ¿ Lo ven ? ¿ Qué pasaría si la recta fuera horizontal ? Lo que quiero decir es esto. Miren el dibujo:

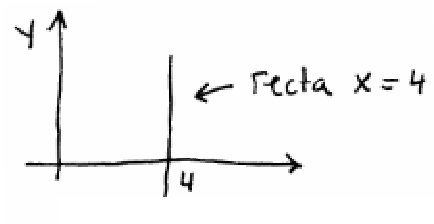


¿Qué pasa acá? ¿Puedo derivar? ¿Cuánto vale la pendiente de la recta tangente?
Bueno, vamos por partes ¿ Tiene pendiente la recta que grafiqué ? Rta: Sí, tiene. Vale cero. Es una recta horizontal de manera que no forma ángulo. m vale cero. Entonces la derivada de la función y = 5 ¿ Cuál va a ser ?
Y bueno, CERO. Es decir:

$$\text{Si } f(x) = 5 \Rightarrow f'(x) = 0$$



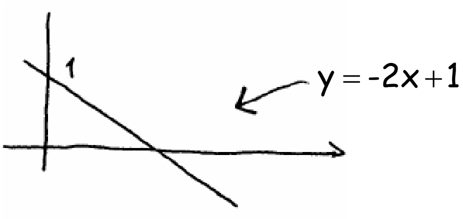
Fíjense que estamos calculando derivadas sin aplicar ninguna fórmula. Sólo estamos analizando pendientes de rectas tangentes. Vamos ahora a este caso:
¿ Qué pasa si tengo una recta vertical ? ¿ Cuál será la pendiente ? ¿ Tiene pendiente esta recta ? Piensen ¿ Qué ángulo forma la recta ? 90°, ¿ Sí ? ¿Cuál será su pendiente?



Bueno, la cosa es que esta recta no tiene pendiente. Es decir, la tg de 90° no existe. Podríamos decir que es infinita pero... quedemos en que no existe. Las rectas verticales NO TIENEN PENDIENTES. Entonces:

$$\text{Si } x = 4 \Rightarrow f'(x) = \nexists$$

Vamos al último caso de las funciones lineales. Supongamos que la recta está inclinada pero va para abajo. Es decir, tengo una función del tipo $\mathbf{f(x) = -2x + 1}$
Tengo esto:

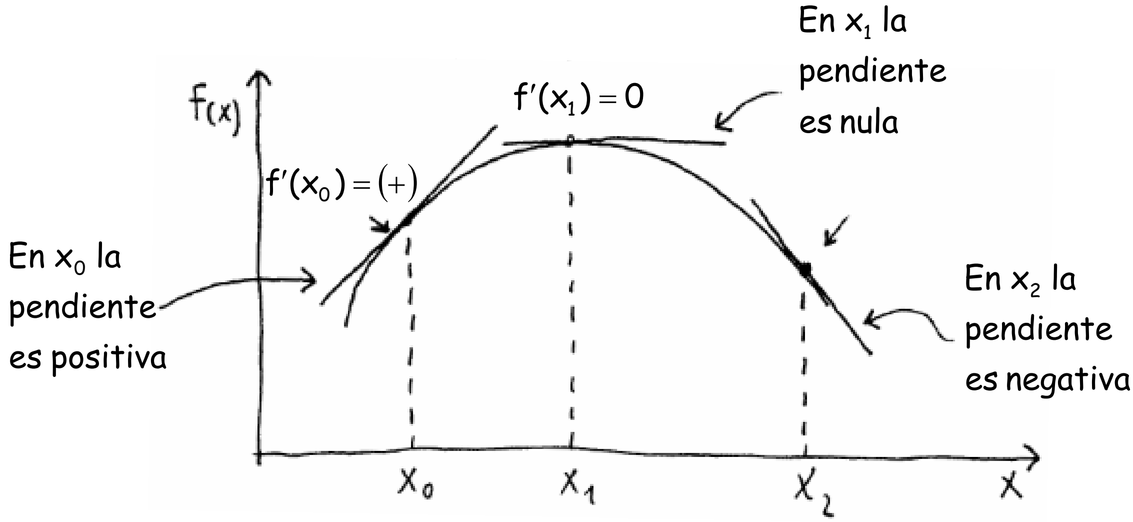


La pendiente de esta recta es -2. En cualquier punto de la recta tangente del ángulo que forma es -2. ¿Entonces cuánto va a vale la derivada de la función $y = -2x + 1$. Bueno, -2. Esa es la derivada. Lo escribo:

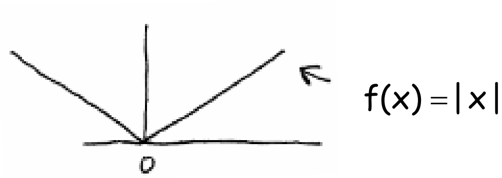
$$\text{Si } f(x) = -2x + 1 \Rightarrow f'(x) = -2$$

Lo que quiero que vean es que la derivada de una función en un punto es un $\boxed{\text{NÚMERO}}$. Ese número puede ser +,- o cero.

Si es positivo, las rectas tangentes irán así: /
Si es negativo, irán así: \
¿Y si es cero? Si es cero serán rectas horizontales: —
Entonces, resumo todo esto en un dibujo:



Ahora... ¿Toda función tiene derivada? Piensen ¿ A ver ? Fíjense la función módulo. ¿Se acuerdan de la función módulo ? Era así:



¿Cuál es la pendiente de la función en $x_o = 0$? Bueno, ahí la función no tiene pendiente. No se puede hablar de la recta tg a la función módulo en el punto $x_o = 0$. No tiene sentido. Entonces:

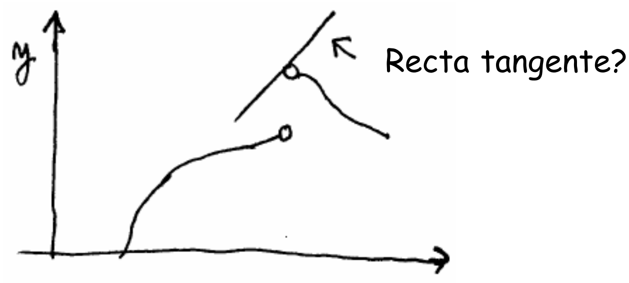
$$\text{Si } f(x) = |x| \Rightarrow f'(x_0 = 0) = \nexists$$

Pero ojo. La función no tiene derivada <u>SÓLO</u> <u>EN</u> <u>ESE</u> <u>PUNTO</u>. Del cero para allá → la pendiente es 1. La derivada de la función será 1. Ahora, del cero para allá: ← la pendiente es -. Vale -1. Resumiendo:

$$\text{Si } f(x) = |x| \begin{cases} f'(x) = 1 \text{ para } x > 0 \\ f'(x) = -1 \text{ para } x < 0 \\ f'(x) = \nexists \text{ para } x = 0 \end{cases} \longleftarrow \text{Derivada de la función módulo}$$

Lo mismo pasa cuando me dan una función que no es continua. No se puede hablar de derivada de una función discontinua. Es decir, puede ser que en algunos puntos <u>tenga</u> derivada, pero en otros no. A ver si nos entendemos.

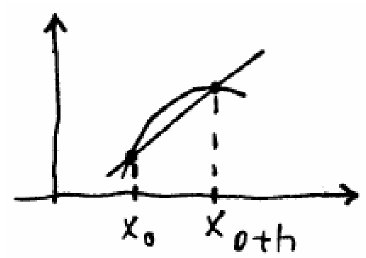
Miren:



No puedo hablar de derivada de una función discontinua. Siempre vamos a sacar derivadas de funciones <u>CON</u>-<u>TI</u>-<u>NUAS</u>.

<u>CÁLCULO DE DERIVADAS POR DEFINICIÓN</u>

Lo que vamos a hacer es lo siguiente. A mí me dan una función f(x). La pendiente de la recta secante entre 2 puntos x_0 y x_1 será:



$$m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

A esta cuenta se la llama <u>cociente incremental</u>. Cociente porque es un cociente (división) e incremental porque h se va incrementando (Aumenta o disminuye).
El límite del cociente incremental cuando <u>h</u> tiende a cero, es la derivada de la función en el punto x_0.
Entonces lo que tengo que hacer… ¿ Qué es ?
Plantear el cociente incremental y hallar el límite hache tendiendo a cero.
Es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Por ejemplo, supongamos que me dan la función f(x)= 3x+2 . La derivada de esta función es f'(x)= 3. Hagámoslo según la fórmula y lo verificamos:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3(x_0+h)+2-(3x_0+2)}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3x_0}+3h\cancel{+2}\cancel{-3x_0}\cancel{-2}}{h}$$

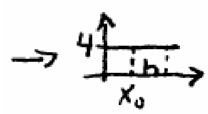
$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{3\cancel{h}}{\cancel{h}} = 3$$

➔ f'(x) = 3 (Verifica)

La derivada de la función dio 3, es decir verificó. Fíjense que los términos con x_0 se simplificaron. Eso pasa porque la pendiente de la recta (la derivada) es independiente del punto x_0 que uno tome. Para cualquier x_0 (1, -1, 0, 10, etc) la pendiente es siempre la misma y vale <u>3</u>.

Hagamos este otro ejemplo:

CALCULAR LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN f(x) = 4

La función f(x) = 4 es una recta horizontal así: →  su pendiente vale cero y la derivada va a tener que dar cero.

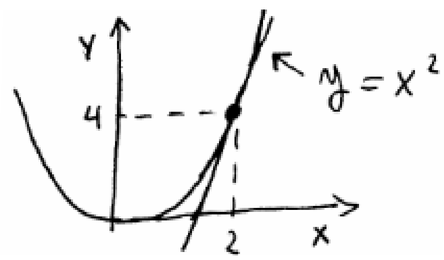
Veamos:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4 - 4}{h} = \underline{\underline{0}} = \text{Verifica}$$

Hagamos otro ejemplo más difícil.

CALCULAR LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN $f_{(x)} = x^2$ en $X_0 = 2$

Me están pidiendo que calcule la pendiente de la recta tg a la curva en el punto $x_0 = 2$. Hago un dibujito para entender mejor:



Planteo la formulita del límite del cociente incremental y hago las cuentas. Veamos:

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{2^2} + 4h + h^2 \cancel{- 2^2}}{h} \Rightarrow$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (h + 4)$$

$$\Rightarrow \underline{f'(2) = 4}$$

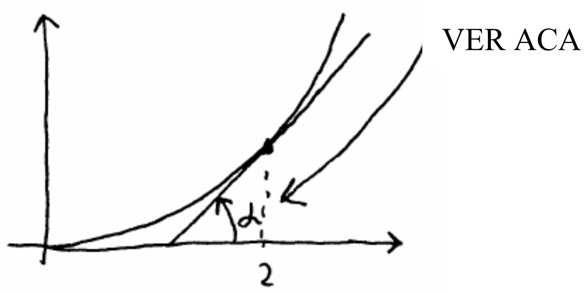
Quiere decir que la derivada de la función y= x^2 en el punto x_0= 2 es 4.
¿ Qué significa eso ? ¿ Entienden lo que significa ?
Fíjense. 4 es la pendiente, ¿ Sí ? ¿ Eso lo ven ?

Bueno, y.... ¿Y qué es la pendiente de la recta? Es la tangente del ángulo que forma. Entonces, si la pendiente me dio 4, ¿ Cuál será el ángulo que forma la recta tangente ? Muy simple.

$$\text{Si } \mathrm{tg}\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = \mathrm{arctg}\ 4 \Rightarrow$$

$$\alpha = \underline{\underline{75{,}96°}}$$

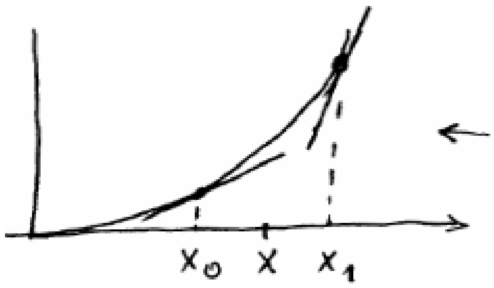
El ángulo me dio 76°. ¿ Qué es este ángulo ? Hagamos un dibujito :
Si ustedes quieren lo pueden hacer dando valores a la función. Yo lo voy a hacer todo en forma cualitativa. O sea, sin dar valores. Miren :



Quiere decir que el ángulo que forma la recta tg a la curva es de 76 grados. ¿ Está bien eso ? ¿ Cómo sé si está bien ? ¿Se les ocurre alguna manera de verificarlo?
Bueno, yo les paso una manera. Grafiquen en su casa la función y = x^2 con mucha precisión. Agarren una regla y tracen la tangente en el punto x_0 = 2
¿ Y ahora ? Bueno, ahora me consigo un transportador y mido el ángulo .
Si lo hicieron bien ese ángulo tiene que dar aproximadamente 76 grados.
¿ Lo ven ?
Así uno puede ir agarrando funciones y calcular la derivada por definición. A veces eso es fácil y a veces es difícil. Eso depende de la función que me toque.

<u>FUNCIÓN DERIVADA</u>

Fíjense ¿ Cuánto me dio la derivada de la función y = x^2 en el punto x_0 = 2 ?
<u>Rta:</u> me dio 4 ¿ Y si cambio el punto x_0 qué pasa ? Bueno, la derivada (= la pendiente) va a cambiar.



La pendiente cambia según dónde yo tome el punto x_0

Si yo hago la derivada de la función para un punto genérico x, lo que voy a obtener es la $\boxed{\text{FUNCIÓN DERIVADA}}$.

Fíjense:

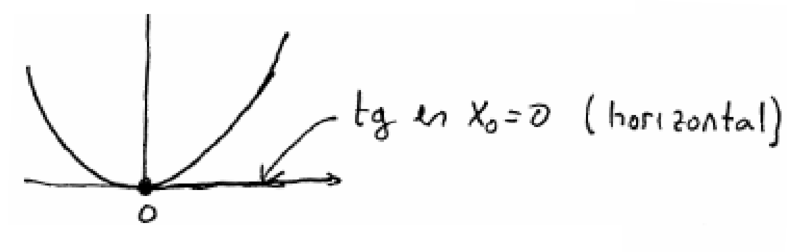
$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2hx + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} 2x + h$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f'(x) = 2x}} \quad \leftarrow \text{FUNCIÓN DERIVADA DE LA FUNCIÓN } Y = X^2$$

¿ Qué obtuve ? Obtuve una función que me va dando todo el tiempo el valor de la derivada. La derivada de la función $y = x^2$ es 2x. Yo le pongo el valor de x y ella me da el valor de la pendiente. Es decir, por ejemplo, si $x_0 = 0$, $f'(x_0 = 0) = 2 \,.0 = 0$.
¿Está bien eso? Sí, está bien. En $x_0 = 0$ una parábola tiene pendiente nula.

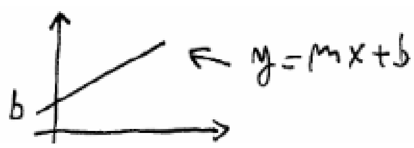


¿ Y si $x_0 = 1$? Bueno, $f'(x) = 2x \Rightarrow f'(x_0 = 1) = 2.1 = 2$
¿Y si $x_0 = 2$? Lo mismo. $f'(x_0 = 2) = 2.2 = 4$
Lo mismo puedo hacer para otros valores de x_0. 1, 10.000, 1 millón, lo que se me ocurra.
Ahora, piensen: ¿ Podría tomar valores negativos ? (-1, -10, etc).
Rta: Sí, podría. En ese caso la derivada daría <u>negativa</u>. ¿ Está bien eso ?

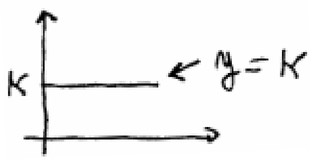
Sí, está bien. Miren el dibujo. De cero para allá 🡐 las rectas tangentes van así: ➔ \ , es decir que su derivada tendrá que ser negativa.

Ahora, pregunta: ¿ Para qué me sirve la función derivada ? O mejor dicho, cambiemos la pregunta. ¿ Qué es la función derivada ?

<u>**Rta**</u>: Es una función tal que yo le pongo el punto x_0 que yo quiera y ella me da <u>la derivada de la función en ese punto</u>. Esto viene bien porque así me ahorro ir calculando la derivada en cada punto. Yo calculo la derivada en forma genérica y listo. La función derivada es la función que me da la derivada en función de x.
Por ejemplo, a ver, sin hacer cuentas díganme: ¿ Cuál va a ser la función derivada para la recta $f_{(x)} = mx + b$? Bueno, tiene que ser m, porque m es la pendiente de la recta.



¿ Y si la función fuera y= cte (por ejemplo, y = 5) ? Bueno, la derivada va a tener que ser cero porque son rectas horizontales:



De esta manera puedo ir haciendo una tabla de funciones y sus derivadas. Hasta ahora vimos sólo 3 funciones, pero eso se puede hacer para cualquier función que se les ocurra. Para las 3 funciones que vimos la tabla quedaría así

Función	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = mx+b$	$y' = m$
$y = x^2$	$y' = 2x$

Van a ver que los libros tienen esta tabla hecha para un montón de funciones.

<u>PROPIEDADES DE LAS DERIVADAS</u>

Estas propiedades las vamos a ver sin demostración.

1) La derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas.
Es decir:

$$(f+g)' = f' + g'$$

2) La derivada de una constante por una función es el producto de la constante por la derivada de la función. Es decir:

$$(a.f(x)) = a.f'(x)$$

Hay más propiedades pero las vamos a ir viendo más adelante. Ahora quiero que apliquen esto en el siguiente ejercicio.

Calcular la derivada de la función $Y = 2 + 3\,x + 5\,x^2$

¿ Qué hago ? Bueno, puedo poner a la función $Y = 2 + 3\,x + 5\,x^2$ de esta manera:

$$y = f_1 + f_2 + f_3$$

$$\text{Con } f_1 = 2,\ f_2 = 3x \text{ y } f_3 = 5x^2$$

Haciendo eso puedo derivar considerando que la función original <u>f</u> es una suma de 3 funciones. O sea:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = f' = (f_1 + f_2 + f_3)'$$

$$\Rightarrow f' = f'_1 + f'_2 + f'_3 \Rightarrow f' = (2)' + (3x)' + (5x^2)'$$

Ahora voy derivando casa función por separado y listo:

$$f' = (2)' + (3x)' + (5x^2)'$$

$$\Rightarrow f' = 0 + 3.1 + 5.(2x)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f'(x) = 3 + 10x}}$$

Usando estas propiedades puedo ir derivando funciones choclazas sin tener que usar el límite del cociente incremental. Chicos, derivadas es un tema largo. Les pido que no se atrasen. Empiecen $\boxed{\text{ya}}$ a hacer los ejercicios de la guía.

<u>CÁLCULO DE DERIVADAS POR DEFINICIÓN</u>

Quiero que vean un ejemplo más del cálculo de una derivada por definición. Tomemos la función $f_{(x)} = x^3$. Aplico la fórmula del límite del cociente incremental:

Ahora: $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$(x+h)^3=(x+h)(x+h^2)=(x+h)(x^2+2xh+h^2)$$

$$\Rightarrow (x+h)^3=x^3+2x^2h+xh^2+hx^2+2xh^2+h^3$$

$$\Rightarrow (x+h)^3=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3$$

Entonces:
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^3}+3x^2h+3xh^2+h^3-\cancel{x^3}}{h}$$

Bueno. Saco h factor común y lo simplifico con el de abajo:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3x^2+3xh+h^2)}{\cancel{h}}$$

Ahora hago cero los términos que tienen h y me queda:

$\boxed{f'(x)=3x^2}$ Derivada de la función f(x)= x^3

Conclusión: La derivada de la función y = x^3 es 3 x^2
¿ Siguieron este razonamiento ? Lo único que hice es aplicar la definición.
Quiero que presten atención a lo siguiente. A ver:
La derivada de la función $\cancel{x}^{\boxed{2}}$ me dio 2x. La derivada de la función $\cancel{x}^{\boxed{3}}$ me dio $3x^2$... ¿ Sí ?
¿ Cuánto me dará la derivada de la función $x^{\boxed{4}}$? Bueno, habría que hacer toda la cuenta, pero da $4x^3$. Lo que quiero es generalizar esos resultados.
Si me dan la función y= x^m, ¿ Cuál será su derivada ? Y bueno, tendrá que ser $\boxed{m}.x^{\boxed{m-1}}$. Es decir:

$$(x^m)=mx^{m-1}$$

Aplicando esta propiedad hagamos algunos ejemplos; derivar:

1) $y=x^5\to y'=5x^4$

2) $y=\dfrac{1}{x}\to y=x^{-1}\to y'=(-1).x^{(-1-1)}=(-1)x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

3) $y=\sqrt{x}\to y=x^{1/2}\to y'=\dfrac{1}{2}x^{(1/2-1)}\Rightarrow$

$$y'=\frac{1}{2}x^{(-1/2)}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}\frac{1}{x^{1/2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

DERIVADA DEL PRODUCTO Y DE LA DIVISIÓN

La demostración de esto la pueden ver en algún libro por ahí. Yo no voy a hacer la demostración. No es el objetivo. La idea es que vayan entendiendo el método para derivar. ¿ Me siguen, che ? Esto sí anótenlo porque lo vamos a volver a usar:

$$(f.g)' = f'.g + f.g' \leftarrow \underline{\underline{\text{Derivada del producto}}}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2} \leftarrow \underline{\underline{\text{Derivada de un cociente}}}$$

Combinando todas estas propiedades se pueden resolver derivadas de funciones choclazas. Por ejemplo, hagan estas:

$$1)\ f_1(x) = x^{7/2} \Rightarrow f'_1(x) = \frac{7}{2}x^{\left(7/2-1\right)} \Rightarrow \underline{\underline{f'_1(x) = \frac{7}{2}x^{5/2}}}$$

$$2)\ f_2(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f'_2(x) = 3.2x - 2 \Rightarrow \underline{\underline{f'_2(x) = 6x - 2}}$$

$$3)\ f_3(x) = x.x.x^2 \Rightarrow f_3(x) = x^4 \Rightarrow \underline{\underline{f'_3(x) = 4x^3}}$$

Vamos a ver si sacan esta derivada:

$$f(x) = \frac{x^3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Acá lo que hay que hacer es poner cada $\underline{x}$ a su potencia respectiva. Acuérdense que

$$\sqrt{x} \text{ es } x^{1/2} \text{ y } \sqrt[3]{x} = x^{1/3}.$$

Entonces:

$$y = \frac{x^3.x^{1/2}}{x^{2/3}} = x^3.x^{1/2}.x^{-2/3} =$$

$$\Rightarrow y = x^{\left(3+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow y = x^{\left(\frac{18}{6}+\frac{3}{6}-\frac{4}{6}\right)} \Rightarrow$$

$$y = x^{17/6} \Rightarrow y' = \frac{17}{6}x^{\left(17/6-1\right)}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{17}{6}x^{\left(\frac{17}{6}-\frac{6}{6}\right)} \Rightarrow$$

$$\boxed{y' = \frac{17}{6}x^{11/6}}$$

TABLA DE DERIVADAS

Vamos a hacer una tabla con todas las derivadas que vimos hasta ahora:

F	F'
k	0
mx+b	m
x^m	$m.x^{m-1}$

Ahora les voy a dar las derivadas de otras funciones que van a tener que usar. Estas tienen que saberlas. Se las acuerdan de memoria y chau.

Función →

F	F'
sen x	cos x
cos x	-sen x
ln x	1/x
e^x	e^x
a^x	$a^x.\ln a$

← Derivada de esa función

Vamos a aplicar estas derivadas para calcular otras derivadas. Por ejemplo, calculemos la derivada de la tg x. Acuérdense que la tg x se puede poner como seno sobre coseno. Entonces:

$$y = \mathrm{tg}\, x = \frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x} \Rightarrow y'(x) = \left(\frac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}\right)'$$

Ahora aplico la derivada de un cociente:

$$y' = \frac{f'g - fg'}{g'} = \frac{(\mathrm{sen}\, x)'.\cos x - \mathrm{sen}\, x\,(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos x.\cos x - \mathrm{sen}\, x\,(-\,\mathrm{sen}\, x)}{(\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x}$$

Ahora, $\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x$ es 1. Entonces reemplazo:

$$\boxed{y' = \frac{1}{\cos^2 x}} \leftarrow \text{Derivada de la tangente}$$

Hagamos ahora este ejercicio: Hallar la derivada de la función $f_{(x)} = x.\ln x$

Bueno, acá lo que tengo que hacer es la derivada de un producto. ¿ Lo ven ? Tengo el producto de 2 funciones que son x y ln x. Entonces hago:

$$f'(x) = f'.g + f.g' = (x)'.\ln x + x(\ln x)' = 1.\ln x + x.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \ln x + 1}$$

En base a este resultado que obtuvimos recién, quiero que calculen la derivada de la función: f(x)= x ln x - x.

Veamos, me queda: $f'(x) = (x\ln x - x)' = (x\ln x)' - (x)'$ pero (x ln x)' es la derivada que hicimos recién, así que me queda

$$f'(x) = \ln x + 1 - 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{f'(x) = \ln x} \leftarrow \text{Derivada de la función } x\ln x - x$$

Este resultado lo vamos a usar cuando veamos integrales.

DERIVADA DE UNA COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Supongamos que me dan para derivar la función $h_{(x)} = (x^2 + 1)^5$. Puedo considerar esta función como composición de 2 funciones. Es decir, tomo $f_{(x)} = x^5$ y $g_{(x)} = x^2 + 1$. Entonces:

$$f[g(x)] = f[x^2 + 1] = (x^2 + 1)^5$$

Lo que puedo hacer ahora es lo siguiente. Todo lo que hay adentro del paréntesis lo pongo dentro de una caja. Me queda así:

$h_{(x)} = (\quad)^{\boxed{5}}$ Adentro de esta caja puede haber cualquier cosa

Si tengo $h_{(x)} = x^5$ la derivada me da $5x^4$

¿ Puedo hacer ahora $h'_{(x)} = (\quad^{\boxed{5}})' = 5.(\quad)^{\boxed{4}}$?

Rta: $\boxed{\text{NO}}$. No se puede hacer así, pero es parecido. Hay que hacer esto:

$$\text{Si}: h(x) = \square^5 \Rightarrow h'(x) = 5\square^4 \boxed{(\square)'} \leftarrow \text{Esto ver}$$

Es decir, voy a poner esto en forma general:

$$\text{Si } h(x) = F(\square) \Rightarrow h'(x) = f'(\square).(\square)'$$

Escrito en forma matemática me queda:

$$\text{Si } h(x) = f[g(x)] \Rightarrow \quad \boxed{h'(x) = f'[g(x)].g'(x)} \quad \leftarrow \text{Regla de la cadena}$$

A esto se lo llama regla de la cadena o derivada de función de función.
Para entender la regla de la cadena hay que hacer un par de ejercicios.

Por ejemplo este: Derivar: $f(x)=\sqrt{-x^3+2x}$

Tengo $f(x)=\square^{1/2}$. Entonces derivo haciendo :

$$f'(x)=\frac{1}{2}.\square^{(1/2-1)}.(\square)' \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(-x^3+2x)^{-1/2}.(-x^3+2x)'$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{(-x^3+2x)^{\frac{1}{2}}}.(-3x^2+2)$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=\frac{-3x^2+2}{2\sqrt{-x^3+2x}}}$$

Hagamos otro ejercicio aplicando la regla de la cadena: Derivar:

$$h(x)=\sqrt{(-2x^2+1)^3+1} \Rightarrow h(x)=(\square)^{1/2}$$

$$h(x)=\left[(-2x^2+1)^3+1\right]^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$h'(x)=\frac{1}{2}\left[(-2x^2+1)^3+1\right]^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}.\left[(-2x^2+1)^3+1\right]'$$

$$h'(x)=\frac{1}{2\left[(-2x^2+1)^3+1\right]^{1/2}}.\left[3(-2x^2+1)^2.(-4x)\right]$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{(-4x)3.(-2x^2+1)^2}{2\sqrt{(-2x^2+1)^3+1}}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{-6x.(-2x^2+1)^2}{\sqrt{(-2x^2+1)^3+1}}$$

Hagamos otro más. Derivar aplicando la regla de la cadena:

$$h(x)=\sqrt{\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

Bueno, primero voy a poner este choclazo a la $\frac{1}{2}$ para verlo mejor.

$$h(x)=\left[\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)^2+2\right]^{\frac{1}{2}}=(\square)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}\left[\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)^2+2\right]^{\frac{1}{2}-1}.\left[\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)^2+2\right]'$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{1}{2}\frac{1}{\left[\left(-x^6+\frac{1}{2}\right)^2+2\right]^{\frac{1}{2}}}.\left[2\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)'\right]$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{\cancel{2}\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)'}{\cancel{2}\left[\left(-x^6+\frac{1}{2}\right)^2+2\right]^{\frac{1}{2}}}=$$

$$\Rightarrow h'(x)=\frac{\left(-x^6+\frac{1}{x}\right)\left(-6x^5-1.x^{-2}\right)}{\sqrt{\left(-x^6+\frac{1}{2}\right)^2+2}}$$

Hagamos este otro: Derivar la siguiente expresión: $h(x)=\cos\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)$

Acá queda el asunto así:

$$h(x)=\cos(\square)\Rightarrow$$

$$h'(x)=-\text{sen}(\square).(\square)'\Rightarrow$$

$$h'(x)=-\text{sen}\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right).\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)'\Rightarrow$$

Ahora, para hacer la derivada del paréntesis $\frac{x^2+1}{x^3}$, lo hago como la derivada de un cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'.g-f.g'}{g^2}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)'=\frac{2x.x^3-(x^2+1)3x^2}{x^6}=\frac{2x^4-3x^4-3x^2}{x^6}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right)'=\frac{-x^4-3x^2}{x^6}=\frac{-x^2(x^2+3)}{x^6}$$

$$\Rightarrow h'(x)=-\text{sen}\left(\frac{x^2+1}{x^3}\right).\left(\frac{-x^2-3}{x^4}\right)$$

Hagamos este: Derivar $h_{(x)} = e^{-x^2}$

Lo que hay que darse cuenta acá es que en e^{-x^2} lo que tengo es $e^{\square}$. Entonces al derivar tengo que hacer:

$$(e^{\square})' = e^{\square}.(\square)'$$

$$\Rightarrow h'(x) = e^{-x^2}.(-x^2)' \Rightarrow$$

$$\boxed{h'(x) = -2x.e^{-x^2}}$$

¿ Van viendo cómo se hacen estos ejercicios ? ¿ Tienen dudas ? Es siempre lo mismo, chicos. Lo que tienen que saber bien son las reglas de derivación y la regla de la cadena.
¿ Los de derivada por definición ? ¿Si los tomamos en el parcial ? Bueno, no. Generalmente no. Al menos yo nunca vi que los tomaran. Derivada por definición es un tema que hay que darlo para que ustedes puedan ver qué es la derivada y de dónde sale. Esto es todo.

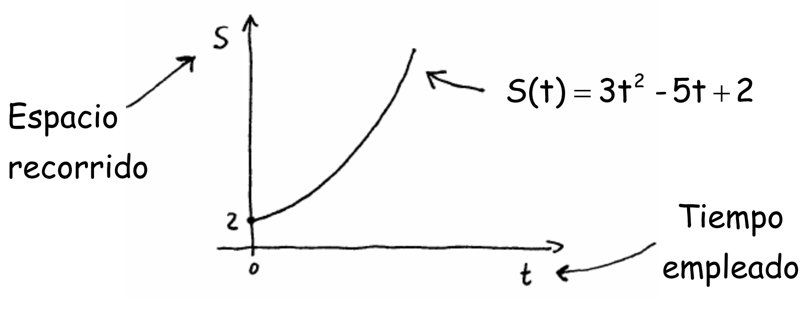
<u>VELOCIDAD</u>

Hay algunos ejercicios de la guía que piden calcular la velocidad de un móvil. Alguien dijo por ahí que hay que derivar la función que da el espacio recorrido. Eso está bien, pero quiero que vean de dónde sale.

Supongamos que un auto viene moviéndose y la función que me da el espacio recorrido es:

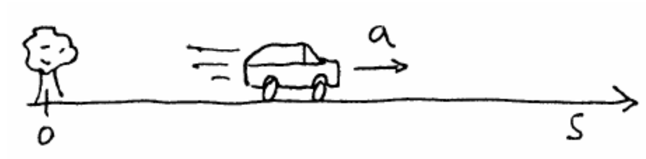
$$S_{(t)} = 3\,t^2 - 5\,t + 2$$

¿ Qué es esta función? Bueno, grafiquémosla. Es una parábola, ¿ No es cierto ? Bueno ¿ Se acuerdan cómo se graficaba ? Debe dar una cosa así:

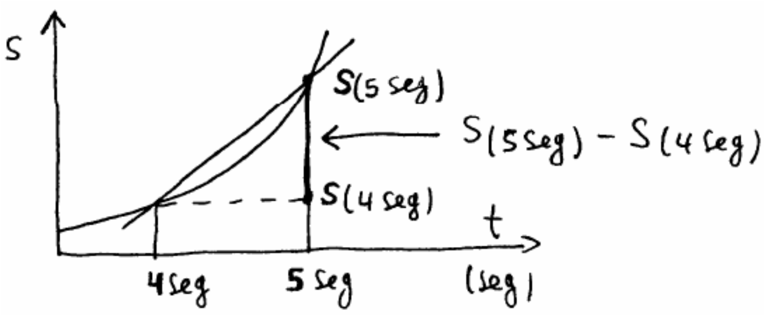


Es decir, yo meto un tiempo cualquiera en la ecuación y ella me da el espacio recorrido hasta ese momento. Supongamos que quiero saber la velocidad del móvil a los 4 segundos. ¿ Cómo hago eso ?

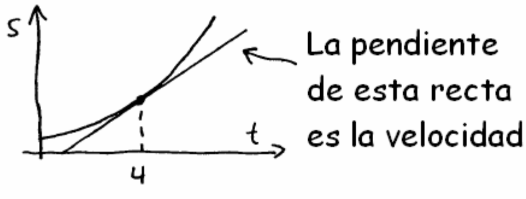
Bueno, ustedes saben que la velocidad se calcula como espacio recorrido dividido el tiempo empleado. ¿ Puedo hacer eso acá ?
<u>Rta:</u> No, no puedo porque la velocidad es $\boxed{\text{VARIABLE}}$. Es decir, si la ecuación del movimiento de un auto es $S_{(t)} = 3\ t^2 - 5\ t + 2$ eso quiere decir que el auto se mueve con aceleración, o sea, va cada vez más rápido.



La cuenta: $\dfrac{S\ (5\ seg) - S\ (4\ seg)}{1\ seg}$ **NO** me da la velocidad a los 4 segundos. Miren el gráfico.



La cuenta $S_{(5\ seg)} - S_{(4\ seg)}$ / 1 seg me da la velocidad $\boxed{\text{MEDIA}}$ en ese intervalo. Yo estoy buscando la velocidad <u>exactamente a los 4 segundos</u>. En el gráfico se ve que la recta que tracé es la recta secante entre esos 2 puntos.
¿ Qué recta tendría que trazar para tener la velocidad exactamente en un instante determinado ?
Bien. La recta tangente. Muy bien, y...
¿ En qué punto ? En t = 4 segundos, ¿ No es cierto ?
Es decir, el gráfico quedaría así:



<u>Conclusión</u>: Si me dan la ecuación de movimiento de un móvil $S_{(t)}$ (espacio recorrido en función del tiempo), la derivada de esta función me va a dar la $\boxed{\text{velocidad}}$. Por ejemplo, si me dicen que $S_{(t)}$ es:

$$S_{(t)} = 3t^2 - 5t + 2$$

La velocidad será:

$$V_{(t)} = S'_{(t)} = 6t - 5$$

Esta función V(t) (= S'(t)) = 6t - 5 es la función derivada, y me va dando todos los valores de la velocidad en función del tiempo. Si ahora yo quiero v justo a los 4 segundos, tengo que reemplazar t por 4 segundos, es decir:

$$V_{(4\ seg)} = 6.4 - 5 = \underline{19}$$

Si la función s(t) venía dada en m y en segundos, la velocidad a los 4 segundos será de 19 m/s. ¿ Lo ven esto ? ¿ Se entendió ?

Vamos a ver este ejemplo.

> Un auto se mueve según la ecuación $S_{(t)} = t^3 + 2t^2 - t$.
> Calcular la velocidad en t = 1 seg. y en t = 2 seg.

Bueno, como me dan la función espacio recorrido en función del tiempo, la derivo y tengo la velocidad. Entonces:

$$S(t) = t^3 + 2t^2 - t \Rightarrow$$

$$S'(t) = V(t) = 3t^2 + 4t - 1$$

Entonces para t = 1 seg y para t = 2 seg voy a tener:

$$\mathbf{V(1\ seg) = S'(t = 1\ seg) = 3(1\ s)^2 + 4(1\ s) - 1}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{V\ (1\ seg) = 6\ m/s}}$$

Haciendo lo mismo para t = a 2 segundos :

$$\underline{\mathbf{V\ (2\ seg) = 19\ m/s}}$$

Ejercicios

Vamos a seguir derivando funciones. Hagamos este:

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \leftarrow \text{Derivar esta expresión}$$

Acá hay que aplicar la derivada de un cociente, pero primero hallemos las derivadas del numerador y del denominador: Busquemos $(e^{-x})'$

$$e^{algo} \Rightarrow (e^{algo})' = e^{algo}.(algo)' \Rightarrow$$

Tengo $(e^{-x})' = e^{-x}(-x)' = -e^{-x}$

Entonces $f'(x) = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}$ (derivada de un cociente)

$$f'(x) = \frac{(e^{x} - e^{-x})'(e^{x} + e^{-x}) - (e^{x} - e^{-x})(e^{x} + e^{-x})'}{(e^{x} + e^{-x})^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(e^{x} + e^{-x})(e^{x} + e^{-x}) - (e^{x} - e^{-x})(e^{x} - e^{-x})}{(e^{x} + e^{-x})^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{(e^{x} + e^{-x})^2 - (e^{x} - e^{-x})^2}{(e^{x} + e^{-x})^2}$$

Acá lo que puedo hacer es distribuir el denominador y me queda:

$$\boxed{f'(x) = 1 - \left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}\right)^2}$$

No se puede reducir más el resultado.

Hagamos este otro ejemplo:

$$\mathbf{f(x) = ln\ [\ (x^2 + 1)^3\ ]} \ \leftarrow \textbf{Derivar esta expresión}$$

Esta función la tengo que tomar como si fuera ln (□). La derivada será:

$$f'(x) = (\ln\square)' = \frac{1}{\square}.(\square)'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}.[(x^2+1)^3]'$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{3(x^2+1)^2.2x}{(x^2+1)^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{6x}{x^2+1}}$$

DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Con este método se pueden calcular las derivadas del arco seno y del arco coseno. ¿ Qué pasaba cuando yo tenía una función y la componía con su inversa ? Esa composición me daba x ¿ Se acuerdan ? Eso lo poníamos así:

$$\mathbf{f}[f^{-1}(x)] = x$$

Ahora lo que yo pregunto es lo siguiente : ¿Qué pasa si trato de derivar esto? Bueno, probemos. La derivada de x es <u>1</u> y la derivada de la composición es:

$$\left(\mathbf{f}[f^{-1}(x)]\right)' = \mathbf{f}'[f^{-1}(x)].[f^{-1}(x)]'$$

Entonces me va a quedar:

$$\left(\mathbf{f}[f^{-1}(x)]\right)' = (x)'$$

$$\Rightarrow f'[f^{-1}(x)].[f^{-1}(x)]' = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{\mathbf{f}'[f^{-1}(x)]}} \quad ①$$

Esta es la fórmula que usamos para derivar funciones inversas.

Hagamos un ejemplo: Hallar la derivada de la función arc sen x

Bueno. Acá hay que pensar. Tengo una función f(x) que es sen x. Su derivada es $f'_{(x)}$ = cos x. También tengo su función inversa $f^{-1}(x)$ que es arc sen x. Lo que me están pidiendo es la derivada de $f^{-1}(x)$. Para calcularla uso la fórmula <u>1</u>. Entonces, $[f^{-1}(x)]'$ va a ser:

$$[f^{-1}(x)]' = (\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } x)} \leftarrow \text{Ver bien acá}$$

Ahora, el cos (arc sen x) es siempre positivo. Supongo que se acuerdan que $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, ¿ No ? De acá despejo el cos α.

$$[f^{-1}(x)]' = (\text{arc sen } x)' = \frac{1}{\cos(\text{arc sen } x)} \leftarrow \text{Ver bien acá}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$$

Reemplazando me queda: $\cos(\text{arc sen } x) = \sqrt{1-\text{sen}^2(\text{arc sen } x)}$

Lo que hay que darse cuenta acá es que es el (seno del arco seno de x).
A ver,,, ¿ Qué es ? Piensen.
Seno y arco seno son funciones inversas ¿ Sí ?
¿ Entonces que obtengo si hago sen (arco sen x) o lo que es lo mismo, $[f^{-1}(x)]'$?
Claro, obtengo x. Entonces el choclazo $[\text{sen}\ (\text{arc sen}\ x)]^2$ me da nada más y nada menos que x^2. De manera que la expresión cos (arc sen x) vale $\sqrt{1 - x^2}$.
Reemplazando esto que obtuve en lo que tenía antes que era:

$$(\text{arc sen}\ x)' = \frac{1}{\cos\ (\text{arc sen}\ x)}$$

me queda :

$$\boxed{(\text{arc sen}\ x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \leftarrow \text{Derivada del arco seno x}$$

De la misma manera se pueden halar las derivadas del arco coseno y del arco tangente.

DERIVADAS SUCESIVAS

Supongamos que me dan la función $f(x) = 4x^3 - 2x^2 - x + 3$. La derivo y obtengo:

$$f'(x) = 12\,x^2 - 4x - 1$$

Esta es la derivada de la función. ¿ Puedo ahora a su vez derivar esta derivada ?
Rta: Sí, puedo. Si hago eso lo que obtengo es la derivada SEGUNDA de la función. Lo ponemos así:→$f''(x)$. Entonces:

$$f''(x) = 24\,x - 4 \leftarrow \text{Derivada } 2^{da}$$

¿ Puedo derivar a f'' ? Sí, puedo y obtengo la derivada TERCERA. Me queda así:

$$f'''(x) = 24 \leftarrow \text{Derivada } 3^{ra}$$

Lo que quiero que vean es que si a uno le dan una función, puede derivarla un montón de veces. Hacer esto se llama hallar las derivadas sucesivas de la función. ¿ Está ?
No tiene nada de nuevo esto. Es derivar y volver a derivar. Si me piden la derivada 2^{da}, derivo 2 veces. Si me piden f^{IV} derivo 4 veces. Eso es todo.

EJEMPLO DE DERIVADAS SUCESIVAS

Dada f(x) hallar f'(x), f''(x) y f'''(x).

1) $f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow f'''(x) = 0$

2) $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}(= x^{-1}) \rightarrow f''(x) = -1x^{-2} \rightarrow f'''(x) = 2x^{-3}$

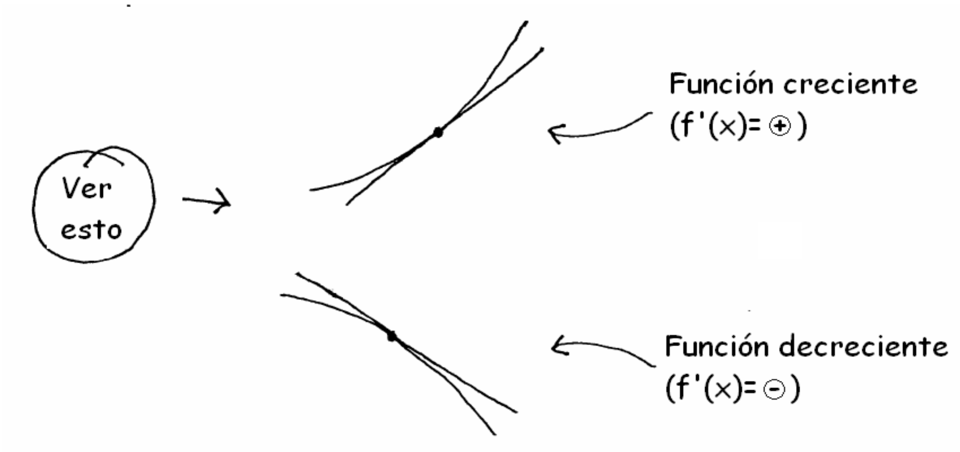
3) $f(x) = \text{sen}\,x \rightarrow f'(x) = \cos x \rightarrow f''(x) = -\text{sen}\,x \rightarrow f'''(x) = -\cos x$

Así uno puede ir hallando todas las derivadas sucesivas que quiera.

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Con esto de la derivada podemos saber cuándo una función crece y cuándo decrece. Fíjense, si la función crece, la pendiente tendrá que ser así: → ╱, es decir, la derivada será positiva. Cuando la función decrece tengo exactamente lo contrario: → ╲, es decir, la derivada será negativa.

Lo van a ver mejor en este dibujito:



Hagamos un ejemplo.

Estudiar las zonas de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

¿Qué hago? Bueno, busco la derivada y me fijo qué da: Veamos:

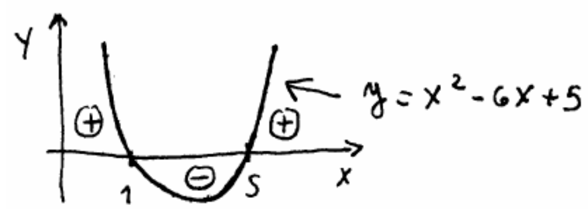
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = x^2 - 6x + 5$$

¿ Cómo sé cuándo esta ecuación cuadrática es + o – ?
Bueno, esta es una parábola que va para arriba. (El término cuadrático es positivo). Quiere decir que tomará valores negativos únicamente entre las 2 raíces. Aplicando la fórmula para la cuadrática calculo x_1 y x_2. Me da:

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 5$$

Quiere decir que la parábola tendrá esta forma:

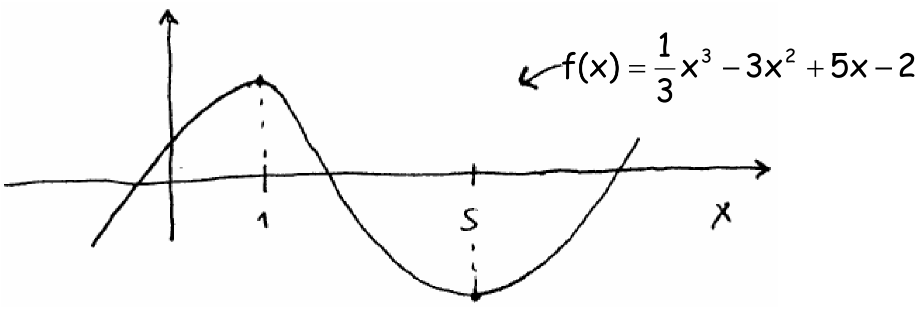


Entonces, la función original será creciente en las zonas que marqué con + (derivada primera +) y decreciente en la zona que marqué con – (Derivada 1ra negativa). En resumen, tengo:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 2$$

CRECIENTE en (-∞ , 1)
DECRECIENTE en (1 , 5)
CRECIENTE EN (5 , +∞)

El gráfico de la función tendrá aproximadamente esta forma:



Esto que hicimos se llama **<u>hacer el análisis de la función</u>**. Para hacer el análisis completo faltaría dar la posición de los máximos y de los mínimos. Ya vamos a ver bien-bien esto más adelante. El análisis de una función es un tema importante. Y se suele tomar bastante. Traten de entenderlo bien.

Vamos a hacer otro ejemplo:

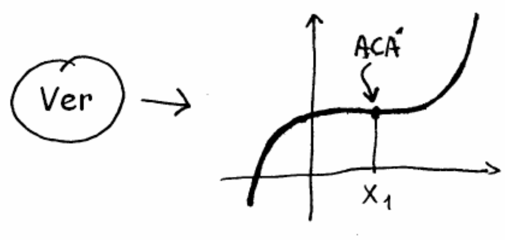
> Estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función **$y = x^4 - 4x^3 + 10$.** Hacer un gráfico aproximado y señalar la posición de los máximos y mínimos relativos.

Bueno, nos dan una función media raròfila... ¿ Qué hago ? Y bueno, derivo:

$$y = x^4 - 4x^3 + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = 4x^3 - 12x^2$$

Esta es la derivada. Ahora tengo que igualarla a cero. Los puntos en donde la función sea cero son $\boxed{\text{CANDIDATOS}}$ a ser máximos o mínimos. Digo "candidatos" porque pueden no ser nada. A estos puntos los llamo <u>puntos críticos</u>. Acuérdense que no siempre en un punto crítico voy a tener un máximo o mínimo. Puedo no tener nada. Sería, por ejemplo, este caso:



← En este caso no tengo máximo ni mínimo en el punto $x = x_1$

Bueno, trabajemos con la derivada y fijémonos cuándo es + y cuándo es -.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = 4x^2(x-3)$$

¿ Cuáles son las raíces de esta ecuación ? Bueno, son $x_1 = 0$ y $x_2 = 3$. Ahí la función vale cero. Ahora, ¿ Cómo hago ahora para saber qué pasa en los puntos intermedios ?
Rta: Tomo valores cualquiera y me fijo qué signo me da. Voy probando con la calculadora. La tabla queda así:

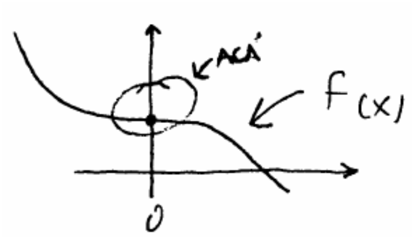
Intervalo	Signo de f'
(-∞, 0)	-
(0, 3)	-
(3, +∞)	+

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$$
$$f'(x) = 4x^2(x-3)$$

Entonces donde la derivada 1ra me da -, tengo una región de decrecimiento. Donde la derivada da + tengo una región de crecimiento. Conclusión:

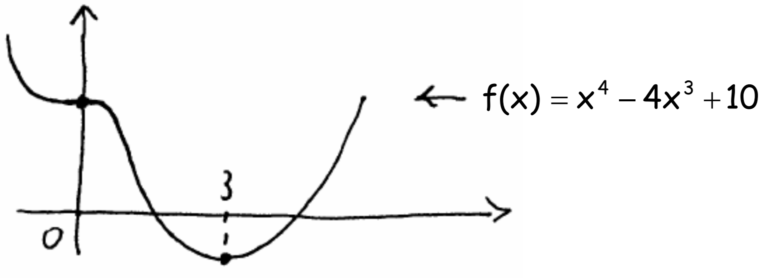
En (-∞, 0) la función DECRECE
En (0, 3) la función DECRECE
En (3, +∞) la función CRECE

Lo que quiero que vean acá es lo siguiente. ¿Qué pasa en el punto x = 0 ?
¿ Hay un máximo o un mínimo ? Bueno, en x = 0 no hay nada.
Fíjense que entre (-∞ y 0) la función viene decreciendo y después de cruzar el cero la cosa sigue decreciendo quiere decir que voy a estar en este caso:



Quiere decir que en x = 0 no tengo ni un máximo ni mínimo. Tengo un punto donde la curva cambia la concavidad. A estos puntos se los llama puntos de inflexión.

Ahora, en x = 3 sí tengo un mínimo porque en ese punto la función pasa de ser decreciente a ser creciente. Quiere decir que el gráfico aproximado de f será:



Les repito, chicos. Este es un tema importante. Tienen que saber bien este tipo de ejercicios que piden hacer el análisis de una función.

Vamos a hacer otro ejemplo de análisis de una función:

Hallar máximos, mínimos, asíntotas, crecimiento y decrecimiento para la función $f(x) = x^3 + \frac{3}{x}$. Hacer un gráfico aproximado.

Para buscar máximos o mínimos lo que hacemos es buscar los lugares donde la derivada vale cero o donde la derivada no existe. Esos puntos serán posibles $\boxed{\text{CANDIDATOS}}$ a ser máximos o mínimos. Ojo, digo $\boxed{\text{POSIBLES}}$. No es seguro que ahí vaya a haber un máximo o un mínimo.
Bien. Eso ya lo aclaramos antes. ¿ Se acuerdan ? Seguimos.

Vamos a ver 1ro el dominio de la función. ¿Cuál es el dominio de $f_{(x)} = x^3 + 3/x$? La función NO EXISTE en x = 0, por lo tanto:

$$\text{Dom } f = \Re - \{0\}$$

El elemento cero no pertenece al dominio de la función. Busquemos ahora las asíntotas ¿ Se acuerdan cómo se hacía ? Tenía que tomar el límite para x tendiendo a los puntos críticos. De esa manera determinaba las asíntotas verticales. El único punto crítico es x = 0. Entonces:

$$\lim_{x \to 0^+} x^3 + \frac{3}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^3 + \frac{3}{x} = -\infty$$

Los límites me dieron +∞ y -∞. Eso significa que la función tiene una asíntota vertical en x = 0. Hasta acá vamos bien, ¿ No ? Bueno. Vamos a las asíntotas horizontales. ¿ Cuándo yo tenía una asíntota horizontal ?
Era cuando los límites para $x \to \infty$ y $-\infty$ daban un valor finito. Veamos:

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 + \frac{3}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 + \frac{3}{x} = -\infty$$

Los límites <u>no</u> dieron valores finitos → <u>no</u> voy a tener asíntotas horizontales.
¿ Cómo hago ahora para ver si hay máximos o mínimos ? Bien, busco la derivada y la igualo a cero. Entonces:

$$f(x) = x^3 + \frac{3}{x} \Rightarrow \text{Esto lo puedo poner :}$$

$$f(x) = x^3 + 3.x^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 3(-1)x^{-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}}$$

¿ Para qué valores de x es <u>cero</u> esta función ? A ver:

$$\mathbf{3\ x^2 - \frac{3}{x^2} = 0 \Rightarrow \quad 3\ x^2 = \frac{3}{x^2} = x^4 = \frac{3}{3}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x = \sqrt[4]{1}}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathbf{x = 1}} \quad \mathbf{o} \quad \underline{\mathbf{x = -1}}$$ ← **posibles puntos donde puede haber un máximo o un mínimo (Posibles)**

¿ Son estos los únicos candidatos a ser máximos o mínimos ?
<u>Rta</u>: <u>No</u>. En x = 0 la derivada <u>no</u> existe, quiere decir que los posibles máximos o mínimos son:

$$x_1 = 0 \quad ó \quad x_2 = 1 \quad ó \quad x_3 = -1$$

Tenemos que analizar entonces lo que pasa en estos 3 puntos. Para eso voy sacando los intervalos de crecimiento y decrecimiento. La cosa es así: Donde la derivada sea + tendré a la función <u>creciendo</u> y donde la derivada dé negativa tendré a la función <u>decreciendo.</u>

Me fijo entonces en qué puntos f'(x) es + o -. Sé que en x = 1 y en x = - 1 la función derivada vale cero. Eso quiere decir que entre esos dos puntos será positiva o que entre esos dos puntos será negativa. Doy un valor con la calculadora y me fijo:

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$$

Por ejemplo:

$$f'(\sqrt{3}) = 8\ (= +)\ \text{y}\ f'(-\sqrt{3}) = 8\ (= +)$$

Quiere decir que de 1 para allá: → y de - 1 para allá ← la derivada será positiva. O sea, la derivada será – entre 1 y - 1. Conclusión: la función decrece entre - 1 y 1 y crece en FUNCION. Es decir:

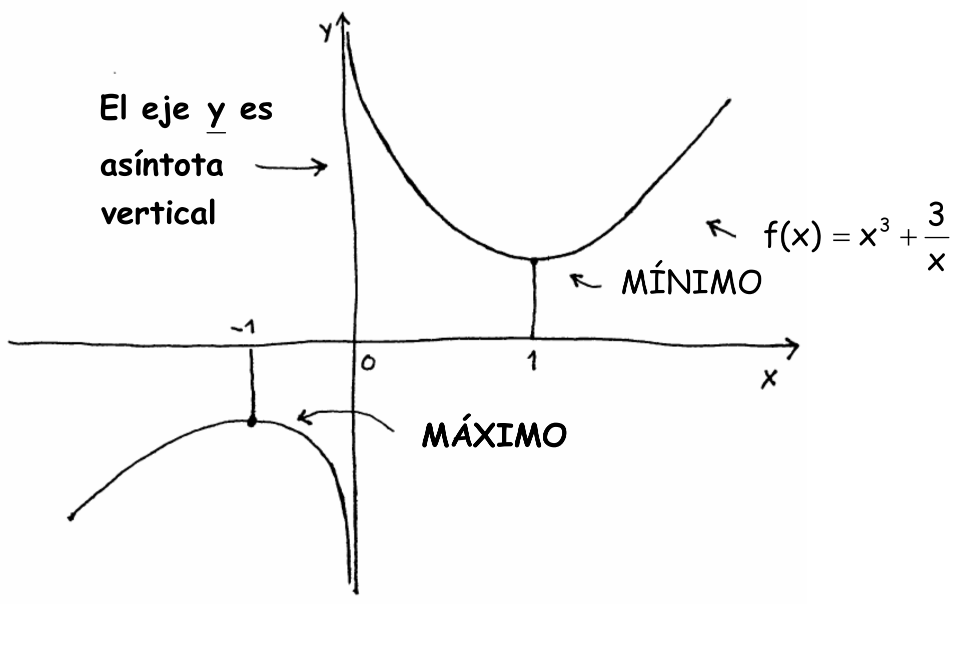
Intervalo	Signo de f'	Conclusión
$(-\infty, -1)$	+	→ f crece
$(-1, 1)$	-	→ f decrece
$(1, +\infty)$	+	→ f crece

Sabiendo los intervalos de crecimiento y decrecimiento ya puedo conocer los máximos y los mínimos. Por ejemplo, en x = - 1 la función pasa de crecer a decrecer, eso quiere decir que

$$\boxed{X = -1 \text{ es MÁXIMO}}$$

En x = 1 la función pasa de decrecer a crecer, por lo tanto: **X = 1 es MINIMO**

¿ Qué pasa ahora en x = 0 ? ¿ Hay extremos ahí ? ¿ Eh ?
Rta: No. No hay nada. En x = 0 la función no existe, de manera que los únicos puntos donde hay máximos o mínimos son 1 y - 1. Eso es todo sobre el análisis de esta función.
Ahora tengo que dibujar el gráfico aproximado ¿ Cómo hago ? ¿ Voy dando valores con la calculadora ?
Rta: No. No hace falta dar valores. Tengo la posición de los máximos, de los mínimos y las asíntotas. Entonces basándome en esto puedo hacer el gráfico. Justamente quiero que vean que este es el objetivo de este tipo de ejercicios. La idea es siempre la misma: hacer un análisis de función para poder tener una idea de la forma que tiene. El gráfico queda algo así. Miren:



¿ Preguntas ? ¿ Hay dudas ? Estos ejercicios son importantes, así que cualquier cosa que no entiendan, pregunten.

Bueno, vamos a otro ejemplo.

Ejercicio

Hallar el dominio, asíntotas y extremos para la función $f(x) = \dfrac{16}{x^2+4}$
Hacer un gráfico aproximado.

¿ El dominio de esta función cuál va a ser ? Van a ser todos los valores donde no se anule el denominador ¿ Sí ? Bien. Busquemos esos valores:

$$x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4$$

$$\Rightarrow x = \nexists$$

No existen valores de x que hagan que se anule el denominador. Quiere decir que el dominio de la función serán todos los reales. Tonces:

$$\text{Dom } f = \Re \leftarrow \text{Dominio de la función}$$

¿ Hay asíntotas ? Bueno, busquemos los límites:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{16}{x^2+4} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{16}{x^2+4} = 0$$

Va a haber asíntota. La función se hace asintótica al eje x para x tendiendo a ∞ y a -∞. Quiere decir que la asíntota horizontal va a ser y = 0 ← Asíntota horizontal. ¿ Asíntotas verticales va a haber ?
Rta: No. No va a haber porque no hay puntos donde se anule el denominador. Busco ahora los máximos y los mínimos. Tendré máximos o mínimos en donde se anule la derivada o en donde la derivada no exista. Entonces, derivo e igualo a cero:

$$f(x) = \frac{16}{x^2+4} = 16(x^2+4)^{-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 16(-1)(x^2+4)^{-2}.(2x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{-32x}{(x^2+4)^2}$$

¿ Habrá lugares donde la derivada no existe ? Rta: No. El paréntesis $x^2 + 4$ no se anula para ningún valor real de x. El numerador -32 x se anula en x = 0.

¿ Conclusión ?

<u>X = 0</u> es posible máximo o mínimo.

Para ver si x = 0 es máximo o mínimo busco los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Veamos: En x = 0 tengo o un máximo o un mínimo. Quiere decir que tengo que probar con valores menores que cero y mayores que cero.

La derivada era $f'(x)=\dfrac{-32x}{(x^2+4)^2}$, entonces por ejemplo, si x = -1, f'(x) = +

Ahora, si x = 1, f'(x) = -, esto quiere decir que puedo hacer la siguiente tabla:

Intervalo	Signo de f'
(-∞, 0)	+ → f crece
(0, +∞)	- → f decrece

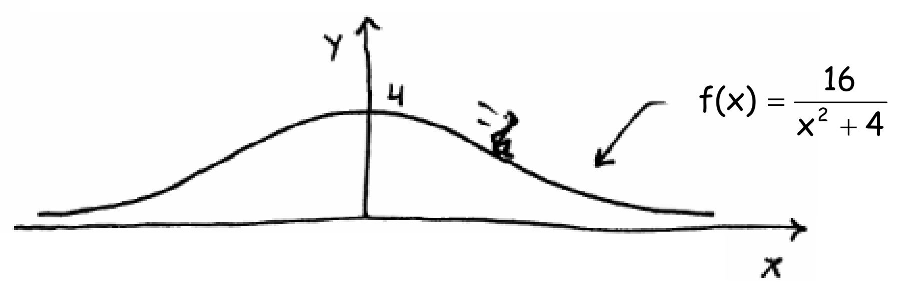
Conclusión, los intervalos de crecimiento y decrecimiento serán:

En (-∞, 0) la función crece
En (0, +∞) la función decrece

Bueno, falta ahora saber si en x = 0 tengo un máximo o un mínimo. Bueno, eso no es difícil. Fíjense: Antes de llegar al cero la función venía creciendo, ¿ No es cierto ? ¿ Y después de pasar el cero ? Después de pasar el cero la función va decreciendo. ¿ Qué me dice esto ? Me dice que

<u>X = 0</u> es un máximo

Ahora hago el gráfico aproximado de la función. Sé que y = 0 es una asíntota horizontal. También sé que a la izquierda del cero la función crece y a la derecha del cero la función decrece. Sé que x = 0 es un máximo.
Quiere decir que la forma aproximada de la función será la siguiente:



¿ Lindo dio el gráfico, no ? ¿ Qué pasa ? ¿ No les gusta mi dibujito ?
¡ Bah, lo que pasa es que ustedes son unos amargados !
¡ Sonrían ! → ☺ (risas). Bueh, ¡ Ahora está mejor !

Bueno, ahora viene la conclusión de todo este tema. Y esa conclusión es la siguiente : ¿ Cómo hay que hacer para resolver los ejercicios que piden hacer el análisis de una función ?
Bueno, hay que seguir estos pasos:

1) Dada la función me fijo cuál es el dominio buscando los puntos donde se anula el denominador.

2) Busco asíntotas horizontales y verticales (Hallando los límites)

3) Busco posibles extremos (máximos o mínimos) en los puntos donde se anula la derivada o donde la derivada <u>no</u> existe.

4) Hallo los intervalos de crecimiento y decrecimiento probando con puntos que estén a la izquierda y a la derecha del posible máximo o mínimo. Si en esos puntos la derivada es +, la función <u>crece</u>. Si en esos puntos la derivada es -, la función <u>decrece</u>.

5) Fijándome si la función cambia de creciente a decreciente o viceversa, resuelvo el asunto de si el posible extremo es un máximo o un mínimo.

Eso es todo. Sigan estos pasos y no van a tener problema para resolver estos ejercicios. ¿ Alguna duda chicos ? ¿ Algo que quieran preguntar ?
¿ Están haciendo los ejercicios de la guía ? Mejor no pregunto, ¿ No ?

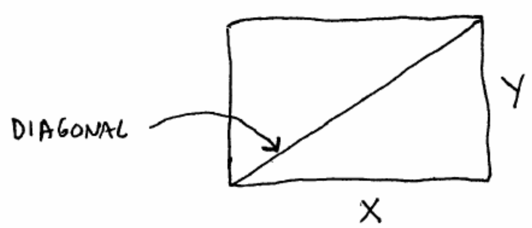
<u>MÉTODO DE LA DERIVADA SEGUNDA</u> (Para hallar máximos y mínimos)

Quiero que veamos hoy un nuevo método que facilita un poco todo esto de buscar los máximos y los mínimos de una función. Lo vamos a ver con un problema. Hay algunos problemas en la guía. Son problemas de máximos y mínimos. Les doy uno. Dicto:

<u>Problema:</u>

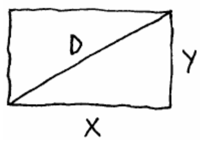
De todos los rectángulos de área <u>A</u>, encontrar el que tiene diagonal más corta.

Bueno ¿ Cómo se hace esto ? <u>Rta</u>: Y, hay que pensar. Vamos, no sean fiacas. Empecemos por hacer un dibujo. El rectángulo que tengo es este:



Fíjense que a los lados los llamé x e y ¿ Hasta acá está bien ? No hice nada nuevo. Sólo dibujé un rectángulo y le puse nombre a los lados. ¡ Vamos, no protesten, che !
Ahora, dicen que tiene superficie A. La superficie de un rectángulo es base por altura ¿Sí? A la base la llamé x y a la altura la llamé y.
Quiere decir que la superficie será x por y. Entonces puedo poner que:

$A = x \,.\, y \leftarrow$ Área del rectángulo



Ahora quiero saber cuánto mide la diagonal norte del rectángulo ¿Qué hago? ¿ Puedo aplicar pitágoras ? Sí, claro. Es lo que tengo que hacer. Me queda:

$$\text{diagonal} = \sqrt{\text{lado}^2 + \text{lado}^2}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Bueno, de la expresión del área despejo Y y me queda:

$$A = x.y \Rightarrow y = \frac{A}{x}$$

Esto lo reemplazo con la expresión que me da lo que mide la diagonal.
Entonces:

$$D = \sqrt{x^2 + \left(\frac{A}{x}\right)^2} \qquad \Rightarrow D = \sqrt{x^2 + \frac{A^2}{x^2}}$$

$$\Rightarrow D = \sqrt{x^2 + A^2.x^{-2}}$$

¡ Chicos, no se confundan por favor ! A es un número. 20, 50, 100, lo que sea. Se supone que es dato. Quiero decir, la única incógnita del problema es x.
¿ Estamos ?
Entonces: la función que me da la longitud de la diagonal en función de x es:

$$D = \sqrt{x^2 + A^2 x^{-2}}$$

Si quiero saber cuando esta función tiene un máximo o un mínimo, ¿ Qué tengo que hacer ? Bien, la derivo y la igualo a cero. Está bien. Lo hago:

$$D' = \left[\left(x^2 + A^2.x^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \left(\square^{\frac{1}{2}}\right)' \Rightarrow$$

$$D' = \frac{1}{2}\square^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}.(\square)'$$

$$\Rightarrow D' = \frac{1}{2}\left(x^2 + A^2x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}.\left(x^2 + A^2x^{-2}\right)'$$

$$\Rightarrow D' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + A^2x^{-2}}}.\left[2x + A^2(-2)x^{-3}\right]$$

¿ Sí ? ¿ Hasta acá está bien ? Derivé el choclazo y me quedó eso. Ahora lo igualo a cero y despejo x:

$$D' = \frac{\cancel{2}x - \cancel{2}A^2.x^{-3}}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + A^2x^{-2}}} = 0$$

Este denominador existe porque x y A están al ^{2} (No pueden ser -)

$$\Rightarrow x - A^2x^{-3} = 0$$

$$\Rightarrow x = A^2x^{-3} \Rightarrow \frac{x}{x^{-3}} = A^2$$

$$\Rightarrow x^4 = A^2 \Rightarrow x = \sqrt[4]{A^2} \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{A}}$$

¿ Me siguieron ? ¿ Qué es este valor de x que calculé ? Es el valor que hace que la derivada 1ra sea cero, es decir, un POSIBLE candidato a ser máximo o mínimo. Bien ¿ Cómo sé ahora si es un máximo o un mínimo ?
Bueno, para resolver esto voy a usar el criterio de la derivada 2da. Quiero explicárselos. Lo que hay que hacer es derivar todo otra vez. Y bueno, hay que hacerlo. Ya sé que es pesado. Vamos. Tenía:

$$D' = \frac{x - A^2.x^{-3}}{\sqrt{x^2 + A^2x^{-2}}}$$

Miren, lo voy a poner de otra forma para que sea más fácil derivar:

$$D' = \left(x - A^2.x^{-3}\right)\left(x^2 + A^2x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Ahora tengo un producto y lo derivo con la derivada de un producto:

$$\mathbf{(f.g)' = f'.g + f.g' \Rightarrow}$$

$$\mathbf{D'' = \left(x - A^2.x^{-3}\right)'\left(x^2 + A^2x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(x - A^2.x^{-3}\right)\left[\left(x^2 + A^2x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]'}$$

$$\mathbf{= \left[1 - A^2(-3)x^{-4}\right]\left(x^2 + A^2x^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(x - A^2.x^{-3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^2 + A^2x^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}}\left[2x + A^2(-2)x^{-3}\right]}$$

¡ Uhhh ! ¡ Qué choclazo ! Ahora tendría que reemplazar en este coso por x = √A para ver si da + o -. Así es el método. Si f'' da + es que tengo un $\boxed{\text{MÍNIMO}}$. Si da negativo tengo un $\boxed{\text{MÁXIMO}}$

Bueno, ¿ Derivo ? No. No lo voy a hacer así. Es muy largo. Voy a usar otro método. Fíjense. Estoy buscando que la diagonal sea mínima. ¿ Es lo mismo que buscar que D^2 sea mínima ?
Sí, es lo mismo. Si yo encuentro el valor de x para el cual $D^{\boxed{2}}$ es mínima, la función será mínima. Empiezo todo de nuevo. Tenía que la diagonal al ^{2} valía:

$$D^2 = x^2 + A^2.x^{-2}$$

Esta va a ser ahora la función f que tengo que derivar.

$$f\left(\equiv D^2\right) = x^2 + A^2.x^{-2}$$

$$\Rightarrow f' = 2x + A^2(-2)x^{-3}$$

$$\Rightarrow f' = 2x - \frac{2A^2}{x^3}$$

Ahora igualo esto a CERO:

$$f' = 0 \Rightarrow 2x - \frac{2A^2}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{2A^2}{x^3} \Rightarrow x.x^3 = A^2$$

$$\Rightarrow x^4 = A^2 \Rightarrow x = \sqrt[4]{A^2}$$

$$\Rightarrow \underline{x = \pm\sqrt{A}} \leftarrow$$ Valor donde hay un máximo o un mínimo

¿ Vieron ? Dio lo que mismo que antes. Ahora sí puedo hacer la derivada segunda. ¿ Que para qué quiero la derivada segunda ? ¿ Quién preguntó ? Bueno, repito, porque quiero enseñarlos otro método para saber si tengo máximo o mínimo basándome en el signo de la derivada segunda. Si da positiva tengo un mínimo. Si da negativa tengo un máximo.
Es un método así. No voy a explicar de dónde sale. Creo que en la guía está.
Bueno, tenía que f' era: $f' = 2x - 2\,A^2x^{-3}$ ¿ Sí ?

Derivo otra vez y me queda: $f'' = 2 + 6\,A^2x^{-4}$ ¿ Sigo ?

Reemplazo por $x = \sqrt{A}$ y me fijo si da positivo ó negativo. Tonces:

$$f''\left(x = \sqrt{A}\right) = 2 + \frac{6A^2}{\left(\sqrt{A}\right)^4} \qquad \Rightarrow f''\left(\sqrt{A}\right) = 2 + \frac{6A^2}{A^2}$$

$$\Rightarrow \underline{f''\left(\sqrt{A}\right)=8}$$

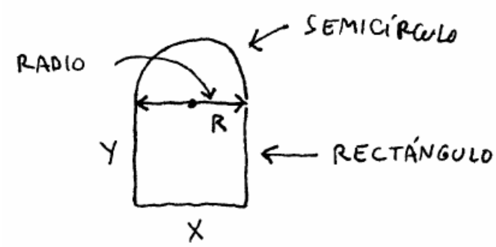
La derivada segunda dio <u>positiva</u>. ¿ Entonces qué tengo ? ¿ Un máximo o un mínimo ? Bueno, según el método tiene que ser un $\boxed{\text{mínimo}}$, ¿ Cierto ? Entonces... ¿ Qué verifiqué con esto ? Verifiqué que en $x = \sqrt{A}$ la función que me da la longitud de la diagonal tiene un <u>MÍNIMO</u>. Bien, ahora piensen. Este es el valor de <u>x</u> ¿ Cuál será el valor de <u>y</u> ? Bueno, la relación era x.y = A. Como $x = \sqrt{A}$ me queda: $y.\sqrt{A} = A \Rightarrow y = \sqrt{A}$

Es decir, el rectángulo de diagonal más corta es un cuadrado de lado $\sqrt{A}$.

Hagamos este otro.

Se quiere construir una ventana que tenga la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo cuyo perímetro sea 12 m. Hallar las dimensiones que debe tener la ventana si se quiere que deje pasar la mayor cantidad de luz posible.

Bueno. Lo más complicado de este ejercicio es el enunciado. ¿ Entienden lo que dice ? Fíjense. Dice que es un rectángulo con un semicírculo. Eso es así:



Esta es la forma que tiene la ventana. Ahora lo que tengo que hallar es el área de toda la cosa. La superficie total va a ser:

$$\text{SUPERFICIE} = \text{SUP}\,\square + \text{SUP}$$

La superficie del rectángulo es base por altura, es decir, x.y. La superficie del semicírculo es π por radio al ^{2} sobre 2.

$$\text{Entonces:} \quad sup = x.y + \frac{\pi\, r^2}{2}$$

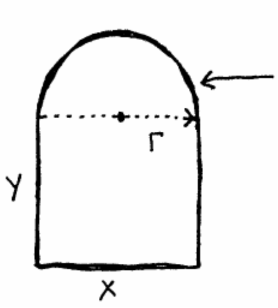
Bueno, hasta acá estamos. Tengo la superficie. Ahora tengo que poner todo en función de x. Veamos. ¿ El radio cuánto vale ? El radio es la mitad de <u>x</u> . ¿ Sí ?. O sea Radio = x / 2

$$S = x.y + \frac{\pi (x/2)^2}{2}$$

$$\text{Me queda:} \quad S = x.y + \frac{\pi (x/2)^2}{2}$$

$$\Rightarrow S = x.y + \frac{\pi}{8}.x^2$$

Bien. Ahora fíjense ¿ Cuánto vale y ? ¿ Tengo alguna manera de calcularla ? A ver, a ver. Dicen que el perímetro de toda la ventana tiene que ser 12. Hagamos un dibujito.



Esto es el perímetro de toda la ventana

El perímetro total de toda la cosa a va a ser:

Perímetro = Perím ⊔ + Perím ⌒

$\longrightarrow$ Per = (y + x + y) + (2 π r/2)

El radio es igual a x/2 y todo el perímetro vale 12. Entonces:

$$12 = 2y + x + \pi\frac{x}{2}$$

De acá puedo despejar y:

$$2y = 12 - x - \frac{\pi}{2}x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left(12 - x - \frac{\pi}{2}x\right)$$

Ahora reemplazo esto en la expresión de la superficie. Tenía:

$$S = x.y + \frac{\pi}{8}x^2 \quad e \quad y = 6 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x$$

$$\Rightarrow S = x\left(6 - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) + \frac{\pi}{8}x^2$$

Esto queda:

$$S = 6x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{8}x^2$$

$$\Rightarrow S = 6x - \frac{x^2}{2} - x^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Rightarrow S = 6x - \frac{x^2}{2} - x^2\frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \boxed{S = 6x - x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)}$$

Esta es la función que me da la superficie de la ventana. Ahora hay que entender lo que pide el enunciado. El enunciado dice: "que pase la mayor cantidad de luz posible" ¿ Qué significa esta frase ?
Rta: Significa que quieren que la superficie de la ventana sea máxima.
¿ Entonces ? Entonces tengo que buscar el máximo de esta función.

La derivo y la igualo a cero:

$$S' = \left[6x - x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right]'$$

$$\Rightarrow S' = 6 - 2x\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$$

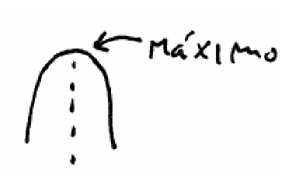
$$\text{Ahora: } S' = 0 \Rightarrow 6 - 2x\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 6 - x\left(1+\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 6 - x\left(\frac{4+\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x\left(\frac{4+\pi}{4}\right) = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{24}{4+\pi}} \leftarrow \text{Valor de x que hace máxima la superficie}$$

Bueno. Ahora bien ¿ Cómo verifico que en este valor tengo un máximo ?
¿Hago la derivada segunda ?
Rta: No. No hace falta. Fíjense que la función $6x - x^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$ es una parábola.
¿ Va para arriba o para abajo ?
Bueno, tiene que ir para abajo porque el término cuadrático es - . Es decir que tengo algo así:



Conclusión: La única posibilidad es que la función tenga un máximo. Reemplazando el valor de x que obtuve en FUNCION saco el valor de y. El par de valores x e y son los que hacen que la superficie de la ventana sea máxima, o lo que es lo mismo, hacen que la cantidad de luz que entra por la cosa sea la mayor posible. Eso es todo con este ejercicio y con el tema de derivadas.

FIN TEORIA DE DERIVADAS

Derivadas

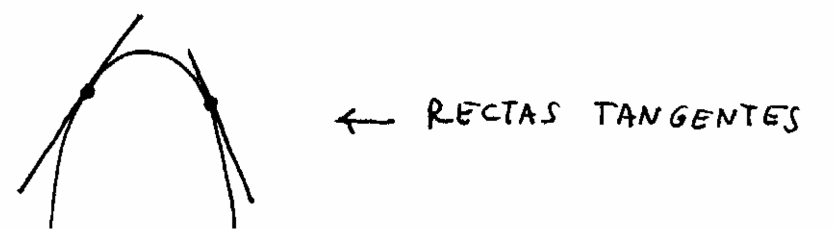
Ejercicios Sacados de Parciales

Recta Tangente

$y = mx_0 + b \rightarrow$ *se despeja "b"*

$\downarrow$

pendiente $f'(x) = m$



K MATEMATICA **Segundo Parcial** **TEMA 2**

APELLIDO: .... **NOMBRES:** .... **D.N.I:** ....

1	2	3	4	NOTA

CORRECTOR:

INSCRIPTO EN : SEDE: .... **DIAS:** ....

HORARIO: .... **AULA:** ......

NOTA 1er. PARCIAL:

PROMOCIONA	**RINDE FINAL**	**RECUPERA: 1ro-2do**	**INSUFICIENTE**

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

1. Sea $f(x)=x^3+3x^2-10x+2$. Hallar todos los puntos de gráfico de f donde la recta tangente tenga pendiente 14.

Ejercicio 1

Nos dicen que $f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x + 2$. Piden que calculemos los puntos donde la pendiente de la recta tangente 14. Pero... ¿ cómo se calcula la pendiente de la recta tangente ?
Rta: Sabemos que la pendiente de la recta tangente en un punto, es igual a la derivada de la función en ese punto. Entonces, lo primero que hay que hacer es encontrar f'(x). Para esto usamos que la derivada de x^n es $n.x^{n-1}$.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 10x + 2$$

$$f'(x) = 3.x^2 + 3.2.x - 10$$

Tengo que $f'(x) = 3x^2 + 3.2x - 10$. Igualo a 14 y averiguo x

$$3.x^2 + 3.2.x - 10 = 14$$

$$3.x^2 + 3.2.x - 10 - 14 = 0$$

$$3.x^2 + 3.2.x - 24 = 0$$

Uso la fórmula para calcular las raíces de una ecuación cuadrática

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4.3.(-24)}}{2.3}$$

$$x = \frac{-6 \pm 18}{6}$$

$$x = 2 \quad y \quad x = -4$$

<u>Rta:</u> Los puntos donde la pendiente de la recta tangente es 14 son:

(2 , 14) y (- 4 , 14).

2. Hallar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y mínimos relativos y las ecuaciones de las asíntotas verticales de la función $f(x) = \frac{x^2}{4x-3}$. Hacer un gráfico aproximado.

Ejercicio 2

Nos piden el estudio completo de la función $f(x) = \frac{x^2}{4x-3}$. Bueno, vamos por partes:

- Dominio:

Son todos los valores de x para los que podemos hacer la cuenta de f(x). Como no puedo dividir por cero tengo que pedir que $4x - 3 \neq 0$, o sea que $x \neq \frac{3}{4}$.

Así que $\mathbf{Dom} = \mathbf{IR} - \left\{ \frac{3}{4} \right\}$

- Asíntotas:

Hay que fijarse si hay asíntotas verticales y horizontales. Los candidatos a asíntotas verticales son los puntos que no están en el dominio. En este caso x = 3/4. Entonces, calculamos el límite de la función en ese punto.

$$\lim_{x \to 3/4} f(x) = \lim_{x \to 3/4} \frac{x^2}{4x-3} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 3/4 \text{ es una asíntota vertical}$$

Las asíntotas horizontales son más fáciles de calcular. Todo lo que hay que hacer es calcular el límite de f(x) en el infinito. Si nos da un número, es una A.H.:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{4x-3} = \infty \quad \Rightarrow \quad \text{no hay asíntota horizontal}$$

Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos tengo que derivar la función. Como hay una división uso la regla para derivar una división.

$$f'(x) = \frac{2x.\,(4x-3) - 4x^2}{(4x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2.\,4x^2 - 2.3x - 4x^2}{(4x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8x^2 - 4x^2 - 6x}{(4x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 6x}{(4x-3)^2}$$

Sabemos que la función crece cuando su derivada es positiva, y decrece cuando f'(x) es negativa. Entonces, tenemos que ver el signo de f'(x) en todo el dominio. Lo que hacemos es ver donde no existe o vale cero (puntos críticos). Esto pasa cuando el denominador es cero (x = 3/4). Igualo a cero f' y despejo x

$$\frac{4x^2 - 6x}{(4x-3)^2} = 0$$

$$4\,x^2 - 6\,x = 0\,.\,(4\,x - 3)^2 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 6x = 0$$

Uso la fórmula para calcular las raíces de una ecuación cuadrática:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6) - 4.4.0}}{2.4}$$

$x = \dfrac{6 \pm 6}{8}$ las soluciones son x = 3/2 y x = 0

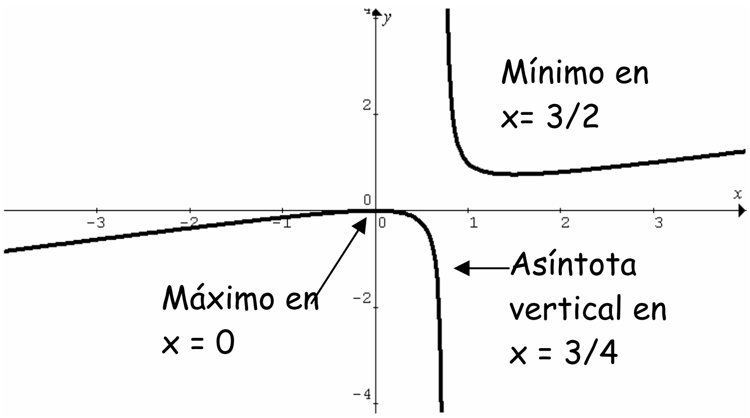
- <u>Intervalos de crecimiento y de decrecimiento</u>:
La función crece cuando f'(x) es positiva, y decrece cuando es negativa. Entonces, tenemos que ver el signo de f' en todo el dominio. Para eso, hay que ver donde se hacer cero y donde no existe (puntos críticos). Dividimos el dominio en intervalos y vemos el signo de f' en cada uno probando con un número.

x	(-∞.0)	(0,3/4)	(3/4,3/2)	(3/4, ∞)
f'(x)	+	-	-	+

Entonces, ya tenemos los intervalos de crecimiento y de decrecimiento:

Crec: (-∞ ; 0) ∪ (3/2 ; +∞) y Decr.: (0 ; 3/4) ∪ (3/4 ; 3/2)

Ya sabemos cuando crece y cuando decrece f(x). Buscamos los máximos y mínimos .
En x = 0, la función venía creciendo, y empieza a decrecer ⇒ x = 0 es un <u>máximo</u>
En x = 3/2, pasa al revés ⇒ x = 3/2 es un <u>mínimo</u> de la función. Con lo que calculamos tenemos que el gráfico aproximado es:



E MATEMATICA Segundo Parcial ASIMOV TEMA 3

APELLIDO: .... NOMBRES: .... D.N.I: ....

1	2	3	4	NOTA

INSCRIPTO EN : SEDE: .... DIAS: ....

HORARIO: .... AULA: .....

CORRECTOR:

NOTA 1er. PARCIAL:

PROMOCIONA	RINDE FINAL	RECUPERA: 1ro-2do	INSUFICIENTE

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

1. Sea $f(x)=\ln(4x^2+3x+a)$. Determinar el valor de $a\in\mathbb{R}$ de manera que la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x_0=-1$ tenga pendiente $-\frac{1}{2}$.

Tenemos la función $f(x) = \ln(4x^2 + 3x + a)$ y queremos la pendiente de la recta tangente. Para averiguar esto hay que saber dos cosas: la pendiente de la recta tangente en un punto, es igual a la derivada de la función en ese punto. O sea:
La pendiente de la recta tangente en $x = -1$ es $f'(-1)$

Primero calculo la derivada y después evalúo. Uso la regla de la cadena,

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2 + 3x + a} \cdot (4x^2 + 3x + a)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2 + 3x + a} \cdot (2.4x + 3) =$$

$$= \frac{(8x + 3)}{4x^2 + 3x + a}$$

Evalúo en x=-1

$$f'(x) = \frac{(8(-1) + 3)}{4(-1)^2 + 3(-1) + a}$$

$$f'(x) = \frac{(-5)}{1 + a}$$

Como me piden que la pendiente sea igual a $-1/2$ tengo que:

$$f'(-1) = -\tfrac{1}{2}$$

$$\frac{(-5)}{1 + a} = -1/2 \Rightarrow (-5) = -1/2.\,(1 + a)$$

$$5.2 = 1 + a \Rightarrow 10 - 1 = a$$

$$a = 9$$

RTA: a tiene que valer 9 para que la recta tangente sea igual a - 1/2 en x = -1

2. Sea $f(x)=xe^{1-8x^2}$. Hallar máximos y mínimos relativos e intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

Acá tenemos un ejercicio de estudio completo de una función. Parece ser un poco difícil, pero a no asustarse. La función que me dan es: $f(x) = x.\ e^{1-8x^2}$

- <u>Domino:</u> esta cuenta se puede hacer para cualquier x, por lo tanto no hay problemas. **Dominio =** $\mathbb{R}$
- <u>Asíntotas:</u> no existen asíntotas en esta función.

Para buscar los máximos y mínimos derivo la función e igualo a cero. Uso la regla de la derivada de un producto

$$f'(x) = 1.e^{1-8x^2} + (x.(e^{1-8x^2}))'$$

y ahora uso la regla de la cadena para derivar lo que esta entre paréntesis

$$f'(x) = 1.e^{1-8x^2} + x.(e^{1-8x^2}).\ (-8.2.x)$$

$$f'(x) = e^{1-8x^2} - x.(e^{1-8x^2}).\ (16.x)$$

$$f'(x) = e^{1-8x^2} - 16x^2.(e^{1-8x^2})$$

Igualo a cero y despejo

$$e^{1-8x^2} - 16x^2.(e^{1-8x^2}) = 0$$

Saco factor común e^{1-8x^2}

$$e^{1-8x^2}\ .\ (1- 16x^2) = 0$$

Y como e^{1-8x^2} no vale nunca cero, para que esa multiplicación dé cero, lo otro tiene que ser cero. Entonces:

$$1 - 16x^2 = 0$$

$$1 = 16x^2 \longrightarrow 1/16 = x^2$$

$$|x| = \sqrt{1/16} \longrightarrow |x| = 1/4$$

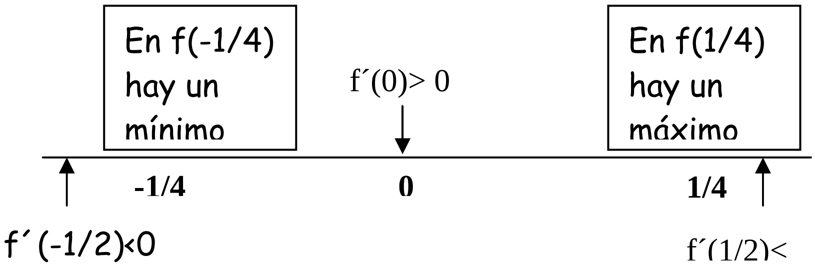
Los puntos críticos son

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4} \\ x_2 = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Como también tengo que calcular los intervalos de crecimiento y de decrecimiento. Me conviene usar el criterio de la primera derivada. Calculo la derivada en los puntos a la derecha y a la izquierda de los puntos críticos

x	(-∞.-1/4)	(-1/4,1/4)	(1/4, ∞)
f'(x)	-	+	-

Por el criterio de la primer derivada x = 1/4 es máximo y x = - 1/4 es mínimo.



<u>Rta:</u> El máximo se encuentra en x = 1/4 y el mínimo en x =- 1/4. Los intervalos de decrecimiento son (-∞ ; -1/4) y (1/4 ; +∞). El intervalo de crecimiento es (-1/4 ; 1/4)

B MATEMATICA Segundo Parcial ASIMOV TEMA 4

APELLIDO:...................NOMBRES:......................D.N.I:.................

1	2	3	4	NOTA

CORRECTOR:

INSCRIPTO EN : SEDE:........DIAS:.........

HORARIO:.........AULA:.....

NOTA 1er. PARCIAL:

PROMOCIONA	RINDE FINAL	RECUPERA: 1ro-2do	INSUFICIENTE

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

1. Sea $f(x)=e^{-x^3-3x^2+9x}$. Hallar todos los puntos del gráfico de f en los cuales la recta tangente es paralela al eje x.

Si la recta tangente es paralela al eje x entonces va a tener pendiente igual a cero. Como la derivada evaluada en un punto es la pendiente de la recta tangente en ese punto, calculo la derivada e igualo a cero

$$f'(x) = \left(e^{-x^3-3x^2+9x}\right)'$$

Uso la regla de la cadena

$$= e^{-x^3-3x^2+9x}.\left(-x^3-3x^2+9x\right)'$$

Derivo – x^3 – $3x^2$+ 9x. Esta deriva da: $-3x^2$ – 6 x+ x . Entonces

$$f'(x) = e^{-x^3-3x^2+9x}.\left(-3x^2-6x+9\right)$$

Busco x que cumpla que

$$e^{-x^3-3x^2+9x}.\left(-3x^2-6x+9\right)=0$$

En Nro <u>e</u> elevado a cualquier cosa nunca da cero. Entonces para que la multiplicación sea cero, el paréntesis tiene que valer cero. O sea:

$$-3\,x^2 - 6\,x + x = 0$$

Busco las raíces

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4.(-3).9}}{2.(-3)} = \frac{6 \pm \sqrt{144}}{-6}$$

las raíces son x = -3 y x = 1

<u>Rta</u>: los puntos donde la tangente es paralela al eje x son 1 y –3

---

2. Sea $f(x) = x + \frac{25}{x+4}$. Hallar dominio, ecuaciones de asíntotas, máximos y mínimos relativos, intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f. Con la información obtenida hacer un gráfico aproximado de f.

La función a la cual tenemos que hacer el estudio completo es: $f(x) = x + \dfrac{25}{(x+4)}$

- <u>Dominio:</u>
En el dominio no van a estar aquellos puntos donde (x + 4) = 0. Entonces necesito que x + 4 ≠ 0. Y el dominio me queda $Dom = IR - \{-4\}$

- <u>Asíntotas :</u>
En x = - 4 tengo una asíntota vertical.

- <u>Máximos y mínimos:</u> Ahora busco los máximos y mínimos viendo donde la derivada se anula,

$$f'(x) = 1 + \frac{0.(x+4) - 25.\,1}{(x+4)^2}$$

Usé la regla de la derivada de la división

$$f'(x) = 1 - \frac{25}{(x+4)^2}$$

Busquemos los puntos donde la derivada no existe o vale cero:

- Cuando la derivada no existe: el denominador es 0, esto ocurre en x = - 4
- Cuando la derivada se anula:

$$1 - \frac{25}{(x+4)^2} = 0 \longrightarrow 1 = \frac{25}{(x+4)^2}$$

$$1.\,(x+4)^2 = 25 \longrightarrow |x+4| = \sqrt{25} \longrightarrow |(x+4)| = 5$$

Saco el módulo y queda

$$x + 4 = 5 \Rightarrow x = 5 - 4$$

$\Rightarrow$ X = 1

x + 4 = - 5 $\Rightarrow$ x = - 5 - 4

$\Rightarrow$ X = - 9

Ya tengo los puntos críticos, dividimos el dominio en intervalos. En cada intervalo, podemos calcular el signo de f'(x) probando para algún valor.

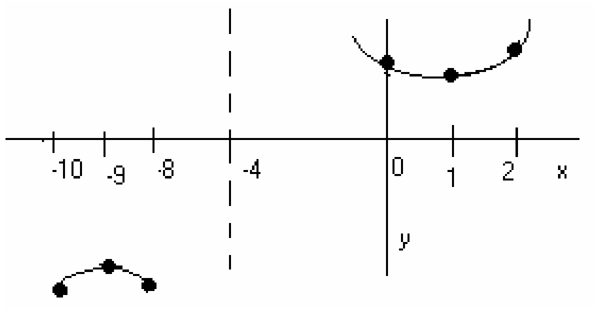
x	(-∞.-9)	(-9,-4)	(-4,1)	(1, ∞)
f'(x)	+	-	-	+

Donde f' (x) es positiva, la función crece $\Rightarrow$ Int. Crec. = (-∞ , - 9) ∪ (1 , ∞)

Y donde es negativa, la función decrece $\Rightarrow$ Int. Decrec. =(- 9 ,- 4) ∪ (- 4 , 1)

Ojo: - 4 no puede ser nunca ni un máximo ni un mínimo porque ahí la función no existe.

Y el gráfico aproximado me queda



---

1. Sea $f(x) = (\frac{k}{x} + 5x).ln(\frac{1}{4}x)$. Hallar el valor real de k para que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en $x_0 = 4$ sea 3.

Para poder encontrar el valor de k, lo primero que debemos hacer es buscar la derivada de la función. Vamos a tener que usar propiedades de la derivada para poder hacerlo: primero acordate que la derivada de una multiplicación es

f(x) . g(x) f(x)´ g(x) + f(x) . g(x)´ .

Y también tenemos que acordarnos de la regla de la cadena. Derivemos:

$$f(x) = \left(\frac{k}{x} + 5x\right)\ln\left(\frac{1}{4}x\right) \quad \Rightarrow \quad f(x)' = \left(\frac{k}{x} + 5x\right)'\ln\left(\frac{1}{4}x\right) + \left(\frac{k}{x} + 5x\right)\left(\ln\left(\frac{1}{4}x\right)\right)'$$

$$f(x)' = \left(-\frac{k}{x^2} + 5\right)\ln\left(\frac{1}{4}x\right) + \frac{\left(\frac{k}{x} + 5x\right)}{\frac{1}{4}x}\frac{1}{4}$$

Simplificando este choclazo horrible, nos queda:

$$\boxed{f(x)' = \left(-\frac{k}{x^2}+5\right)\ln\frac{1}{4}x + \frac{\left(\frac{k}{x}+5x\right)}{x}}$$

Ahora, nos dicen que "la pendiente de la recta tangente en x = 4 sea 3". Esto significa que si evaluamos la derivada en x = 4, nos tiene que dar 3 (es decir, f´(4) = 3) Sabiendo esto podemos despejar k:

$$f(4)' = \left(-\frac{k}{16}+5\right)\ln 1 + \left(\frac{k/4+20}{4}\right) = 3$$

Como el logaritmo de 1 es cero, todo el primer término desaparece y la cosa se simplifica. Despejemos el valor de k y terminemos este ejercicio...

$$f(4)' = 3 = \frac{k/4+20}{4}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\mathbf{k=-32}}$ $\leftarrow$ Este es el valor de k que hace que la derivada de f(x) en x = 4 sea 3

---

2. Hallar: dominio, ecuaciones de las asíntotas, máximos y mínimos relativos intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función: $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{12}{x} + 2$. Con la información obtenida, graficar aproximadamente

---

Nos dan la función $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{12}{x} + 2$ y nos piden que hagamos un análisis completo de la función (yo voy a hacer un poquito más de lo que piden así practicamos).

- <u>Dominio</u>.

Tenemos que fijarnos si existe algún valor de x en donde la función tenga problemas... fijate que si x = 0 el segundo término de la ecuación nos queda 12/0 y eso no puede ser. Por lo tanto x = 0 no pertenece al dominio.

$\Rightarrow$ **Dom f(x)** = $\Re - \{0\}$

- *<u>Asíntotas.</u>*

Primero veamos las AV: los valores de x que no pertenecen al dominio de la función son muy buenos candidatos para ser AV. Fijémosnos qué pasa con el límite de x tendiendo a cero:

$$\text{Lim}_{x\to 0}\ \frac{1}{3}x + \frac{12}{x} + 2 = \infty$$

$$\frac{1}{3}x + \frac{12}{x} + 2 = \infty \qquad \Rightarrow$$ Por lo tanto **x = 0 es AV.**

Tiende a cero   tiende a infinito

Ahora, miremos qué pasa cuando x tiende a infinito:

$\text{Lim}_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad \Rightarrow$ **No existe AH**

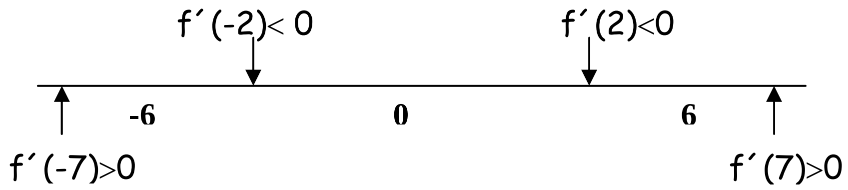
- <u>Máximos y mínimos</u>. Para encontrarlos tenemos que buscar los puntos críticos de la función ¿Cómo se hace eso?, Fácil, tenemos que ver cuándo la derivada de la función vale cero o no existe. Pero para eso, primero tenemos que saber cuál es la derivada. Busquemos f(x)´:

$$f(x)' = \frac{1}{3} - \frac{12}{x^2}$$

Fijate que la igual que f(x), f´(x) no está definida en x = 0 (no se puede dividir por cero!), esto significa que x = 0 es un punto crítico. Busquemos ahora cuándo la derivada se hace 0 (que son los posibles máximos y mínimos de nuestra función).

$$f(x)' = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3} - \frac{12}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{12}{x^2} \Rightarrow \mathbf{|x| = 6}$$

Esto significa que en **x=6 y x=-6 tenemos 2 puntos críticos**. Para saber si son máximos o mínimos nos fijamos cuánto vale la derivada entre estos valores:



Las flechitas indican el sentido de crecimiento de la función. Cuando apuntan para arriba, significa que f(x) crece y cuando lo hacen para abajo, que decrece.

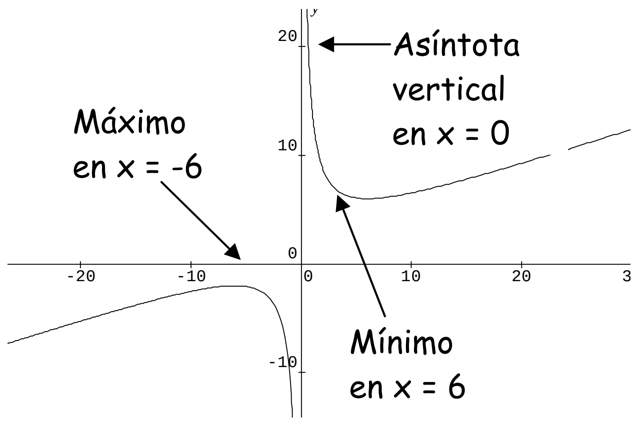
Podemos ver que a la izquierda de –6 la función crece, y a la derecha decrece $\Rightarrow$ **-6 es un máximo.** Lo contrario ocurre en 6: decrece a la izquierda y crece a la derecha $\Rightarrow$ **6 es un mínimo**.

Los intervalos nos quedan:

Crec = (-∞,-6) ∪ (6,+∞)

y Decrec = (-6,0) ∪ (0,6)

Ahora con toda esta información podemos <u>graficar</u> (aproximadamente) la función que nos dieron. Es algo así:



L. MATEMATICA Segundo Parcial TEMA 1

APELLIDO: [redacted] ..... NOMBRES: [redacted] Gisela ...... D.N.I: 31.794.715 .....

NOTA 1 2 3 4 — INSCRIPTO EN : SEDE: Avellan.. DIAS: Miérc. y Sáb.

CORRECTOR: — HORARIO: 7 a 10 hs ... AULA: 8 ...

NOTA 1er. PARCIAL: 4 (cuatro)

PROMOCIONA	FINAL	RECUPERA 1RO	RECUPERA 2DO
	X		

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

1. Sea $f(x)=\ln(10+ax^3)$. Hallar $a\in\mathbb{R}$ de manera que la pendiente de la recta tangente al gráfico de f en el punto de abscisa $x_0=1$ sea $m=-2$.

Nos piden que busquemos el valor de la constante a para que la recta tangente en x = 1 tenga pendiente igual a –2 (es decir, f´(1) = -2). Para hacerlo tenemos que encontrar primero la derivada de la función. Usamos la regla de la cadena:

$$f(x)=\ln\left(10+ax^3\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{3ax^2}{10+ax^3}$$

Una vez que tenemos la derivada, y como nos piden que busquemos el valor de a que haga que f´(1) = - 2, podemos plantear:

$$f'(1)=\frac{3a1^2}{10+a1^3} \quad \Rightarrow \quad f'(1)=-2=\frac{3a}{10+a}$$

$$-2(10+a)=3a \Rightarrow -20-2a=3a \quad \Rightarrow -20=5a \Rightarrow$$

Ahora, simplemente despejamos el valor de a: $\boxed{a = -4}$

Y eso es todo lo que nos pedían.

INTEGRALES

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Teoría y ejemplos

<u>Todo</u> el tema "integrales" <u>explicado</u> con ejercicios de la guía y de parciales

1) <u>Integrales indefinidas</u>

a) Integrales inmediatas por tabla

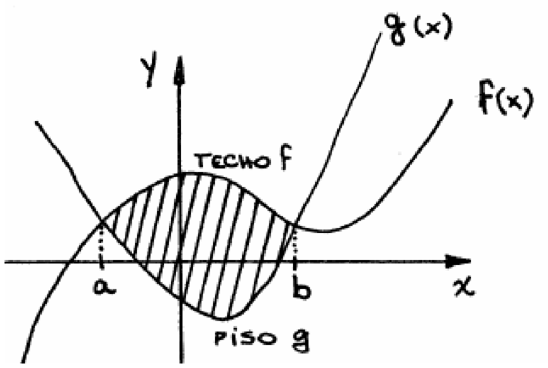
b) Método de integración por sustitución

c) Método de integración por partes

2) <u>Integrales definidas</u>

a) Regla de Barrow

3) <u>Cálculo de áreas</u>

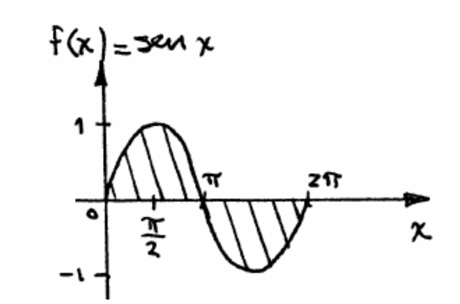


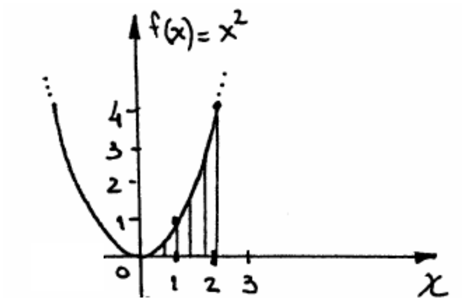
$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

TECHO PISO

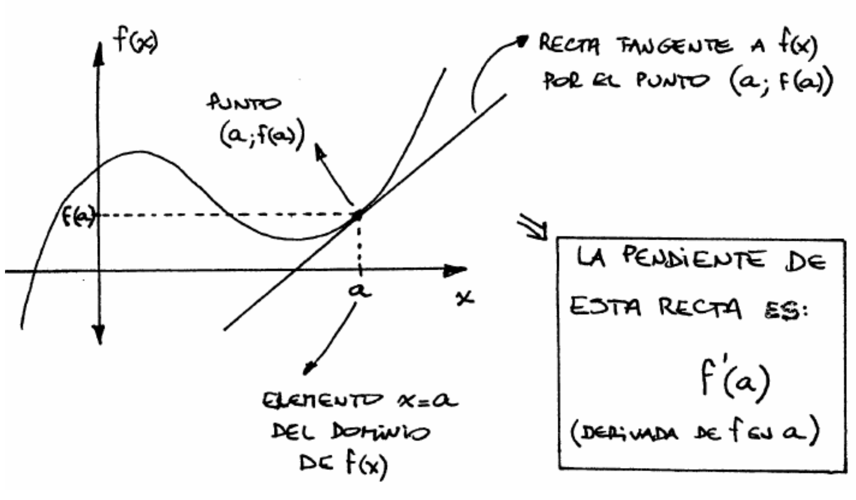
INTEGRALES - TEORÍA Y EJEMPLOS

Este el último tema de esta materia. Aprender esto te va a ayudar a calcular áreas de figuras o areas bajo curvas. Algunas ya las conocés. Por ejemplo, un rectángulo que tiene superficie = Base x altura. Otras áreas son más difíciles de calcular, como por ejemplo :





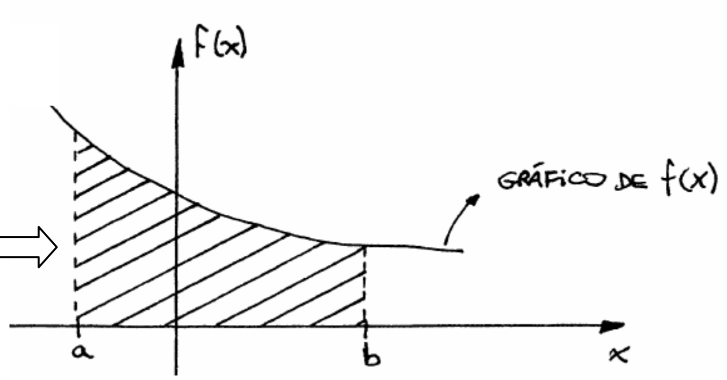
La derivada de una función en un punto x = a del dominio es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto del plano (a; f(a)). Este dibujito que hago ahora es gráfico que habíamos hecho para mostrar la recta tangente a una función en un punto. (O sea, la derivada de f(x) en x = a).



La integral de una función también tiene un significado geométrico. La integral de una función va a ser el área que encierra el gráfico de la función. Hay una relación entre derivar e integrar que les voy a explicar después

Veamos un gráfico para ver qué quiere decir "la integral de la función f(x) en el intervalo [a; b] ". Miren bien esto, che :

AREA ENCERRADA
BAJO LA CURVA

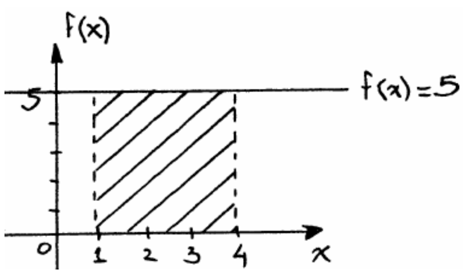


Lo ponemos así :

$$\int_a^b f(x)\,dx =$$ El área sombreada está marcada por los bordes x = a, x = b, el eje equis y la curva de la función f de equis

Mientras la función f(x) sea positiva la integral representará el valor del área encerrada entre esos 4 bordes.

<u>Por ejemplo</u>: Supongamos que f(x) = 5 (Recta constante = 5). La Integral entre a = 1 y b = 4 quedaría:



ACÁ LOS BORDES SON
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \\ y = 0 \\ f(x) = 5 \end{cases}$$

Se escribiría $\int_1^4 5\,dx$ y se lee "la integral entre 1 y 4 de la función f(x) = 5 ".

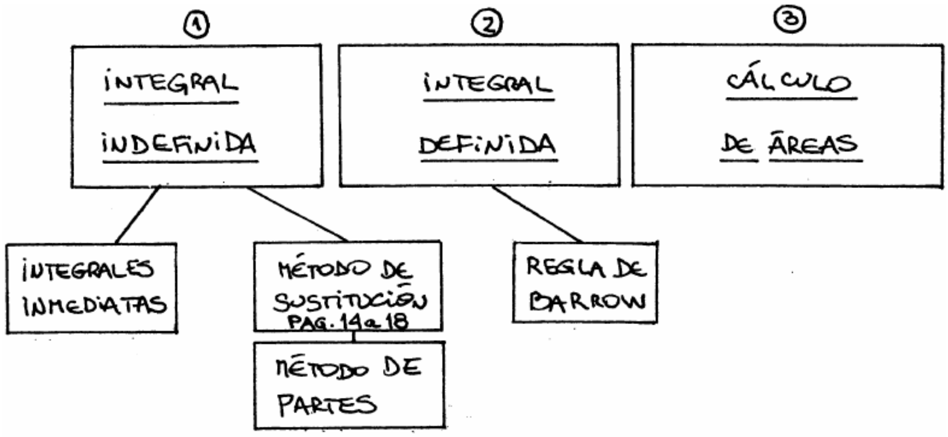
En este caso el área de la región sombreada es un rectángulo de base 3 y altura 5 ➔

$$\text{ÁREA} = b.h = 3.5 = 15$$

$$\Rightarrow \int_1^4 5\,dx = 15$$

Calculé el área con la fórmula base x altura. Pero no siempre va a ser fácil calcular el área encerrada por la función. Vamos a generalizar el cálculo de áreas a través de las integrales. Entonces vamos a definir las integrales

Empecemos. Este proceso de tres etapas formado por:



Entonces vamos a la primera etapa: la integral indefinida y los métodos de integración. Ahora presten atención porque esto lo tienen que saber bien .

---

1 - INTEGRAL INDEFINIDA

<u>Definición:</u> Dada una función f(x) vamos a llamar <u>primitiva</u> de f(x) a cualquier función g(x) con la siguiente propiedad:

$$g'(x) = f(x)$$

Es decir que si derivamos la g(x), obtenemos la función original f(x).
<u>Por ejemplo</u>:

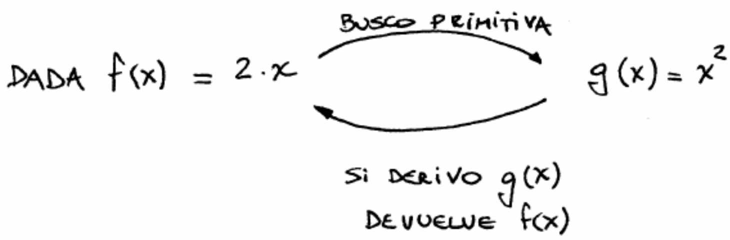
Dada $\qquad f(x) = 2\,x \rightarrow$ Una primitiva de f es $g(x) = x^2$

porque $\qquad \underbrace{(x^2)'}_{g'(x)} \underset{=}{=} \underbrace{2.x}_{f(x)}$

También, dada $\quad f(x) = \cos x \rightarrow$ Una primitiva de f(x) es $g(x) = \operatorname{sen} x$

porque $\qquad \underbrace{(\operatorname{sen} x)'}_{g'(x)} \underset{=}{=} \underbrace{\cos x}_{f(x)}$

¿ Está claro ? ¿ Lo ven ? Supongo que ya habrán escuchado por ahí que <u>buscar una primitiva de una función f(x) es lo contrario que derivar</u>.
O sea:



O TAMBIÉN : DADA $f(x) = \cos x$ $\xrightarrow{\text{BUSCO PRIMITIVA}}$ $g(x) = \text{sen } x$

DERIVANDO $g(x)$ OBTENGO $f(x)$

Entonces: Buscar una primitiva de una función f(x) es buscar otra función g(x) tal que si la derivo obtengo la original f(x): $g'(x) = f(x)$

Ahora… ¿Qué pasa si alguien nos dice que $g(x) = x^2 + 12$ es una primitiva de $f(x) = 2x$? ¿ Tiene o no razón ? Veamos:

$$\underbrace{g(x)}\text{ es primitiva de }\underbrace{f(x)} \Leftrightarrow g'(x) = f(x)$$

$$x^2 + 12 \text{ es primitiva de } 2x \Leftrightarrow \underbrace{\left(x^2 + 12\right)'}_{2.x + 0 = 2.x} = 2.x$$

¡Es cierto!

→ Tiene razón… ¿ Y si nos dice que $x^2 + 7$ es una primitiva de 2x ? Podés verificar, derivando (x^2+7) que también cumple.

⇒ EN GENERAL : $g(x) = x^2 + \overbrace{\text{CONSTANTE}}^{\text{CUALQUIER NÚMERO REAL}}$ ES PRIMITIVA DE

$f(x) = 2x$ PUES $\underbrace{g'(x)} = f(x)$

$$\left(x^2 + \text{CONSTANTE}\right)' = 2.x$$

$$2.x + 0 = 2x \quad \text{VALE} \checkmark$$

<u>Entonces: Cada función f(x) que nos den tiene infinitas primitivas, tantas como constantes diferentes se nos ocurra sumarles</u>

Para abarcar <u>todas</u> esas respuestas podemos poner una constante C que se llama constante de integración.

<u>PRIMITIVAS DE</u> $f(x) = 2.x$ <u>son</u> $g(x) = x^2 + C$ con $\underbrace{c \in \Re}_{\text{Cualquier real}}$

<u>PRIMITIVAS DE</u> $f(x) = \cos x$ <u>son</u> $g(x)= \text{sen } x + C$ con $\overbrace{c \in \Re}$

⟶ Si buscar primitivas es lo contrario que derivar, acá surge otra diferencia entre buscar primitivas y derivadas porque derivada de una función <u>HAY UNA SOLA</u>. Pero primitivas de una función <u>HAY INFINITAS</u>

En nuestro caso:

SI $f(x) = 2x \Rightarrow$ INFINITAS PRIMITIVAS: $g(x) = x^2 + C$ ← (TANTAS COMO CONSTANTES DISTINTAS LE SUME.)

PERO SI DERIVO $g(x)$: $g'(x) = (x^2+c)' = \underbrace{2x}_{\text{UNA SOLA!}}$

Ya estás en condiciones de hacer los primeros ejercicios de la guía de trabajos prácticos.

Vamos a un ejemplo: hallar una $g(x)$ tal que $g'(x) = 3$

Tengo $g'(x) = 3$ y busco una $g(x)$ tal que su derivada sea $g'(x) = 3$, busco una primitiva de "3", una antiderivada.

$$\text{TENGO: } g'(x) = 3 \underset{\text{PUES DERIVANDO}}{\overset{\text{BUSCO PRIMITIVA}}{\rightleftarrows}} g(x) = ?$$

$\searrow$ $g(x) = 3.x$

¿DE ACUERDO?

VERIFICO: $\underbrace{(3x)'}_{(g(x))'} = 3.x' = 3.1 = 3$ ✓

$(g(x))' = \ \ldots \ = 3$

Pero sabemos que $\boxed{g(x) = 3 + C}$ con $c \in \Re$ también cumple que: $g'(x) = 3$ ya que cualquier constante que sume o reste, desaparece al derivar.

Vamos a este otro ejemplo :

¿ Cuál es la función $g(x)$ tal que su derivada es $g'(x) = x^2$?

COMO $g'(x) = x^2 \Rightarrow$ SU PRIMITIVA $g(x) = \frac{1}{3} . x^3$

YA QUE SI DERIVO $\left(\frac{1}{3}.x^3\right)' = \frac{1}{3}.(x^3)' = \cancel{\frac{1}{3}}.\cancel{3}.x^2 = x^2 = g'(x)$

Y como sumando cualquier constante sigue valiendo ➔

Primitivas de $g'(x) = x^2$ son $g(x) = 1/3.x^3 + C$

Definamos ahora la Integral indefinida de una función:

INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN f(x)

$\int f(x)\,dx = g(x)$ si ocurre que $g'(x) = f(x)$

↳ Se lee: "La integral de f(x) es g(x)"

O sea, integrar f(x) es hallar una g(x) tal que g'(x) = f(x)

Entonces aprendete bien que las siguientes frases:

LA INTEGRAL INDEFINIDA DE LA FUNCIÓN $f(x)$

$\int f(x)\,dx$

EL CONJUNTO DE TODAS LAS PRIMITIVAS DE $f(x)$

TODAS LAS FUNCIONES $g(x)$ TALES QUE $g'(x) = f(x)$

¡¡ Son todas la misma frase !!

Vamos a este ejercicio: Calcular las siguientes integrales

$$\Rightarrow i)\ \underbrace{\int x^2\,dx} = \frac{1}{3}\cdot x^3 + C \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{1}{3}\cdot x^3 + c\right)' = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\cdot x^{3-1} + \underset{c'}{0} = x^2$$

La integral de x^2 es $1/3.x^3 + C$ porque si derivo esta respuesta, obtengo la x^2 original" como cuando buscábamos primitivas… Ya que "integrar" es buscar primitivas.

$$iii)\ \int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}\,dx \underset{\text{INTEGRO}}{=} \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c =$$

$$\sqrt{x} = x^{1/2}$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \underbrace{\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}} + c} \qquad c \in \mathbb{R}$$

PARA VERIFICAR, SI DERIVO $\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} + c$ DARÁ $\overbrace{\sqrt{x}}^{x^{\frac{1}{2}}}$

(FIJATE !)

PROPIEDADES:

a) $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

O sea, la integral de una suma / resta es la suma / resta de las integrales.

Por ejemplo, resolver: $\int 2x + x^5\ dx = \int 2x\ dx \pm \int x^5\ dx$

POR LA PROPIEDAD

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$= \underbrace{x^2 + C_1}_{\text{PRIMITIVA DE } 2x} + \underbrace{\frac{1}{6} \cdot x^6 + C_2}_{\text{PRIMITIVA DE } x^5} = x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^6 + C$$

VALE PONER LAS CONSTANTES DE CADA INTEGRACIÓN EN UNA SOLA CONSTANTE $C \in \mathbb{R}$

FIJATE SI DERIVANDO $x^2 + \frac{1}{6} \cdot x^6 + C$ OBTENÉS LA "ORIGINAL" $2x + x^5$

(ASÍ ESTÁS <u>SEGURO</u> DE HABER INTEGRADO BIEN!)

<u>Otra propiedad:</u>

b) $\int k.g(x)\ dx = k. \int f(x)\ dx$ <u>si $k \in \Re$</u>

O SEA, VALE "APARTAR" LAS CONSTANTES QUE MULTIPLICAN.

POR EJEMPLO:

PROPIEDAD

$C_1 \in \mathbb{R}$

$$\int 3 \cdot \cos x\ dx = 3 \cdot \underbrace{\int \cos x\ dx}_{\text{ESTA PRIMITIVA YA LA BUSCAMOS!}} = 3 \cdot (\operatorname{sen} x + C_1) =$$

DISTRIBUTIVA

LA LLAMO C

$$= 3 \cdot \operatorname{sen} x + \underbrace{3 \cdot C_1}_{\text{CONSTANTE!}} = 3 \cdot \operatorname{sen} x + C$$

CUYA DERIVADA, PARA VERIFICAR, DA: $3 \cdot \cos x$ ¡LA ORIGINAL!

Las propiedades de las integrales son muy parecidas a las de las derivadas. Eso es porque al integrar uno hace "la operación contraria" que al derivar.

Ejercicio calcular la integral:

AHORA "SACO EL 3" POR PROP. b

$$\int \frac{1}{x} + 3x - e^x\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx + \int 3x\ dx - \int e^x\ dx =$$

PROPIEDAD a

$$= \underbrace{\int \frac{1}{x}\,dx}_{\substack{\text{ACORDATE QUE} \\ (\ln x)' = \frac{1}{x}}} + 3.\underbrace{\int x\,dx}_{\substack{\text{ACORDATE QUE} \\ (\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}.x = x}} - \int e^x \underset{\text{INTEGRO CADA TÉRMINO}}{=} \ln|x| + 3.\frac{1}{2}.x^2 - e^x + C$$

CON $C \in \mathbb{R}$

Y fijate que si derivás el resultado te dará la función original

Con todo lo visto hasta ahora podemos construirnos la siguiente tabla de integrales (o primitivas, o antiderivadas)

f(x)	∫ f(x) dx
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{1}{n+1}.x^{n+1} + C$
x^{-1}	$\ln\|x\|+C$
e^x	e^x+C
Sen x	-cos x + C
Cos x	Sen x + C
$\frac{1}{\cos^2 x}$	Tang x + C
f(x) + g(x)	∫f(x) dx +∫g(x) dx
k. f(x)	k. ∫f(x) dx

Los resultados de esta tabla se suelen llamar <u>Integrales inmediatas</u>

Hay otros ejercicios más difíciles para las cuales hay que aprender dos métodos que ayudan a resolverlos.

<u>MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN</u>

Se basa en una aplicación de la regla de la cadena para derivada de funciones compuestas, pero la explicación prefiero hacerla sobre un ejemplo:

$\int \text{sen}(3x)\,dx =$ OJO ! ESTO <u>NO</u> DA: $-\cos(3x)$ YA QUE SI DERIVAMOS ESTA COMPOSICIÓN QUEDA :

EL SIGNO ESTABA. $-\underbrace{3}_{\text{DERIVADA DE 3X}}\underbrace{(\text{sen}(3x))}_{\substack{\text{DER. DE COS X} \\ \text{EVALUADA EN 3X.}}}$ ¡QUE <u>NO</u> ES LA ORIGINAL SEN (3X) !

La idea de este método fue buena porque estamos cerca de $\int \text{sen}\,x\,dx$.

Esta integral está en la tabla. Propongo hacer una sustitución (Y de allí el nombre de " Método de sustitución "). Hago : u = 3x. Fijensé :

$$\text{“}u = 3x\text{”}$$

DERIVO COMO SI u FUERA LA VARIABLE — DERIVO COMO SI x FUERA LA VARIABLE

$$1 . du = 3 . dx$$

DESPEJO dx

$$dx = \frac{du}{3}$$

Con el reemplazo el asunto queda:

$$\int \underbrace{sen(3x)}_{u}\, \overbrace{dx}^{\frac{du}{3}} = \int sen\, u \,.\, \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\int sen\, u \; du}_{\text{¡ESTA SÍ ES INMEDIATA!}} =$$

LO SACO POR PROP. b

(ESTÁ EN TABLA)

$$= \frac{1}{3} \cdot (-\cos u) + c \;=\; -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x) + c$$

COMO $u = 3x$

DERIVALO Y FIJATE QUE DARÁ LA "ORIGINAL": $sen\,(3x)$

$\boxed{\text{HAY QUE VOLVER A LA VARIABLE ORIGINAL } (x) \text{ SIEMPRE!}}$

Otro ejercicio: Hallar la Integral $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$

SUSTITUYO $u = x^2 + 1$

DERIVO CON u — DERIVO CON x

$$1\, du = 2 . x . dx \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{2x} = dx \quad (*)$$

Reemplazo en la integral original:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \int \frac{\cancel{x}}{u} \cdot \frac{du}{2\cancel{x}} = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\int \frac{1}{u}\, du}_{\text{ESTA ES INMEDIATA}}$$

POR (*)

SUSTITUYO $u = x^2+1$

SACO ESTA CONSTANTE POR PROP. b

$$= \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\ln|u|}_{\text{PUES } (\ln|u|)' = \frac{1}{u}} + C = \boxed{\frac{1}{2}\cdot \ln|x^2+1| + C}$$

VUELVO SIEMPRE A LA VARIABLE x

Y SI DERIVÁS ESTO TE DARÁ LA "ORIGINAL" $\frac{x}{x^2+1}$

Atención: Si al hacer una sustitución no se reemplaza o simplifica toda la variable "x" y aparece sólo la nueva variable "u"... ¡¡¡ No sirve !!!
¡ Jamás, después de hacer una sustitución pueden quedar conviviendo la vieja variable con la nueva ! Si eso te ocurre es porque están usando mal el método o porque este método no servía para este ejercicio.

Otro: Resolver la Integral: $\int x^{-1}\cdot \ln x \; dx$

$$\int x^{-1}\cdot \ln x \; dx = \int \frac{1}{x}\cdot \ln x \; dx \Rightarrow \text{SUSTITUYO:}$$

$x^{-1} = \frac{1}{x}$

"$u = \ln x$" DERIVO

$1\cdot du = \frac{1}{x}\cdot dx$ DERIVO $\Rightarrow$ DESPEJO $dx \overset{(*)}{=} x \cdot du$

SUSTITUYO

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x}\cdot \ln x \; dx = \int \frac{1}{\cancel{x}}\cdot u \cdot \cancel{x}\cdot du = \underbrace{\int u \cdot du}_{\text{INMEDIATA}} = \frac{1}{2}\cdot u^2 + C =$$

POR (*)

INMEDIATA ! : $\int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 + C$

$$= \frac{1}{2}(\overbrace{\ln x}^{u})^2 + C = \boxed{\frac{1}{2}\ln^2 x + C}$$

VUELVO A LA VARIABLE x

¿ Estamos ? ➔ En breve, el método de sustitución consiste en:

1) Proponer la sustitución u = algo con x
2) Derivando a ambos lados, despejar dx = algo con du
3) Reemplazar en el enunciado lo de 1 y 2 rezando para que desaparezca todo lo que tenía "x" y sólo aparezcan términos con la nueva variable "u" (Si no lo lográs, intentá otro camino PERO NO SIGAS)

4) Resolver la nueva integral con "u"
5) A la primitiva ya hallada, volver a poner lo que corresponda con "x" donde decía "u" (según sustitución del punto 1)

No todo ejercicio sale con este método, por eso también tenés que saber el método de integración por partes. Vamos.

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES:

Este método está basado en la propiedad de la derivada de un producto entre funciones. Sirve para hallar integrales de un producto. Dice:

$$\boxed{\int u'.v \, dx = u.v - \int u.v' \, dx}$$

Es decir que la integral del producto u'.v si bien no la resuelvo en un paso, la cambio por

$$u.v - \int u.v' \, dx$$

Esperando que la nueva integral que se formó sí sea fácil así la puedo resolver un paso más adelante. Miren este ejemplo:

Resolver la integral : $\int x \, . \cos x \, dx$

POR FÓRMULA (*):

$$\int \underbrace{x}_{\substack{\text{ELIJO } v = x \\ \Rightarrow v' = 1}} . \underbrace{\cos x}_{\substack{\text{ELIJO } u' = \cos x \\ \Rightarrow u = \text{sen}\, x}} \, dx = \overbrace{\text{sen}\, x}^{u} . \overbrace{x}^{v} - \int \overbrace{\text{sen}\, x}^{u} . \overbrace{1}^{v'} dx =$$

DERIVO!

INTEGRO!

$$= \underbrace{x . \text{sen}\, x}_{\text{ESTO YA NO SE TOCA}} - \underbrace{\int \text{sen}\, x \, dx}_{\substack{\text{ESTA ES INMEDIATA} \\ \text{(ESTÁ EN TABLA)}}} = x . \text{sen}\, x - (-\cos x + c_1) =$$

$\int \text{sen}\, x \, dx = -\cos x + c$

$$= x . \text{sen}\, x + \cos x + c$$

SI DERIVÁS, PARA VERIFICAR, TE DARÁ "LA ORIGINAL": x.cos x

Lo complicado en estos ejercicios es saber elegir quién hace de v y quién hace de u'. Practiquemos a ver si le encontramos la lógica:

Resolver la integral : $\int x^2 . \text{sen } x \; dx$

POR FÓRMULA (*)

$$\int x^2 . \text{sen } x \; dx = \overbrace{-\cos x}^{u} . \overbrace{x^2}^{v} - \int \overbrace{-\cos x}^{u} . \overbrace{2x}^{v'} . dx =$$

ELIJO : $v = x^2 \Rightarrow v' = 2.x$ DERIVO !

ELIJO : $u' = \text{sen } x \Rightarrow u = -\cos x$ INTEGRO !

"SACO EL 2" POR PROP. b (Y (MENOS).(MENOS) = (+))

$$= \underbrace{-x^2 . \cos x}_{\text{YA NO SE TOCA MÁS.}} + 2 \underbrace{\int x . \cos x \; dx}_{\text{¿ME SALDRÁ ESTA INTEGRAL?}}$$

NO ES INMEDIATA, NO ESTÁ EN TABLA.

Pero si la comparamos con el enunciado original está más fácil porque el ejercicio decía

$\int x^2 . \text{sen } x \; dx$

x^2 → GRADO 2

sen x → TRIGONOMÉTRICA

Y AHORA TENEMOS : $2 . \int x . \cos x \; dx$

x → GRADO 1

cos x → TRIGONOMÉTRICA

Si volvemos a aplicar el método de partes a esta nueva integral, <u>caerá</u> el grado del polinomio a grado 0 (¡ Constante real !). Ahí saldrá la primitiva. O sea:

$$\int x^2 . \text{sen } x \; dx = -x^2 . \cos x + 2 . \int x . \cos x \; dx$$

ELIJO $v = x \Rightarrow v' = 1$ DERIVO !

ELIJO $u' = \cos x \Rightarrow u = \text{sen } x$ INTEGRO !

Este choclin queda :

AFECTA A TODO

$$\Rightarrow \int x^2 . \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 . \cos x + 2 . \left(\overbrace{\operatorname{sen} x}^{u} . \overbrace{x}^{v} - \int \underbrace{\overbrace{\operatorname{sen} x}^{u} . \overbrace{1}^{v'}} dx \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x^2 . \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 . \cos x + 2 . x . \operatorname{sen} x - 2 . \underbrace{\int \operatorname{sen} x \, dx}_{\text{INMEDIATA!}} \Rightarrow$$

DISTRIBUYO EL "2"

POR TABLA: $\int \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x + C$

$$\Rightarrow \boxed{\int x^2 . \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 . \cos x + 2 x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C}$$

Toda la ciencia en el método de integración por partes radica en cómo elegimos quién es u' y quién es v. Acá van unas pistas. Si el ejercicio dice:

$$\int (\text{polinomio}) . \begin{pmatrix} \text{exponencial} \\ \text{logarítmica} \\ \text{trigonométrica} \\ \text{u otra} \end{pmatrix} . dx$$

$\Rightarrow$ elegí v = polinomio <u>Derivo!</u> y $u' = \begin{pmatrix} \text{Trig} \\ \text{Exp} \\ \text{Log} \\ \text{Otra} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow v' = (\text{polinomio})'$ $\Rightarrow u' =$ <u>Integro!</u>

Así cuando usás la fórmula de integración por partes, aparece el polinomio derivado (v') que, como tiene un grado menos (ya que al derivarlo se le resta 1 al exponente), te quedará una nueva integral <u>más fácil</u> de resolver. Aunque quizás, como recién ocurrió, haya que usar <u>varias veces</u> el método.

Resolver la integral : $\int (x^2 + 3x) . (x + 2)^{-5} dx$

$$\int (x^2 + 3x) . (x+2)^{-5} dx$$

POLINOMIO DE GRADO 2

NO ES POLINOMIO

$\Downarrow$

$V = x^2 + 3x$ <u>DERIVO!</u>

$\Rightarrow V' = 2x + 3$

$\Downarrow$

$u' = (x+2)^{-5}$

$\Rightarrow u = \int (x+2)^{-5} dx$ <u>INTEGRO!</u>

POR SUSTITUCIÓN

LLAMO $t = x+2$

$dt = 1.dx$

$$\Rightarrow \int (x+2)^{-5} dx = \int t^{-5} dt = \frac{t^{-4}}{-4} + C = \overbrace{\frac{(x+2)^{-4}}{-4}}^{u} + C$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{(x^2+3x)}_{v} . \underbrace{(x+2)^{-5}}_{u'} dx = \underbrace{\frac{(x+2)^{-4}}{-4}}_{u} . \underbrace{(x^2+3x)}_{v} - \int \underbrace{\underbrace{\frac{(x+2)^{-4}}{-4}}_{u} . \underbrace{(2x+3)}_{v'} dx}$$

SALE COMO $\left(-\frac{1}{4}\right)$ POR PROP. b

HAGO PARTES DE NUEVO AQUÍ

COMO $2x+3$ ES POLINOMIO

ELIJO: $v = 2x+3$, $v' = 2$ DERIVO!

$u' = (x+2)^{-4}$

$\Rightarrow u = \int (x+2)^{-4} dx$ INTEGRO!

POR SUSTITUCIÓN: $t = x+2$

$dt = dx$

$$\Rightarrow \int (x+2)^{-4} dx = \int t^{-4} dt = \frac{t^{-3}}{-3} + C = \overbrace{\frac{(x+2)^{-3}}{-3}}^{u} + C$$

$$\Rightarrow \int (x^2+3x).(x+2)^{-5} dx = \frac{(x+2)^{-4}}{-4} . (x^2+3x) + \frac{1}{4}\left[\overbrace{\frac{(x+2)^{-3}}{-3}}^{u} . \overbrace{(2x+3)}^{v} - \int \overbrace{\frac{(x+2)^{-3}}{-3}}^{u} . \overbrace{2}^{v'} \, dx \right]$$

SALEN POR PROP. b

DISTRIBUYO EL "$\frac{1}{4}$" Y ARREGLO SIGNOS:

$$\Rightarrow \int (x^2+3x).(x+2)^{-5} dx = -\frac{1}{4}(x+2)^{-4}.(x^2+3x) - \frac{1}{12}(x+2)^{-3}.(2x+3) + \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,6}} . \underbrace{\int (x+2)^{-3} dx}$$

SALE POR SUSTITUCIÓN

$t = x+2$

$dt = dx$

$$\Rightarrow \int (x+2)^{-3} dx = \int t^{-3} dt = \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{(x+2)^{-2}}{-2} + C$$

$$\Rightarrow \int (x^2+3x).(x+2)^{-5} dx = -\frac{1}{4}(x+2)^{-4}.(x^2+3x) - \frac{1}{12}.(x+2)^{-3}.(2x+3) + \frac{1}{6} . \frac{(x+2)^{-2}}{-2} + C$$

Resultado lindo, ¿ No ? Lo importante es ver cómo se actúa ante un ejercicio de este tipo, con prolijidad y tratando siempre de no perderse en cada paso respecto de lo que estás haciendo y a qué apuntás.

Regla útil: $\int (\textbf{polinomio}) \times \begin{pmatrix} \textbf{otra} \\ \textbf{función} \end{pmatrix} \textbf{dx}$

Elijo v = (polinomio); u' = (La otra). En el 99 % de los casos sale

Otra ayuda útil es:

$\int (\textbf{polinomio})$ **x** $(\textbf{trigonométrica})$ **dx**

Elegir como **u'** aquella cuya primitiva **u** sea más fácil de obtener y la otra será v

Ejemplo: Integrar $\int e^x \cdot \text{sen } x \, dx$

$\int e^x . \text{sen } x \, dx =$

$v = \text{sen } x \Rightarrow v' = \cos x$ DERIVO !

ELIJO : $u' = e^x$ INTEGRO !

PUES SU PRIMITIVA $u = e^x$ ES FACILÍSIMA DE OBTENER ! PUES $\underbrace{\int e^x dx = e^x}_{\text{INMEDIATA !}}$

$= \overbrace{e^x}^{u} . \overbrace{\text{sen } x}^{v} - \underbrace{\int \overbrace{e^x}^{u} . \overbrace{\cos x}^{v'} \, dx}_{\text{ES TAN FEA DE HALLAR COMO EL PROPIO EJERCICIO}}$

Aplico de nuevo el método de partes. Elijo :

$u' = e^x \Rightarrow u = e^x$ INTEGRO !

$v = \cos x$, $v' = -\text{sen } x$ DERIVO !

(ELEGÍ u y v' COMO AL PRINCIPIO)

$\Rightarrow \int e^x . \text{sen } x \, dx = e^x . \text{sen } x - \left[\overbrace{e^x}^{u} . \overbrace{\cos x}^{v} - \int \overbrace{e^x}^{u} . \overbrace{(-\text{sen } x)}^{v'} \, dx \right]$

DA $\oplus$

$\Rightarrow$ ABRO EL CORCHETE (PRECEDIDO POR $\ominus$): CAMBIA TODO

$\Rightarrow \int e^x . \text{sen } x \, dx = e^x . \text{sen } x - e^x . \cos x - \underbrace{\int e^x . \text{sen } x \, dx}_{\text{VER}}$

Se me formó de nuevo la integral que tenía al principio. Parece que no hay salida, pero no, es al revés. Lo paso al otro lado sumando :

$$\Rightarrow \overbrace{\int e^x . \operatorname{sen} x \, dx + \int e^x . \operatorname{sen} x \, dx}^{(\text{ALGO})+(\text{ALGO}) = 2.\text{ALGO}} = e^x . \operatorname{sen} x - e^x . \cos x$$

$$\Rightarrow 2. \int e^x . \operatorname{sen} x \, dx = e^x . \operatorname{sen} x - e^x . \cos x$$

PASO EL "2" DIVIDIENDO $\Rightarrow$

$$\int e^x . \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x . \operatorname{sen} x - e^x . \cos x}{2} + C$$

$c \in \mathbb{R}$

¿ FEO ? POR FAVOR !

En la guía hay algunos ejercicios en los que hay que usar los 2 métodos.

Ejemplo: Integrar $\int \frac{\ln x \ \operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx$

$$\int \frac{\ln x . \operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx =$$

COMO LO "MÁS FEO" PARECE SER $\operatorname{sen}(\ln x)$ SUSTITUYAMOS "$t = \ln x$"

DERIVO ! $\quad 1. dt = \frac{1}{x} dx \quad$ DERIVO !

$\Rightarrow$ DESPEJO $dx = x . dt$ (*)

$$\Rightarrow \int \frac{\ln x . \operatorname{sen}(\ln x)}{x} . dx = \int \frac{t . \operatorname{sen}(t)}{\cancel{x}} \cancel{x} . dt =$$

POR (*)

RES $(\ln x) = t$

$$= \int t . \operatorname{sen} t \, dt \Rightarrow$$

POLINOMIO GRADO 1 — TRIGONOMÉTRICA

HAGO PARTES

ELIJO $\quad u' = \operatorname{sen} t \Rightarrow u = -\cos t \quad$ INTEGRO !

$v = t \Rightarrow v' = 1 \quad$ DERIVO !

$$\Rightarrow \int \overset{v}{t} . \overset{u'}{\operatorname{sen} t} \, dt = \overset{u . v}{-\cos t . t} - \int \overset{u}{-\cos t} . \overset{v'}{1} . dt$$

$$= -t.\cos t + \underbrace{\int \cos t \, dt}_{\text{INMEDIATA! POR TABLA ES: } \operatorname{SEN}(t)+c}$$

$$= -t.\cos t + \operatorname{sen} t + c \qquad \text{CON } c \in \mathbb{R}$$

Pero como hicimos la sustitución t= ln x, volvamos a la variable x para terminar:

$$\int \frac{\ln x . \operatorname{sen}(\ln x)}{x} dx = -(\ln x).\cos(\ln x) + \operatorname{sen}(\ln x) + C$$

Vamos ahora a la segunda parte de este tema que es la aplicación de la integral. Presten atención que esto se toma mucho. Entonces :

2. <u>INTEGRAL DEFINIDA</u>:

La integral definida de una función es una expresión del tipo:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

a, b son dos elementos reales

$(a, b \in \Re)$

La integral <u>indefinida</u> devolvía <u>todas</u> las <u>primitivas</u> de f(x)). La integral definida da un número. O sea, puede 2, 5, 28, 3,14, etc

Ahora bien, ¿Cómo se calcula ese número real resultado de una integral definida ? Rta: Aplicando la <u>REGLA DE BARROW</u> que paso a explicarte:

<u>REGLA DE BARROW</u> ← (LEER)

$$\text{Si} \quad \int f(x)\, dx = g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a)$$

O sea, si tenemos una primitiva g(x) de la función f(x) a integrar, la integral definida de f(x) entre a y b es el número que resulta de calcular la primitiva g(x) en x = b y restarle la misma primitiva g(x) pero calculada en x = a.

Veamos un ejemplo:

$$\int_0^2 \underbrace{x^2}_{f(x)} dx = \begin{pmatrix} \text{debe dar un número real} \\ \text{como resultado ya que} \\ \text{es una integral definida} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Usemos Barrow para calcularla}$$

Busco primitiva de x^2

$$\int_0^2 x^2 dx = \overbrace{\frac{1}{3}.x^3 + c}^{g(x)}$$

$$\overbrace{\text{Calculemos esa primitiva en } x = 2 \text{ y le restamos lo que vale en } x = 0}^{\text{Esto es hacer Barrow}}$$

$$\frac{1}{3}.x^3 + c \quad \text{en } x = 2 \quad \text{vale}: \quad \frac{1}{3}.2^3 + c = \frac{1}{3}.8 + c = \frac{8}{3} + c \to g(2)$$

$$\frac{1}{3}.x^3 + c \quad \text{en } x = 0 \quad \text{vale}: \quad \frac{1}{3}.0^3 + c = \frac{1}{3}.0 + c = 0 + c \to g(0)$$

Ahora, como dice Barrow, restemos:

$$\int_0^2 \mathbf{x^2 dx} = \left(\frac{8}{3} + c\right) - (0 + c) = \frac{8}{3} + \cancel{c} - 0 - \cancel{c} = \frac{8}{3} \qquad \to \textbf{el Resultado} \in \Re$$

Cambia signos

Hagamos otro:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = \left(\text{COMO PRIMITIVA DEL } \underbrace{\operatorname{sen} x}_{f(x)} \text{ ES } \underbrace{(-\cos x)}_{g(x)}\right) = -\cos(\pi) - (-\cos 0) \Rightarrow$$

BARROW : RESTAR $g(\pi) - g(0)$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\underbrace{(-1)}_{\cos\pi} - (\underbrace{-1}_{\cos 0}) = 1 + 1 = 2$$

En general, vamos a escribir:

$$\mathbf{g(x)\Big|_a^b \quad \text{cuando quiera decir}: \quad g(b) - g(a)}$$

<table><tr><td>

Barrow dice:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a) = \underbrace{g(x)\Big|_a^b}_{\text{Indica que hay que buscar } g(b);\, g(a) \text{ y luego restarlos!}}$$

</td></tr></table>

<u>Ejercicio</u>: Hallar $\int_2^4 (-x + 2)\, dx$

$$\int_2^4 -x + 2 \, dx = -\frac{1}{2}.x^2 + 2x + C\Big|_2^4$$

BUSCO PRIMITIVA

CAMBIA SIGNOS

$$= \left(-\frac{1}{2}\cdot 4^2 + 2.4 + c\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2.2 + c\right) =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\cdot 16}_{-8} + 8 + \cancel{c} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 4}_{2} - 4 - \cancel{c} = \cancel{-8} + \cancel{8} + 2 - 4 = -2$$

Algo que ya ocurrió dos veces (Y va a ocurrir siempre) es que cuando hacemos Barrow, la constante "c" real se simplifica porque:

$$\int_2^4 \mathbf{f(x)\ dx} = \underbrace{\underbrace{\mathbf{g(b)}}_{\text{Acá hay un "+C"}} - \underbrace{\mathbf{g(a)}}_{\text{Acá hay un "+C"}}}$$

Al restar se anula la constante. Nos olvidamos de la constante de integración cuando hacemos una integral definida.

PROPIEDADES

Como en la integral indefinida:

a) $$\int_a^b f(x) + g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$$

b) $$\int_a^b k.f(x)\ dx = k.\int_a^b f(x)\ dx$$

Y una nueva:

c) $$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

PARA CUALQUIER C∈R DONDE CADA SUMANDO SEA "CALCULABLE".

Con esto ya podés hacer los primeros ejercicios de la guia de integrales definidas. Te cuento que al hacer Barrow integrando por el método de integración por partes, tenés que usar la fórmula:

$$\int_a^b u'.v\ dx = u.v\Big|_a^b - \int_a^b u.v'\ dx$$

REGLA DE BARROW AL USAR EL MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

Vamos a un ejemplo:

Resolver: $$\int_{-1}^{0} (x^2+1).(x+1)^{2/3}\ dx$$

$$\int_{-1}^{0} (x^2+1)\cdot(x+1)^{2/3}\,dx =$$

POLINOMIO

$u' = (x+1)^{2/3}$
$\Rightarrow u = \frac{3}{5}\cdot(x+1)^{5/3}$ INTEGRO!

ELIJO $v = x^2+1$
$\Rightarrow v' = 2x$ DERIVO!

$$= \overbrace{\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}}^{u}\cdot\overbrace{(x^2+1)}^{v}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \overbrace{\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}}^{u}\cdot\overbrace{2\cdot x}^{v'}\,dx = \frac{3}{5}(x+1)^{5/3}\cdot(x^2+1)\Big|_{-1}^{0} - \frac{6}{5}\cdot\int_{-1}^{0} x\cdot(x+1)^{5/3}\,dx$$

SACO CONSTANTES

POLINOMIO
HAGO PARTES DE NUEVO.

ELIJO: $v = x$
$v' = 1$ DERIVO!

$u' = (x+1)^{5/3}$
$u = \frac{3}{8}\cdot(x+1)^{8/3}$ INTEGRO!

$$= \frac{3}{5}(x+1)^{5/3}\cdot(x^2+1)\Big|_{-1}^{0} - \frac{6}{5}\cdot\left[\overbrace{x}^{v}\cdot\overbrace{\frac{3}{8}\cdot(x+1)^{8/3}}^{u}\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\overbrace{\frac{3}{8}\cdot(x+1)^{8/3}}^{u}\cdot\overbrace{1}^{v'}\,dx\right] =$$ (DISTRIBUTIVA DEL $(-\frac{6}{5})$)

$$= \underbrace{\quad\text{"}\quad} - \frac{\cancel{6}^{\,3}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{8}_{\,4}}\cdot x\cdot(x+1)^{8/3}\Big|_{-1}^{0} + \frac{\cancel{6}^{\,3}}{5}\cdot\frac{3}{\cancel{8}_{\,4}}\cdot\underbrace{\int_{-1}^{0}(x+1)^{8/3}\,dx}_{\text{INMEDIATA: } \frac{3}{11}\cdot(x+1)^{11/3}\Big|_{-1}^{0}} =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{5}(x+1)^{5/3}\cdot(x^2+1)\Big|_{-1}^{0}} - \underbrace{\frac{9}{20}\cdot x\cdot(x+1)^{8/3}\Big|_{-1}^{0}} + \underbrace{\frac{9}{20}\cdot\frac{3}{11}\cdot(x+1)^{11/3}\Big|_{-1}^{0}} =$$ (HACÉ VOS LAS CUENTAS!)

$$= \left(\frac{3}{5} - 0\right) - \left[0 - 0\right] + \left[\frac{27}{220} - 0\right] = \frac{159}{220}$$

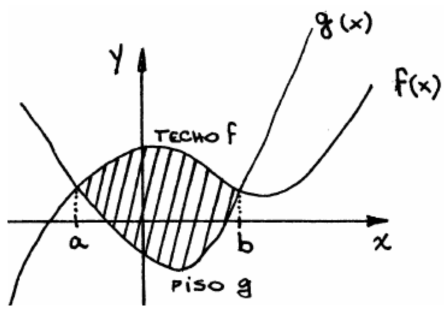
Pasemos a la última parte de integrales. Este es el último temade la materia.

3. CÁLCULO DE ÁREAS

La fórmula con la que vamos a calcular el área de <u>cualquier</u> región del plano, delimitada por dos funciones cualesquiera f(x) y g(x) es:

$$\boxed{\int_a^b f(x) - g(x)\,dx}$$

Donde:



Importante:

Cuando digo $\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$

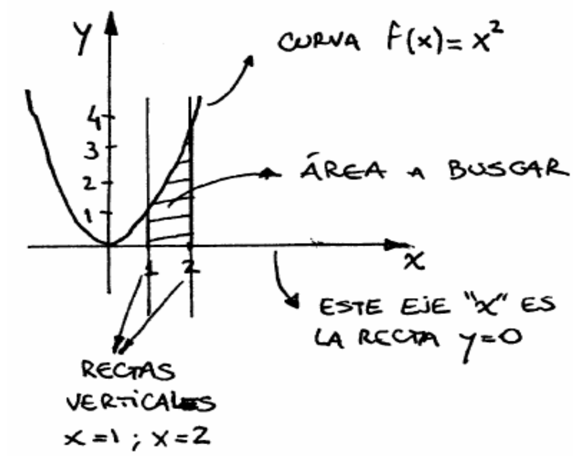
Debe ser la función que hace de "techo" del área encerrada

Debe ser la función que hace de "piso" del área encerrada

En número "a" es el valor en el eje x donde "comienza" el área. El número "b" es el valor en el eje x donde "termina" el área encerrada.

Ejemplo:
Hallar el área encerrada por la función $f_{(x)} = x^2$ entre $x = 1$, $x = 2$ e $y = 0$

Hagamos un gráfico:



Entonces, de acuerdo al dibujo:

TECHO : $f(x) = x^2$

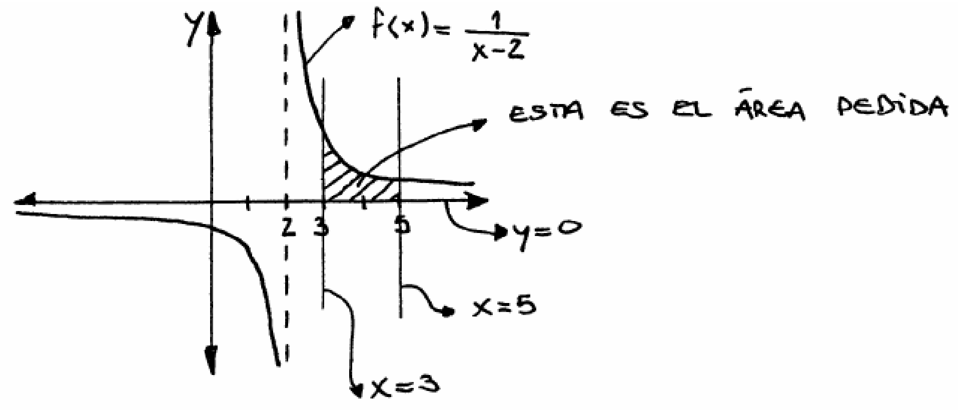
PISO : $g(x) = 0$ (ó $y=0$)

$$\int_1^2 x^2 - 0 \; dx =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{busco} \\ \text{primitiva} \\ \text{y Barrow} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}.2^3 - \frac{1}{3}.1^3 = \frac{1}{3}.8 - \frac{1}{3}.1 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{7}{3}}$$

Ejemplo: Hallar el área encerrada por : $\begin{cases} f(x) = 1/(x-2) \\ Y = 0 \\ X = 3 \\ x = 5 \end{cases}$

De nuevo hago el gráfico:



Planteo:

$$\text{Área} = \int_3^5 \underbrace{\frac{1}{x-2}}_{\text{Techo}} - \underbrace{0}_{\text{Piso}}\, dx = \begin{pmatrix} \text{sustituyo} \\ u = x - 2 \\ du = dx \end{pmatrix}$$

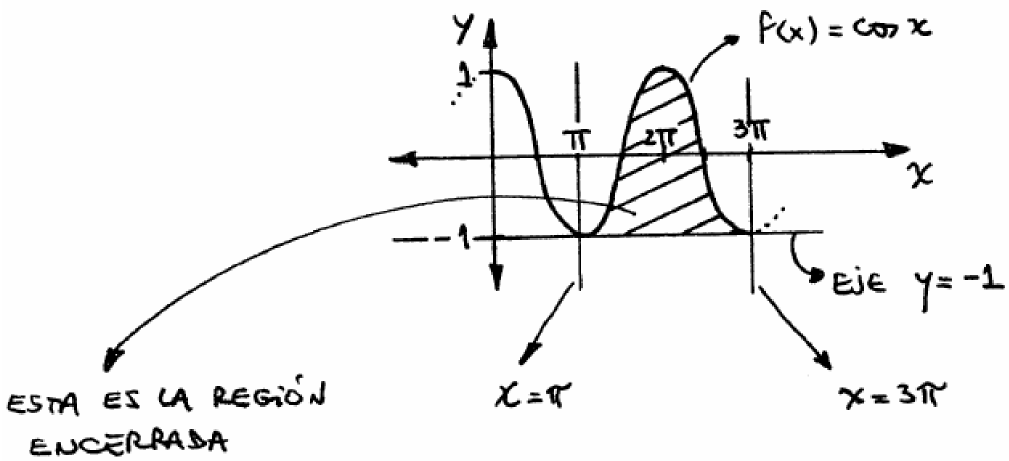
$$= \int \frac{1}{u}.du = \ln|u| = \ln|x-2|\Big|_3^5 = \ln|5-2| - \ln|3-2| =$$

Inmediata (Tabla) u = x - 2 Barrow

(Con calculadora) Área = ln 3 - ln 1

Área = 1,098...- 0 $\boxed{= 1,098.}$

Ejemplo: Hallar el área encerrada entre f(x) = cos x, x = π, x = 3π y g(x) = - 1 (ó y = -1). Gráficamente:

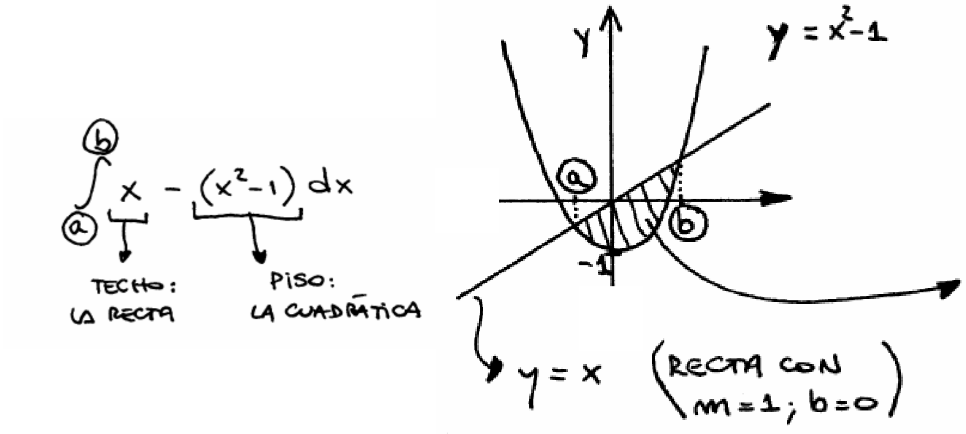


$$\Rightarrow \text{Área} = \int_{\pi}^{3\pi} \cos x\, dx + \int_{\pi}^{3\pi} 1\, dx \underset{\text{Integro}}{=} \text{sen}\, x\Big|_{\pi}^{3\pi} + x\Big|_{\pi}^{3\pi} \underset{\text{Barrow}}{=}$$

$$= (\mathbf{sen\ 3\ \pi - sen\ \pi}) + (\mathbf{3\ \pi - \pi}) \rightarrow \textbf{Calculando cada paréntesis :}$$

$$(\mathbf{0 - 0}) + (\mathbf{2\pi}) = \mathbf{2\pi} \rightarrow \textbf{Es el área buscada.}$$

Ejercicio: Calcular el área comprendida por las curvas y = x ; y = x^2 - 1.
Empecemos graficando:



ESTA ES EL AREA QUE ME PIDEN

¿ Pero cómo hallar a y b ? a y b son los valores de x donde las funciones se intersecan, o sea, donde se igualan: planteo y resuelvo esa igualdad:

$$\underbrace{x}_{\text{Recta}} = \underbrace{x^2 - 1}_{\text{Cuadrática}}$$

Paso "x": $0 = x^2 - x - 1$

Aplico fórmula de cuadráticas con a = 1 , b = -1 y c = -1 :

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = ...\left(\begin{matrix}\text{Hacé las}\\ \text{cuentas}\end{matrix}\right)... = \begin{cases} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cong \overbrace{1{,}61...}^{b} \\[2em] \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \cong \underbrace{-0{,}61...}_{a} \end{cases}$$

Ahora resuelvo:

$$\textbf{Área} = \int_{-0{,}61...}^{1{,}61...} \mathbf{x - (x^2 - 1) dx} = \int_{-0{,}61...}^{1{,}61...} \mathbf{x - x^2 + 1\ dx} = \left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^2 - \frac{1}{3}\mathbf{x}^3 + \mathbf{x}\right)\Bigg|_{-0{,}61...}^{1{,}61...} =$$

$$= (\textbf{hacé las cuentas})... = \mathbf{1{,}51...} - (-\mathbf{0{,}34}) = \boxed{\mathbf{1{,}86...}} \rightarrow \textbf{Es el área pedida}$$

FIN INTEGRALES

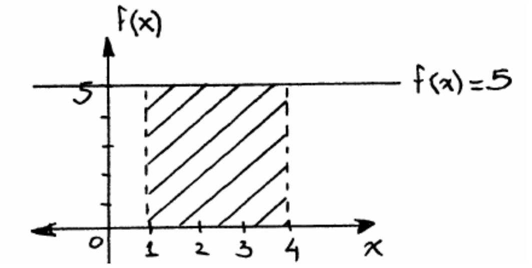
INTEGRALES - EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

Ahora que ya sabés calcular áreas encerradas por funciones, te prepongo que hagas los ejercicios de la guía. Además podrías releer los primeros ejemplos que puse en la teoría a ver si se entiende mejor. Por favor tenés que entender que esto de integrales es como todo, lleva práctica. O sea, mucha transpiración. La matemática es la matemática.

Antes de empezar con los ejercicios de parciales quiero que veas este ejemplo facilongo. Lo había resuelto en la teoría calculando el área. Ahora lo voy a resolver por integrales. Fijate:

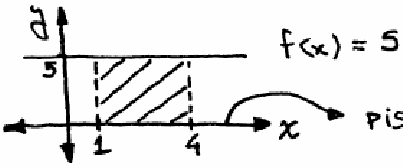
> Hallar la Integral entre la función $f(x) = 5$ (Recta constante = 5) entre $a = 1$ y $b = 4$.

El dibujo quedaría:



EL ÁREA ENCERRADA ENTRE LOS BORDES:
$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \\ y = 0 \\ f(x) = 5 \end{cases}$$

SERÍA ASÍ:



PISO: RECTA $y = 0$

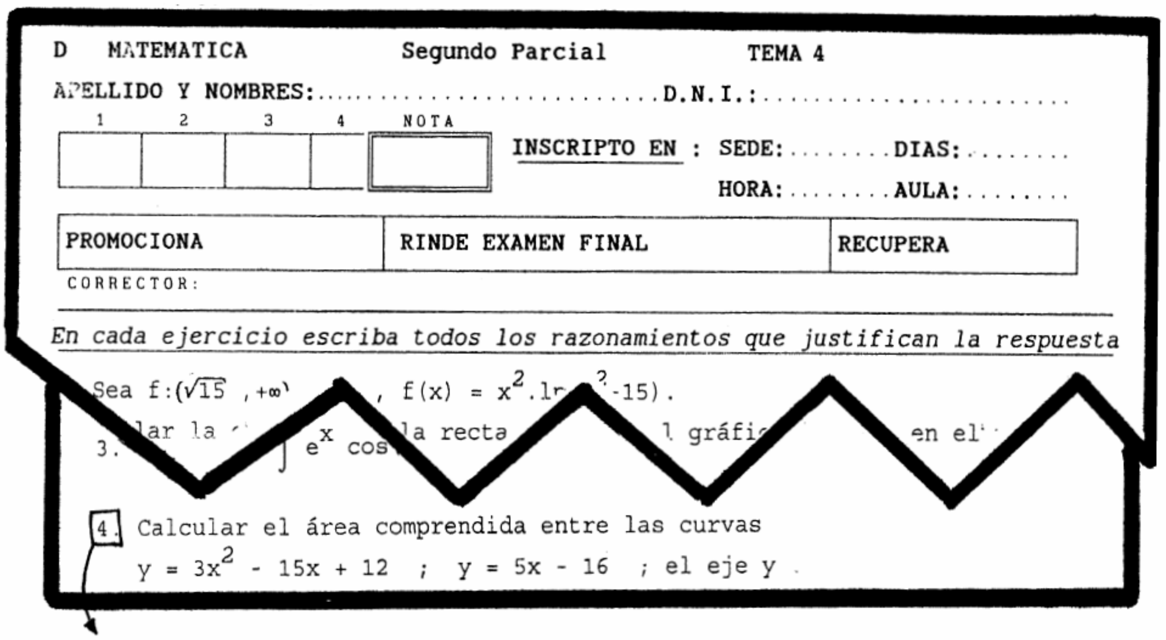
$$\Rightarrow \text{ÁREA} = \int_1^4 \underbrace{5}_{\text{FUNCIÓN TECHO}} - \underbrace{0}_{\text{FUNCIÓN PISO}} \, dx = \int_1^4 5 \, dx = \underbrace{5x \Big|_1^4}_{\text{INTEGRO}} \underbrace{=}_{\text{BARROW}}$$

$$= 5.4 - 5.1 = 20 - 5 = 15$$

¡ COMO TENÍA QUE DAR SI HACÍAMOS (base) x (Altura) !

$$\underbrace{(\text{base})}_{3} \times \underbrace{(\text{Altura})}_{5} \quad 3 \,.\, 5 = 15.$$

Empecemos ahora con los ejercicios de parcial. Hago el 4 :



D MATEMATICA Segundo Parcial TEMA 4

APELLIDO Y NOMBRES:........................... D.N.I.:........................

1	2	3	4	NOTA

INSCRIPTO EN : SEDE:........ DIAS:........
HORA:........ AULA:........

PROMOCIONA	RINDE EXAMEN FINAL	RECUPERA

CORRECTOR:

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

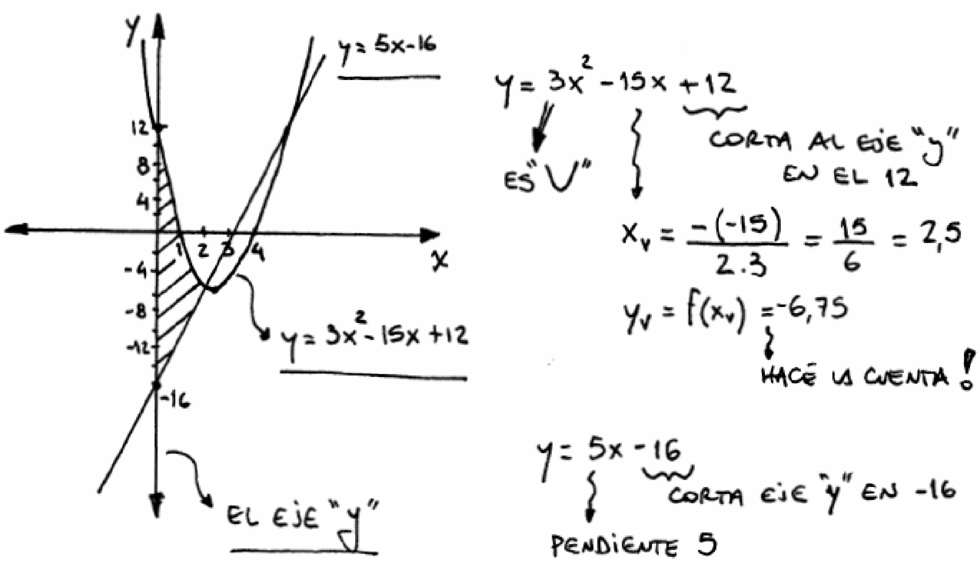
Sea f:($\sqrt{15}$,+∞) , f(x) = x^2.ln ... -15) .

... lar la ... la recta ... l gráfi ... en el ...

3. ... $\int e^x \cos$ ...

4. Calcular el área comprendida entre las curvas
$y = 3x^2 - 15x + 12$; $y = 5x - 16$; el eje y .

Como siempre, empecemos ayudándonos con un dibujo:



$\boxed{\text{¡ CUIDADO !}}$ El área debe ser la que está encerrada por las dos funciones <u>con el eje</u> "y". (<u>No</u> es el sector porque allí el eje "y" no lo estarías usando)

→ Como el techo es 3 x^2 - 15 x + 12 y el piso es 5 x - 16, me queda :

Planteo: $$\text{Área} = \int_a^b \underbrace{\left(3x^2 - 15x + 12\right)}_{\text{Techo}} - \underbrace{\left(5x - 16\right)}_{\text{Piso}} dx =$$

¿ Pero quiénes son <u>a</u> y <u>b</u> ? ¿ Dónde "empieza" y dónde "termina" el área a buscar ?. analicemos un poco este asunto.
Creo que se ve que a = 0 porque la región empieza en el eje "y", o sea, x = 0.

Para ver b hay que buscar la intersección entre la recta y la cuadrática. Hay dos: nos quedaremos con la menor.

$$5\,x - 16 = 3\,x^2 - 15\,x + 12$$

$$\rightarrow\ 0 = 3x^2 - 20\,x + 28$$

Fórmula de cuadráticas con $\begin{cases} a = 3 \\ b = -20 \\ c = 28 \end{cases}$ Queda : (Hacelo!) $x = \begin{cases} 2 \\ \dfrac{14}{3} \end{cases}$

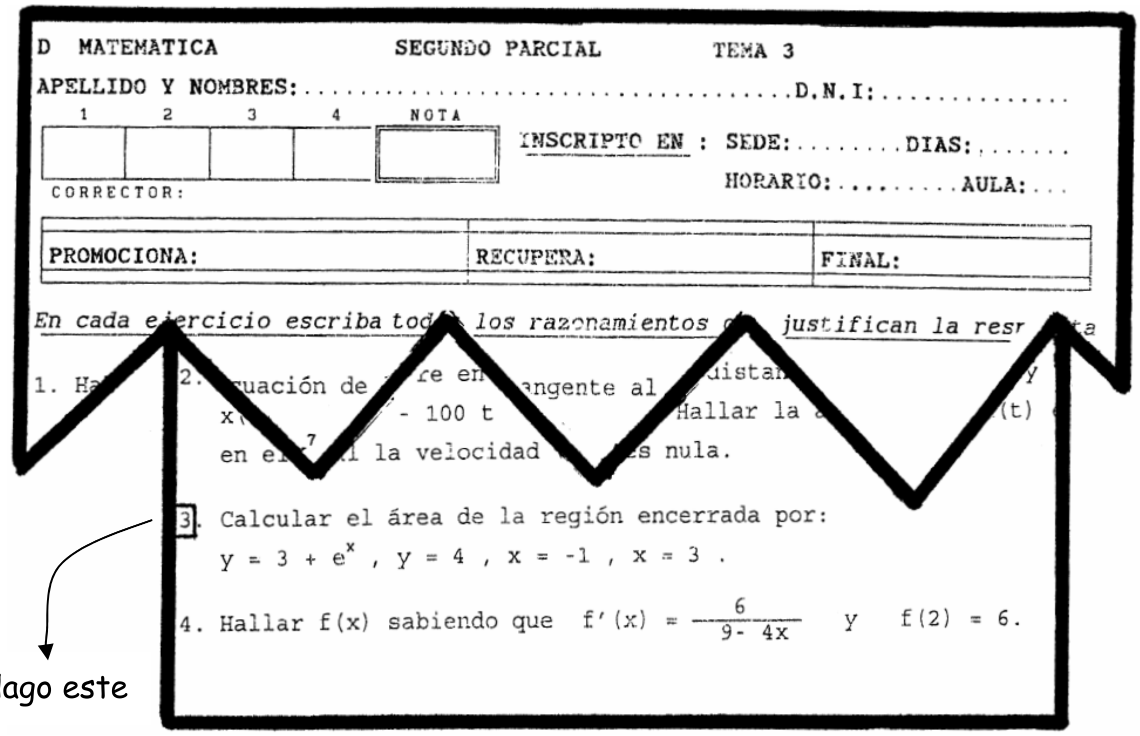
Pero yo buscaba el "primer" encuentro de la recta con parábola $\rightarrow$ b = 2 (porque $\frac{14}{3} = 4{,}\widehat{6}$). Entonces, ahora sí :

$$\text{Área} = \int \left(3x^2 - 15x + 12\right) - \left(5x - 16\right) dx =$$

$$= \int_0^2 3x^2 - 15x + 12 - 5x + 16\,dx$$

$$\int_0^2 3x^2 - 20x + 28\,dx \underbrace{=}_{\text{Integro}} \left. x^3 - 10x^2 + 28x \right|_0^2$$

$$\underbrace{=}_{\text{Barrow}} \underbrace{(8 - 40 + 56) - (0 - 0 + 0)}_{= 24}$$


D MATEMATICA SEGUNDO PARCIAL TEMA 3

APELLIDO Y NOMBRES:.................................D.N.I:..............

1	2	3	4	NOTA

CORRECTOR:

INSCRIPTO EN : SEDE:........DIAS:.......

HORARIO:.........AULA:...

PROMOCIONA:	RECUPERA:	FINAL:

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

1. Ha...

2. ...uación de ... re en ... angente al ... dista... y x(... - 100 t Hallar la ... (t) en el ... la velocidad ... es nula.

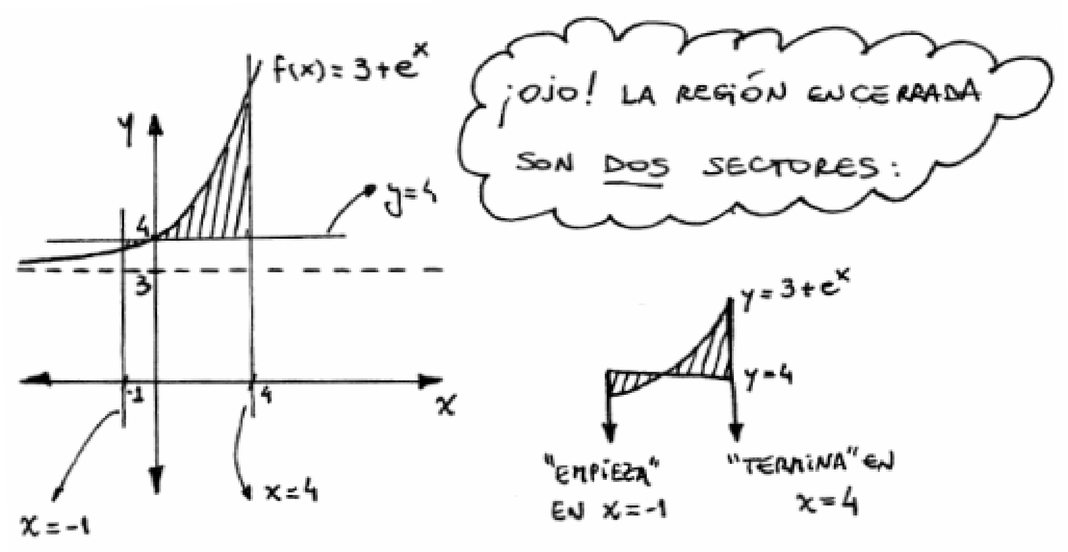
3. Calcular el área de la región encerrada por: $y = 3 + e^x$, $y = 4$, $x = -1$, $x = 3$.

4. Hallar f(x) sabiendo que $f'(x) = \frac{6}{9 - 4x}$ y $f(2) = 6$.

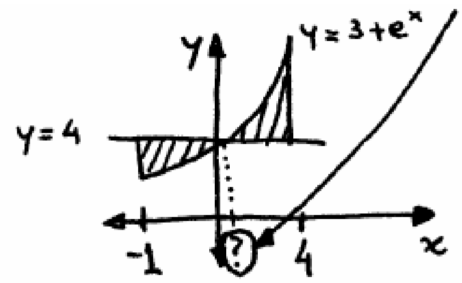
Hago este

Hagamos el 3 (A vos te queda el 4). Grafiquemos cada borde:

$f(x) = 3 + e^x$. Esta función es como e^x pero subida 3 unidades.



Pero atención que en el medio, cambian los roles de cuál está de techo y cuál de piso. Busquemos el valor de x donde $y = 3 + e^2$ e $y= 4$. Se encuentran.



Igualo: $\Rightarrow 4 = 3 + e^x \Leftrightarrow 4 - 3 = e^x \Leftrightarrow 1 = e^x \Leftrightarrow$

Tomando ln x a ambos lados queda: $\underbrace{\ln 1} = \ln e^x$

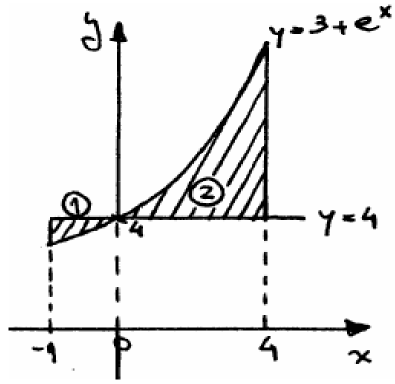
Como ($\log x^n = n \cdot \log x$) $\rightarrow$

$$0 = x.\ln e^x$$

$$0 = x.1$$

$$0 = x$$

Se cruzan en x = 0. Bien graficado es:



$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{Área 1} = \displaystyle\int_{-1}^{0} \underbrace{\overbrace{4}^{\text{Techo en 1}}}_{} - \overbrace{\left(3 + e^{x}\right)}^{\text{Pis ¿o en 2}} dx \\ \Rightarrow \text{Área 2} = \displaystyle\int_{0}^{4} \underbrace{\left(3 + e^{x}\right)}_{\text{Techo en 2}} + \underbrace{4}_{\text{Piso en 2}} \; dx \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Área total} = \text{Área 1} + + \text{Área 2} \underbrace{=}_{\text{Los - cambian signos de factores}}$$

$$= \int_{-1}^{0} \underbrace{4-3}_{1} - e^{x} dx + \int_{0}^{4} \underbrace{3-4}_{-1} + e^{x} dx = \int_{-1}^{0} 1 - e^{x} dx + \int_{0}^{4} -1 + e^{x} dx =$$

$$= (\text{integrando}) \text{ y Barrow} = \left(x - e^{x}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-x + e^{x}\right)\Big|_{0}^{4} =$$

$$= \underbrace{\left(0 - e^{0}\right)} - \left(-1 - e^{-1}\right) + \left(-4 + e^{4}\right) - \underbrace{\left(-0 + e^{0}\right)}$$

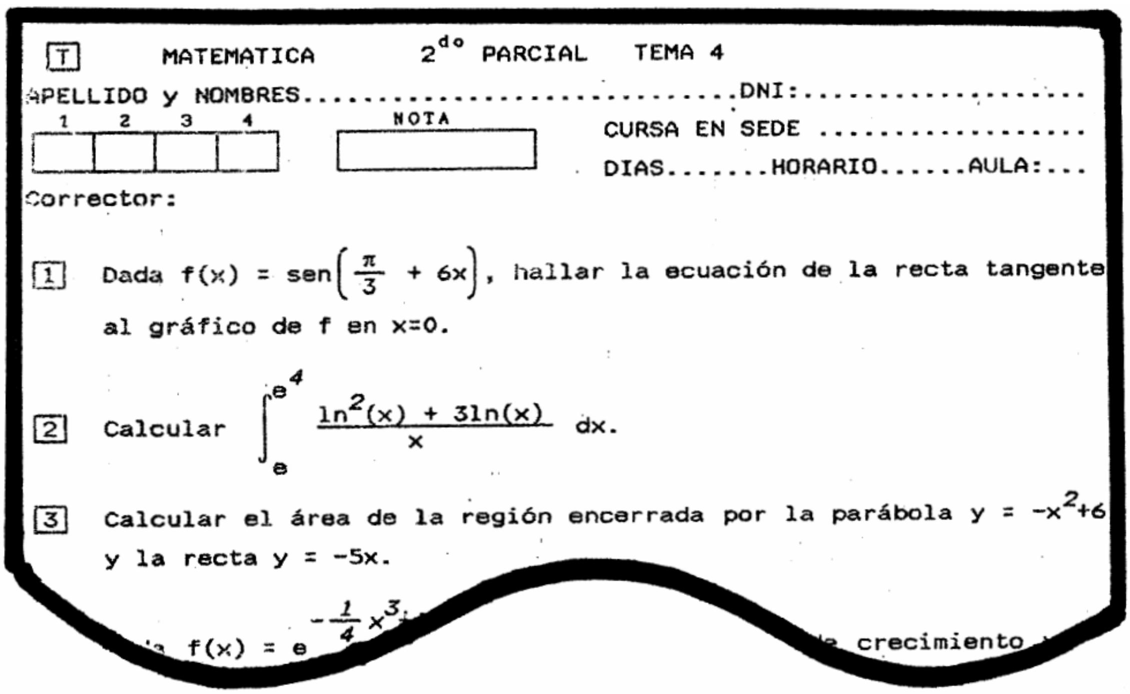
$$= -1 \qquad - \left(-1 - e^{-1}\right) + \left(-4 + e^{4}\right) - \qquad (1) = (\text{abro los paréntesis})$$

$$= -1 + 1 + e^{-1} - 4 + e^{4} - 1 =$$

$$= -5 + e^{-1} + e^{4} =$$

$$(\text{Con calculadora}) = -5 + 0{,}367... + 54{,}598... = 49{,}96...$$

Sigamos con ejercicios de parciales:



T MATEMATICA 2do PARCIAL TEMA 4

APELLIDO y NOMBRES............................DNI:..................

1	2	3	4

NOTA

CURSA EN SEDE ....

DIAS.......HORARIO......AULA:...

Corrector:

1 Dada $f(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + 6x\right)$, hallar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en x=0.

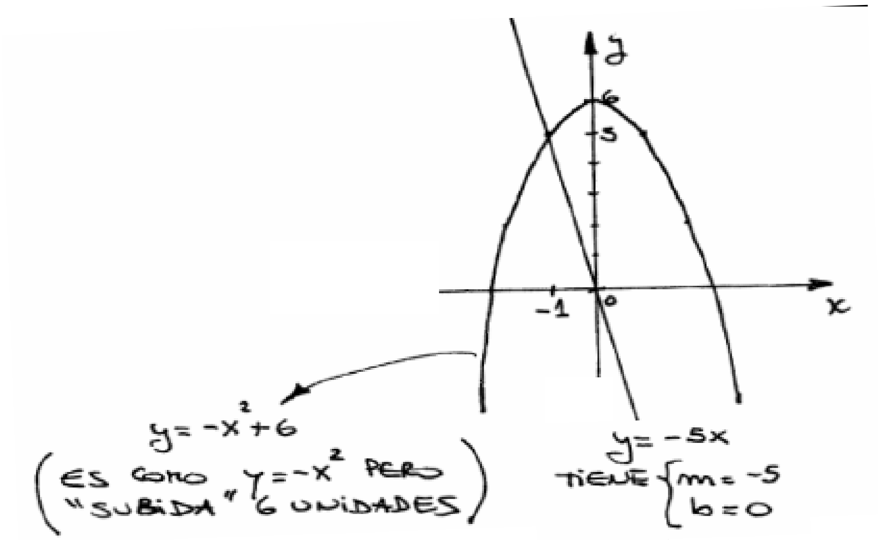
2 Calcular $\displaystyle\int_{e}^{e^4} \frac{\ln^2(x) + 3\ln(x)}{x}\,dx$.

3 Calcular el área de la región encerrada por la parábola $y = -x^2+6$ y la recta $y = -5x$.

...a $f(x) = e^{-\frac{1}{4}x^3}$ ... crecimiento ...

Hagamos el 3: Ayudándonos con un gráfico:

¿ Cuál es la región encerrada ? Igualemos las funciones para ver qué valores de "x" se encuentran:

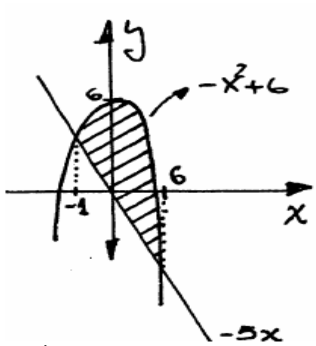


$$-x^2+6=-5.x \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{(Paso todo de término)}} 0=x^2-5x-6 \Leftrightarrow \text{Fórmula de cuadrática con} \begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25-4.1.(-6)}}{2.1} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{5\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{5\pm7}{2} \Leftrightarrow x=\begin{cases} 6 \\ -1 \end{cases}$$

El gráfico es:



Cuya área encerrada sale como resultado de plantear:

$$\text{Área}=\int_{-1}^{6}\underbrace{\left(-x^2+6\right)}_{\text{Techo}}-\underbrace{\left(-5x\right)}_{\text{Piso}}dx \underset{\text{(Abro paréntesis)}}{=} \int_{-1}^{6}-x^2+6+5x\,dx \underset{\text{Integro}}{=}$$

$$=-\frac{1}{3}x^3+6x+\frac{5}{2}x^2\Big|_{-1}^{6}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}.\overbrace{6^3}^{216}+\overbrace{6.6}^{36}+\underbrace{\frac{5}{2}.\overbrace{6^2}^{36}}_{90}\right)-\left(-\frac{1}{3}.\overbrace{(-1)^3}^{-1}+\overbrace{6.(-1)}^{-6}+\overbrace{\frac{5}{2}.(-1)}^{-5/2}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}.216+36+90\right)-\left(\frac{1}{3}-6-\frac{5}{2}\right)=54-\left(\frac{2-36-15}{6}\right)=54+\frac{49}{6}=$$

$$=\frac{324+49}{6}=\frac{373}{6}\cong 62,1\widehat{6} \text{ es el área pedida.}$$

Hagamos el 2 del mismo parcial: 2 Calcular $\int_{e}^{e^4} \frac{\ln^2(x) + 3\ln(x)}{x} dx$.

El asunto parece imposible. Pero a no desesperar. Fijate. Tengo :

$$\int_{e}^{e^4} \frac{\ln^2 x + 3.\ln x}{x} dx =$$

ACORDATE QUE $\ln^2 x = (\ln x)^2$

SUSTITUYO $u = \ln x$

DERIVO $1 du = \frac{1}{x} dx$

DESPEJO : $dx = x.du$

Reemplazo y me queda:

$$\int \frac{\overbrace{u^2}^{(\ln x)^2} + \overbrace{3u}^{3\ln x}}{\cancel{x}} . \overbrace{\cancel{x}.du}^{dx} = \int u^2 + 3u \, du = \frac{1}{3} u^3 + \frac{3}{2} u^2 =$$

INTEGRO PUES POR SER POLINOMIO ES INMEDIATA!

$$= \left(\frac{1}{3} \ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^2 x \right) \Big|_{e}^{e^4} = \left[\frac{1}{3} \ln^3(e^4) + \frac{3}{2} \ln^2(e^4) \right] -$$

VOLVIENDO A LA VARIABLE x : $u = \ln x$

BARROW

$$- \left[\frac{1}{3} \ln^3 e + \frac{3}{2} \ln^2 e \right] \Rightarrow$$

COMO $\ln^3 e^4 = (\ln e^4)^3 = (4.\ln e)^3$

Y COMO $\ln^2(e^4) = (4 \ln e)^2$ PUES $\log a^m = m.\log a$

$$= \left[\frac{1}{3} . (4.\ln e)^3 + \frac{3}{2} (4.\ln e)^2 \right] - \left[\frac{1}{3} (\ln e)^3 + \frac{3}{2} (\ln e)^2 \right] =$$

COMO $\ln e = 1$

$$= \left[\frac{1}{3} (4.1)^3 + \frac{3}{2} (4.1)^2 \right] - \left[\frac{1}{3} (1)^3 + \frac{3}{2} (1)^2 \right] =$$

ABRO CORCHETE $\Rightarrow$ CAMBIA SIGNOS

$$= \frac{1}{3} . 64 + \frac{3}{2} . 16 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} =$$

HACIENDO LA SUMA DE FRACCIONES:

$$= \frac{128 + 144 - 2 - 9}{6} = \frac{261}{6} = 43,5$$

ES EL RESULTADO PEDIDO.

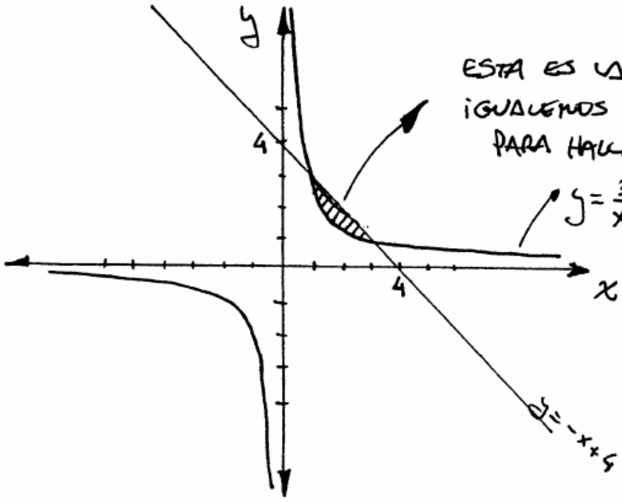
Hago el 4to ejercicio de otro parcial:

4. Calcular el área de la región encerrada por las curvas $y = \frac{3}{x}$ e $y = -x+4$. Graficar.

Grafiquemos la homográfica y = 3/x
y la lineal y = - x + 4

m = - 1 ; b = 4

(COMO $y = \frac{1}{x}$ PERO "ESTIRADA" AL TRIPLE A LO ALTO Y4 QUE $\frac{3}{x} = 3 \cdot \frac{1}{x}$)



ESTA ES LA REGIÓN: IGUALEMOS LAS FUNCIONES PARA HALLAR LOS "x" DE ENCUENTRO:

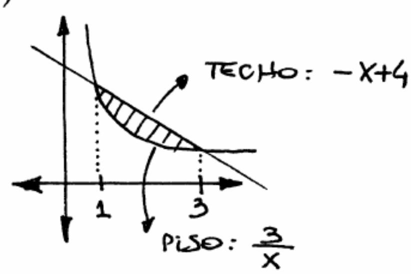
$$\frac{3}{x} = -x+4 \underset{\text{PASO } x}{\Rightarrow} 3 = (-x+4) \cdot x \underset{\text{DISTRIBUTIVA}}{\Leftrightarrow} 3 = -x^2 + 4x$$

$$\underset{\text{PASO EL "3"}}{\Leftrightarrow} 0 = -x^2 + 4x - 3 \qquad \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -3 \end{cases}$$

Y FÓRMULA DE RAÍCES DE CUADRÁTICA :

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4.(-1).(-3)}}{2.(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-12}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{-2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right.$$

⇒ ÁREA ES



$$\Rightarrow \text{ÁREA} = \int_1^3 (-x+4) - \left(\frac{3}{x}\right) dx = \int_1^3 -x+4-\frac{3}{x}\, dx =$$

$$= \int_1^3 -x+4\, dx + \int_1^3 \frac{3}{x}\, dx = \underbrace{\int_1^3 -x+4\, dx} + 3\underbrace{\int \frac{1}{x}\, dx}$$

INTEGRO Y BARROW: $\left(-\frac{1}{2}x^2+4x\right)\Big|_1^3 + (3.\ln x)\Big|_1^3 =$

$$= \left(-\frac{1}{2}.3^2+4.3\right) - \left(-\frac{1}{2}.1^2+4.1\right) + (3.\ln 3) - (3.\underbrace{\ln 1}_{0}) =$$

$$= \underbrace{-\frac{9}{2}+12+\frac{1}{2}-4} + 3.\ln 3 - \cancel{3.0} =$$

$$= 13 + 3.\underbrace{\ln 3}_{1,09...} \cong 16,29...$$

ES EL AREA PEDIDA

Hagamos este ejercicio que estaba en la guía vieja:

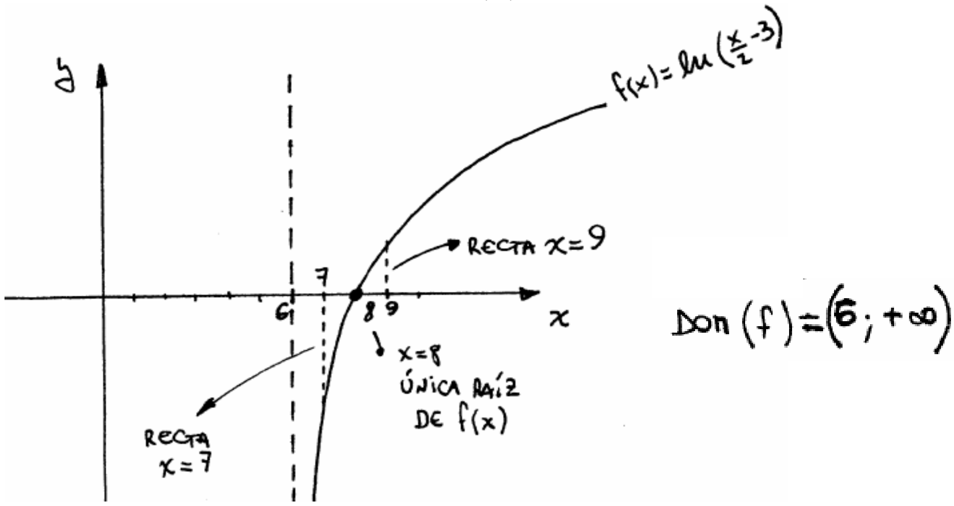
Dada $f:(6,+\infty) \to IR$ definida por $f(x)=\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)$ calcular el área de la región encerrada por el eje x, las rectas de ecuaciones $x=7$, $x=9$ y el gráfico de f.

Antes de graficar $f(x) = \ln(x/2 - 3)$ fijémonos dónde este "logaritmo corrido y estirado" por culpa del (-3) y del (x/2) tiene su raíz:

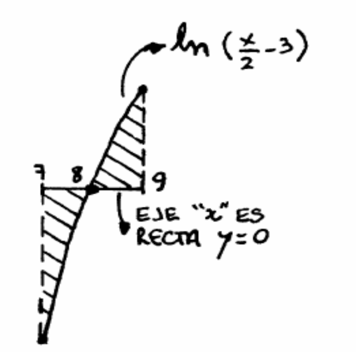
$$\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-3=e^0 \Leftrightarrow \frac{x}{2}-3=1$$

PASO LN(x) COMO EXPONENCIAL

$\Leftrightarrow \frac{x}{2}=1+3 \Leftrightarrow x=4.2 \Leftrightarrow x=8$ única raíz de f(x)



El área encerrada es:



Como el techo y el piso cambian según la regióndel dominio donde estemos integrando, separemos la búsqueda del área en dos integrales:

$$\overbrace{\int_7^8 \underbrace{0}_{\text{Techo en }[7;8]} - \underbrace{\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)}_{\text{Piso en }[7;8]} dx}^{\text{Área entre } x=7 \text{ y } x=8} + \overbrace{\int_8^9 \underbrace{\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)}_{\text{Techo en }[8;9]} - \underbrace{0}_{\text{Piso en }[8;9]} dx}^{\text{Área entre } x=8 \text{ y } x=9} =$$

$$= \int_7^8 -\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)dx + \int_8^9 \ln\left(\frac{x}{2}-3\right)dx$$

SUSTITUYO $t = \frac{x}{2} - 3$

$dt = \frac{1}{2} dx$

$2dt = dx$

$$= \overbrace{\int -\ln t \,.\, 2dt}^{\text{PARA } x \text{ ENTRE } 7 \text{ y } 8} + \overbrace{\int \ln t \,.\, 2dt}^{\text{PARA } x \text{ ENTRE } 8 \text{ y } 9}$$

SALE "-2" MULTIPLICANDO

SALE "2" MULTIPLICANDO

$\Rightarrow$ COMO $\int \ln t \, dt = -t + t.\ln t$

$$= \underbrace{-2(-t + t.\ln t)}_{\text{CAMBIO SIGNOS}} + 2(-t + t.\ln t)$$

COMO $t = \frac{x}{2} - 3$ VUELVO A LA VARIABLE x:

$$= 2\left(t - t.\ln t\right) + 2\left(-t + t.\ln t\right) = 2\left[\left(\frac{x}{2}-3\right) - \left(\frac{x}{2}-3\right).\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)\right]\Bigg|_7^8 +$$

$$+ 2.\left[-\left(\frac{x}{2}-3\right) + \left(\frac{x}{2}-3\right).\ln\left(\frac{x}{2}-3\right)\right]\Bigg|_8^9 =$$

$$= 2.\left[\left(\frac{8}{2}-3\right) - \left(\frac{8}{2}-3\right).\ln\left(\frac{8}{2}-3\right)\right] - 2\left[\left(\frac{7}{2}-3\right) - \left(\frac{7}{2}-3\right).\ln\left(\frac{7}{2}-3\right)\right] +$$

$$+ 2\left[-\left(\frac{9}{2}-3\right) + \left(\frac{9}{2}-3\right).\ln\left(\frac{9}{2}-3\right)\right] - 2\left[-\left(\frac{8}{2}-3\right) + \left(\frac{8}{2}-3\right).\ln\left(\frac{8}{2}-3\right)\right] =$$

$$= \underbrace{2\left[1 - 1.\underbrace{\ln 1}_{0}\right]} - \underbrace{2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.\underbrace{\ln\frac{1}{2}}_{-0,69\ldots}\right]} + \underbrace{2.\left[-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}.\underbrace{\ln\frac{3}{2}}_{0,40\ldots}\right]} - \underbrace{2\left[-1 + 1.\underbrace{\ln 1}_{0}\right]} =$$

$$= \quad 2 \quad - \quad 1,69\ldots \quad + \quad (-1,78\ldots) \quad - \quad (-2) \quad =$$

$$= 0,523\ldots$$

ES EL ÁREA PEDIDA.

<u>Atención</u>: En (*) yo supuse que alguna vez ya resolviste (en clase o por tu cuenta) la integral del logaritmo natural de "x". Supuse que sabías que

AGREGÁLA A TU TABLA DE ¡INTEGRALES!

$$\int \ln x \, dx = -x + x.\ln x + c$$

Si nunca lo hiciste o no lo sabías, acá va la explicación usando el método de integración por partes :

$$\Rightarrow \int \ln x \, dx = \int 1.\ln x \, dx$$

INVENTO EL TRUCO $\ln x = 1.\ln x$

PARA TOMAR $\begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ COMO $u' = 1 \xrightarrow{\text{INTEGRO}} u = x$

$v = \ln x \xrightarrow{\text{DERIVO}} v' = \frac{1}{x}$

$\Rightarrow$ (POR FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES) :

$$\int \underbrace{1}_{u'}.\underbrace{\ln x}_{v} \, dx = \underbrace{x}_{u}.\underbrace{\ln x}_{v} - \int \underbrace{\cancel{x}}_{u}.\underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}}_{v'} \, dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \ln x \, dx = x.\ln x - \underbrace{\int 1 \, dx}$$

¡INMEDIATA! $\int 1 \, dx = x + c$

$$\Rightarrow \int \ln x \, dx = x.\ln x - x + c$$

QUE ES LA FÓRMULA (*) A LA QUE QUERÍAMOS LLEGAR

K MATEMATICA Segundo Parcial ASIMOV TEMA 2

APELLIDO:.................NOMBRES:......................D.N.I:.................

1	2	3	4	NOTA

INSCRIPTO EN : SEDE:........DIAS:..........

HORARIO:.........AULA:......

CORRECTOR:

NOTA 1er. PARCIAL:

PROMOCIONA	RINDE FINAL	RECUPERA: 1ro-2do	INSUFICIENTE

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

3. Calcular $\int \left(6.e^{2x}.sen(e^{2x}) + 9x^2\right) dx$.

Acá sólo tenemos que calcular una integral que es:

$$\int(6.e^{2x}.sen(e^{2x}) + 9x^2) \, dx = \int(6.e^{2x}.sen(e^{2x})dx + \int 9x^2 dx$$

Resuelvo cada integral por separado y después las sumo :

$$\int 9\,x^2dx = 9\int x^2dx = 9.\,{x^{2+1}}/{2+1} = 9/3.x^3 = 3x^3$$

Para la otra integral como la que está adentro del seno aparece afuera me va a convenir usar una sustitución $\int (6.e^{2x}.sen(e^{2x})\,dx$

Haciendo la sustitución $\begin{cases} u = e^{2x} \\ du = 2.e^{2x}\,.\,dx \Rightarrow \dfrac{du}{2} = e^{2x} \end{cases}$

Y ahora la integral que queda es

$$\int 6/2\ .sen(u)\ du = 6/2\ .\int sen(u)\ du = 3.(-\cos(u))$$

Reemplazando por lo que sustituí tengo

$$3.(-\cos(u)) = -3.\cos(u) = -3.\cos(e^{2x})$$

La integral que me daban vale:

$$\int (6.e^{2x}.sen(e^{2x}) + 9x^2)\,dx = -3.\cos(e^{2x}) + 3x^3 + C$$

Ojo: esta es una integral indefinida. No te olvides de la constante C (!)

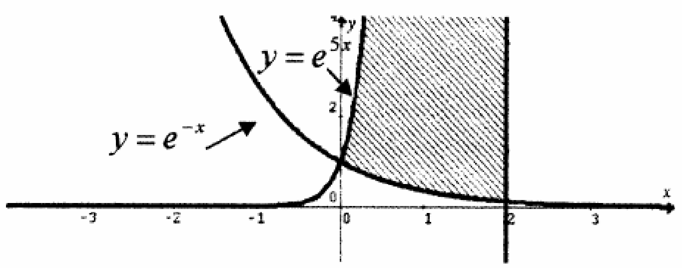
---

4. Calcular el área encerrada por los gráficos de $y=e^{5x}$; $y=e^{-x}$; $x=2$.

Tenemos un ejercicio de área entre dos funciones. Todos estos ejercicios salen con la fórmula:

$$\textbf{Área} = \int_a^b f(x) - g(x)dx$$

a y b son los límites de integración. f es la función que está por arriba en el gráfico, y g por abajo. Entonces, es un poco más fácil de ver si hacemos un dibujito :



Fijate una cosa, e^{5x} corta con la recta vertical x = 2 cuando y = e^{10}, ya que y es tan grande en la región del gráfico que está arriba no está la región completa. Como y = e^{5x} es el techo e y = e^{-x} es el piso, queda que el área es:

$$\int_a^b e^{5x} - e^{-x}dx$$

Antes de empezar a hacer cuentas, tenemos que ver quiénes son a y b.
O sea, ver dónde se cortan las funciones. Para esto igualamos. Me conviene ver en qué puntos se cruzan las funciones, o sea, dónde son iguales.

$$e^{5x} = e^{-x} \Rightarrow e^{5x} \div e^{-x} = 1$$

$$e^{5x-(-x)} = 1 \Rightarrow e^{6x} = 1$$

Aplico logaritmo para bajar la x

$$\mathrm{Ln}\,(e^{6x}) = \ln(1) \Rightarrow 6x \,.\, \ln(e) = 0$$

$$\text{como } \ln(e) = 0$$

$$6\,x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ya tenemos los límites de integración. Son : x = 0 (Que era donde ambas funciones se cortaban) y x = 2 (te lo daban en el enunciado).

Como y= e^{5x} es el techo e y= e^{-x} es el piso, queda que el área es: $\int_0^2 e^{5x} - e^{-x}\,dx$

Puedo separar la resta y queda: $\int_0^2 e^{5x} - e^{-x}dx = \int_0^2 e^{5x}dx - \int_0^2 e^{-x}dx$

Y resuelvo cada integral por separado: $\int_0^2 e^{5x}dx = \int_0^{10} e^{u}\,\frac{du}{5}$

Haciendo sustitución $\begin{cases} u = 5\,x \\ du = 5\,dx \Rightarrow \frac{du}{5} = dx \end{cases}$

Falta la otra integral que es muy parecida así que vamos a hacer otra sustitución

$$\int_0^{10} e^{u}\,\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int_0^{10} e^{u}du = \frac{1}{5}(e^{u})_0^{10} = \frac{1}{5}\left(e^{10} - e^{0}\right) = \frac{1}{5}\left(e^{10} - 1\right)$$

Reemplazando en la integral: $\begin{cases} u = -\,x \\ du = -\,dx \Rightarrow -\,du = dx \end{cases}$

$$\int_0^2 e^{-x}dx = \int_0^{-2} e^{u}(-du) = -\int_0^{-2} e^{u}du = -(e^{u})_0^{-2} = = -(e^{-2} - e^{0}) = -(e^{-2} - 1)$$

Entonces el área que buscábamos es:

$$\frac{1}{5}\,(e^{10} - 1) - (-(e^{-2} - 1)) = \frac{1}{5}e^{10} - \frac{1}{5} + e^{-2} - 1$$

$$= \frac{1}{5}e^{10} + e^{-2} - \frac{6}{5}$$

El área encerrada entre f(x) y g(x) es $\frac{1}{5}e^{10} + e^{-2} - \frac{6}{5}$

J MATEMATICA Segundo Parcial ASIMOV TEMA 4

APELLIDO:.................. NOMBRES:.................... D.N.I:................

1	2	3	4	NOTA

CORRECTOR:

INSCRIPTO EN : SEDE:........DIAS:.........

HORARIO:.........AULA:.....

NOTA 1er. PARCIAL:

PROMOCIONA	RINDE FINAL	RECUPERA: 1ro-2do	INSUFICIENTE

En cada ejercicio escriba todos los razonamientos que justifican la respuesta

3. Calcular $\int (x-4)\sqrt{5x}\,dx$

Para calcular la integral, como tengo una multiplicación, voy a hacer partes:

$$u = x - 4 \quad \rightarrow \quad u' = 1$$

Tomo $v' = \sqrt{5x} \longrightarrow v = \frac{2}{15}.(5x)^{3/2}$

Para sacar v' lo que hago es una sustitución

$$\int \sqrt{5x}dx = \int \sqrt{u}.\frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{5}\frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{2}{15}u^{3/2}$$

$$\begin{cases} u = 5x \\ du = 5\,dx \Rightarrow \frac{du}{5} = dx \end{cases}$$

Vuelvo a la integral que tenía

$$\int (x-4)\sqrt{5x}dx = \int u.v' = u.v - \int u'.v =$$

$$= (x-4)\frac{2}{15}.(5x)^{3/2} - \int 1.\frac{2}{15}(5x)^{3/2}dx$$

La integral que quedó parece fea, pero si hacemos una sustitución como hicimos antes,

$$\int \frac{2}{15}(5x)^{3/2}dx = \frac{2}{15}\int u^{3/2}\frac{du}{5} = \frac{2}{75}\frac{u^{3/2+1}}{3/2+1} =$$

$$\frac{2}{75}.\frac{2}{5}.(5x)^{5/2}$$

Entonces juntando lo que calculé, tengo:

$$\int (x-4)\sqrt{5x}dx = (x-4)\frac{2}{15}.(5x)^{3/2} - \frac{4}{375}.(5x)^{5/2}$$

Hagamos este otro:

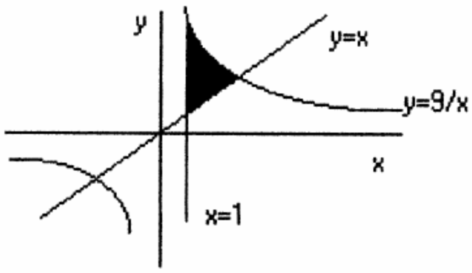
4. Hallar el área de la región limitada por las curvas:

$y = x$; $y = \frac{9}{x}$; $x = 1$.

Igualo las funciones y veo dónde se cortan:

$$x = \frac{9}{x} \longrightarrow x.x = 9$$
$$x^2 = 9 \rightarrow |x| = \sqrt{9}$$

Se cortan en x = 3 y x = -3. Hago el gráfico para ver qué tengo que integrar.



La región a integrar tiene a y = 9/x como techo y a y = x como piso. Y voy a integrar entre x = 3 (que es dónde se corta con la otra función) y x = 1 (que te lo dan como dato). Calculo la integral.

$$\int_1^3 \frac{9}{x} - x dx = \int_1^3 \frac{9}{x} dx - \int_1^3 x dx$$

$$= (9.\ln(x))_1^3 - \left(\frac{x^2}{2}\right)_1^3 = 9.\ln(3) - 9.\ln(1) - \frac{3^2}{2} + \frac{1^2}{2} = \mathbf{= 9.\ln(3) - 4}$$

Entonces el área total es:

Area = 9. ln 3 - 4

---

3. Calcular $\int (2+3\cos x)^5 \operatorname{sen} x \, dx$

Nos dan la integral $\int (2+3\cos x)^5 senxdx$. Para poder resolverla, usemos el método de sustitución. Probemos usando la siguiente sustitución:

$$\mathbf{u = 2 + 3 \cos x \;\Rightarrow\; du = -3 \operatorname{sen} x \, dx \;\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \operatorname{senx} dx = \frac{du}{-3}$$

Ahora, usando esto, podemos plantear: $\int u^5 \frac{du}{-3}$

Saquemos el 1/3 fuera de la integral (Es una constante) y resolvamos:

$-\frac{1}{3}\int u^5 du = -\frac{1}{3}\frac{u^6}{6}$ $\Rightarrow$ **reemplacemos u = 2+3 cos x y nos queda$\Rightarrow$**

$$\int (2+3\cos x)^5 senxdx = \boxed{\frac{-(2+3\cos x)^6}{18} + C}$$

---

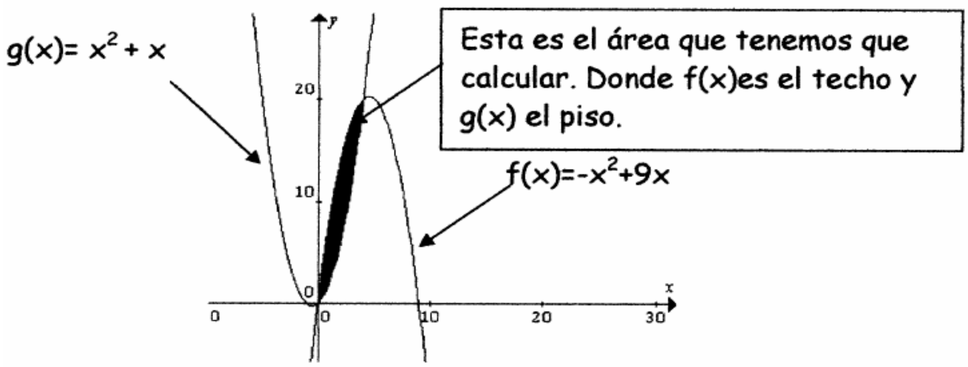
4. Calcular el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones $f(x) = -x^2+9x$ y $g(x) = x^2+x$.

Nos piden que calculemos el área encerrada entre las dos parábolas. Para darnos cuenta cuál es el techo y cuál el piso del área, lo mejor es graficarlas y verlo directamente. Pero si no podemos (O no nos damos cuenta de cómo es la función) tenemos unos truquitos que nos van a dar una pista:
Primero, si igualamos las dos ecuaciones (f(x) = g(x)) podemos obtener los valores en dónde se cruzan (Es decir, los límites del área):

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^2 + 9x = x^2 + x$$
$$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(2x - 8) = 0$$
$$\Rightarrow \mathbf{x = 0} \text{ y } (2x - 8) = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 4}$$

Esos son los valores de x entre los que tenemos que integrar. Ahora, para saber (sin graficar) cuál función es el techo y cuál el piso, evaluemos ambas funciones en algún valor perteneciente a ese intervalo (0, 4) y veamos qué valor de y toma cada función: la función que tome el valor más alto será el techo del área, y la otra el piso.

f(2) = 14 **g(2) = 6** → como en x = 2 f toma valores más altos, podemos saber que es porque está por arriba de g. **f es el techo y g es el piso !**
Por si no me crees, acá te dejo el grafiquito de ambas funciones...



Bien, ahora planteemos la integral, nos queda:

$$A = \int_0^4 f(x) - g(x) \Rightarrow \int_0^4 \left(-x^2 + 9x\right) - \left(x^2 + x\right)dx$$

Para poder resolverlo más fácil, saquemos los paréntesis y planteemos las integrales por separado:

$$A = \int_0^4 \left(-x^2 + 9x - x^2 - x\right)dx =$$

$$= \int_0^4 -2x^2 + 8x\,dx \quad = -2\int_0^4 x^2 dx + 8\int_0^4 x\,dx$$

Son dos integrales de tablas… así que hagámosla:

$$-2\int_0^4 x^2 dx = -2\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 \qquad \text{y} \qquad 8\int_0^4 x\,dx = 8\frac{x^2}{2}\Big|_0^4$$

Ahora, evaluemos cada función en 4 y restémosle a función evaluada en 0:

$$A = \underbrace{\left(-2\frac{64}{3}\right) - \left(-2\frac{0}{3}\right)}_{\text{La integral de f(x) evaluada en los dos puntos (4 y 0)}} + \underbrace{\left(4\cdot 4^2\right) - \left(4\cdot 0^2\right)}_{\text{La integral de g(x) evaluada en los dos puntos (4 y 0)}}$$

Hacemos las cuentas y obtenemos el valor del área

$$\boxed{A = 64/3}$$

---

3. Calcular $\int \frac{\sqrt{5+3\ln x}}{x}\,dx$

Tenemos que calcular la integral $\int \frac{\sqrt{5+3\ln x}}{x}dx$, usando alguno de los métodos de sustitución o partes. No parece muy fácil hacer integral por partes. Entonces, tenemos que hacer una sustitución. Pero ¿Cómo nos damos cuenta de qué sustitución hay que hacer ?

Bueno, en el numerador tenemos algo bastante complicado, con una raíz cuadrada y un logaritmo. Además, todo esto está dividido por x. Pero acordate que 1/x es la derivada de ln x. Entonces podemos hacer la sustitución:

$$U = 5 + 3 \ln x \quad \rightarrow \quad du = u'.dx = 3 \,.\, 1/x\ dx$$

La integral nos queda: $\int \frac{\sqrt{5+3\ln x}}{x}dx = \int \frac{1}{3}\times\sqrt{u}\times 3\times\frac{1}{x}dx =$

$$= \frac{1}{3}\times\int\sqrt{u}du \quad = \quad \frac{1}{3}\times\int u^{1/2}du$$

Esta integral la sabemos calcular. Nos queda:

$$\int \frac{\sqrt{5+3\ln x}}{x}dx \;=\; \frac{1}{3}\times\frac{u^{3/2}}{3/2}+C \;=\; \frac{2}{9}\times u^{3/2}+C$$

Ahora, nos falta reemplazar u por su valor:

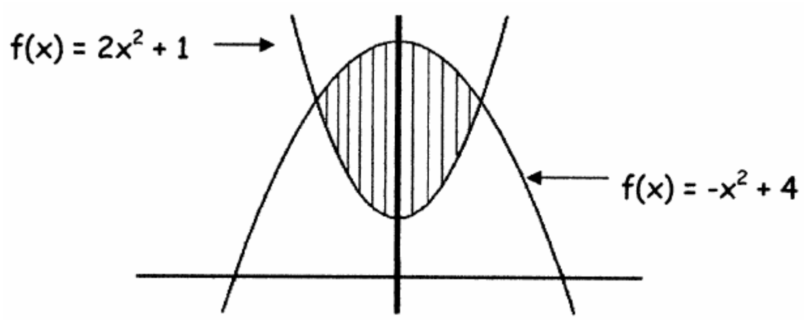
$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{5+3\ln x}}{x}dx = \frac{2}{9}\times(5+3\ln x)^{3/2} + C$$

<u>OJO</u>: Esta es una integral indefinida. No te olvides de la constante C.

---

4. Hallar el área de la región encerrada por las curvas: $y=2x^2+1$; $y=-x^2+4$.

Lo primero es hacer un gráfico para tener una idea de qué área calculamos:



Este área tiene como piso la función $g_{(x)} = 2x^2 + 1$, y como techo a $f_{(x)} = -x^2 + 4$. Entonces, calculemos el área como:

$$\textbf{Área} = \int_a^b (-x^2+4)-(2x^2+1)dx = \int_a^b -3x^2+3dx$$

a y b son los límites de la integración: son los valores de x donde se cortan las funciones. ¿ Cómo los calculamos ? Las funciones se cortan cuando son iguales. Entonces, lo que hacemos es igualarlas, y calculamos x:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 2x^2 + 1 = -x^2 + 4 \Rightarrow 2x^2 + x^2 = 4 - 1$$
$$\Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = 3/3 = 1$$
$$\Rightarrow |x| = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ ó } x = -1$$

Entonces, tenemos a = -1 y b = 1. Ahora calculamos la integral:

$$\int_{-1}^{1} -3x^2+3dx = -3\frac{x^3}{3}+3x\Big|_{-1}^{1} = -x^3+3x\Big|_{-1}^{1}$$

Evaluamos la integral en x = 1 y en x = 0 - 1 y hacemos la resta:

$$-x^3+3x\Big|_{-1}^{1} = [-1^3 + 3\ .1] - [-(-1)^3 + 3\ .\ (-1)] = 4$$

Nota: Si te equivocaste y pusiste al revés el techo y el piso, no hay problema. Te vas a dar cuenta porque el área te queda negativa, y no puede ser.

---

3. Calcular $\int (x - \frac{1}{2}) e^{2x^2-2x}\, dx$

Tenemos que calcular la integral $\int (x-\frac{1}{2})e^{2x^2-2x}$.

Así como está escrita, esta integral no la podemos calcular directamente. Entonces, vamos a tener que usar algún método para que nos quede algo más fácil. El más cómodo es el de sustitución, porque hay que hacer menos cuentas. Siempre fijate si no se puede hacer una sustitución para que quede más fácil. En este caso, podemos tomar

$$u = 2x^2 - 2x \quad \rightarrow \quad du = u'.dx = (4x - 2)\, dx$$

Esto nos sirve bastante, porque en el integrando tenemos $(x - 1/2) = 1/4.(4x - 2)$. ¿ Pero cómo te das cuenta que conviene hacer una sustitución ? La única forma es después de hacer muchos, muchos ejercicios. Así que antes del parcial, practicá mucho estos ejercicios porque sino, no salen. Veamos cómo nos queda:

$$\int (x-\frac{1}{2})e^{2x^2-2x}dx \quad = \quad \int e^u.\frac{1}{4}.(4x-2)dx \quad = \quad \frac{1}{4}.\int e^u du$$

Esta integral la sabemos calcular. Nos queda: $\frac{1}{4}.\, e^u + C$. Ahora solamente nos falta volver a la variable original. Cambiamos u por $2x^2$-2x y nos queda:

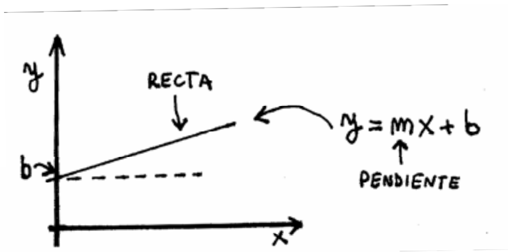
$$\int (x-\frac{1}{2})e^{2x^2-2x} = \frac{1}{4}.e^{2x^2-2x} + C$$

FIN DE LOS EJERCICIOS DE PARCIALES DE INTEGRALES

RESUMEN Y FÓRMULAS ÚTILES

Cuadrado de un binomio $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Ecuación de una recta



$$y = m\,x + b$$

VALOR DE LA COORDENADA $\underline{Y}$ — PENDIENTE DE LA RECTA — VALOR DE LA COORDENADA $\underline{X}$ — LUGAR DONDE LA RECTA CORTA AL EJE $\underline{Y}$

Soluciones de una ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ECUACIÓN CUADRATICA

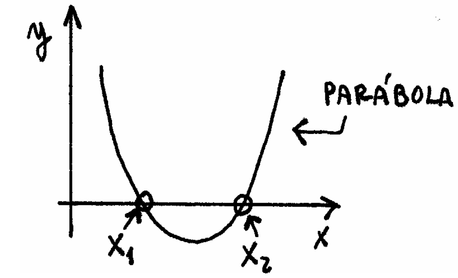
RAICES

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si en la ecuación Y = a x^2 + b x + c el valor de <u>a</u> es negativo, la parábola va para abajo

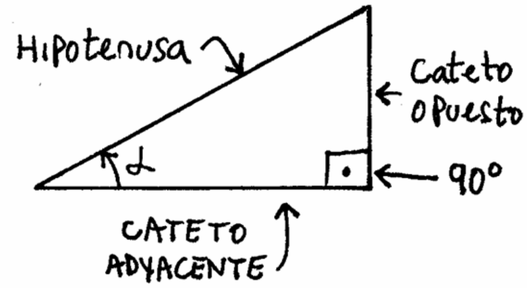
$$\alpha = \frac{-b}{2a} \leftarrow$$ COORDENADA EQUIS DEL VERTICE

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a} \leftarrow$$ COORDENADA $\underline{Y}$ DEL VERTICE



Trigonometría

TRIÁNGULO RECTÁNGULO $\longrightarrow$



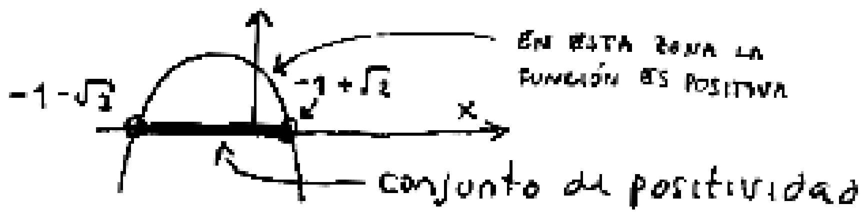
$$\text{Sen}\,\alpha = \frac{op}{hip} \;;\; \cos\alpha = \frac{ady}{hip} \;;\; tg\,\alpha = \frac{op}{ady} \Leftarrow$$ **FUNCIONES TRIGONOMETRICAS**

$$\boxed{hip^2 = ady^2 + op^2} \Longleftarrow$$ **TEOREMA DE PITAGORAS**

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

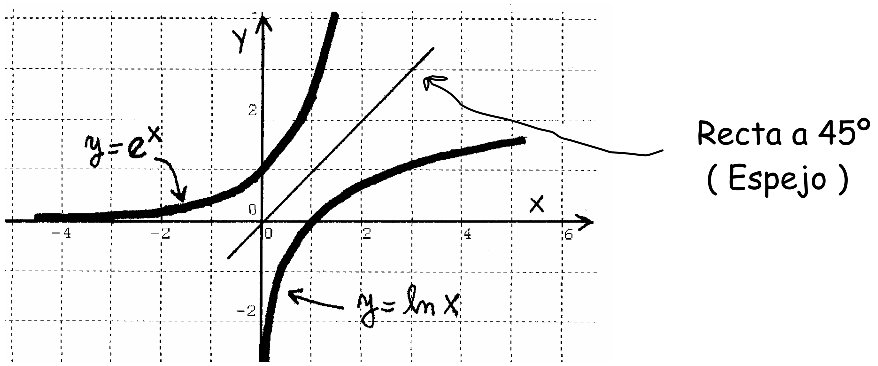
CONJUNTO DE POSITIVIDAD

Es la parte del eje x donde la función es positiva



FUNCIÓN INVERSA

De la función que me dan tengo que despejar x. La función inversa se grafica como si estuviera reflejada en la recta y = x



ASINTOTAS

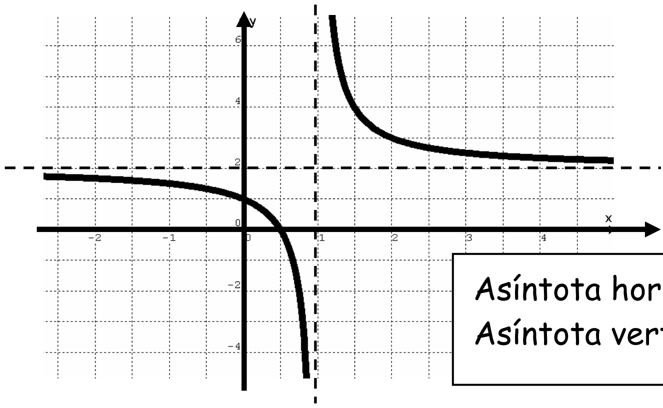
<u>ASÍNTOTA VERTICAL</u>: Una función tiene asíntota vertical en un punto **a** cuando acercándome al punto <u>a</u> la función tiende a $+\infty$ o a $-\infty$. Una función tiene asíntota vertical en x = a si:

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \pm\infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to a^-} F(x) = \pm\infty$$

<u>ASÍNTOTA HORIZONTAL</u>: Una función tiene una asíntota horizontal cuando tienda a tomar un valor constante al tomar <u>x</u> valores tendientes a infinito o a menos infinito. Una función tendrá asíntota horizontal en y = b cuando se cumpla que:

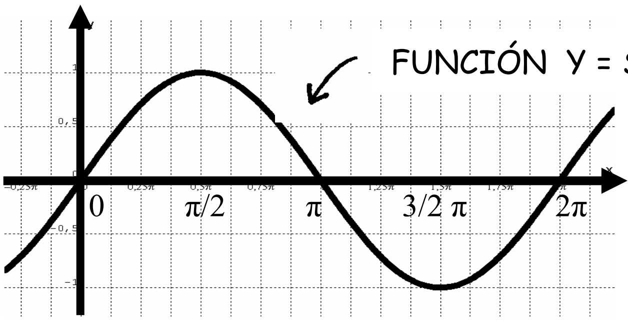
$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = b \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = b$$

$$y = \frac{1}{x-1} + 2$$

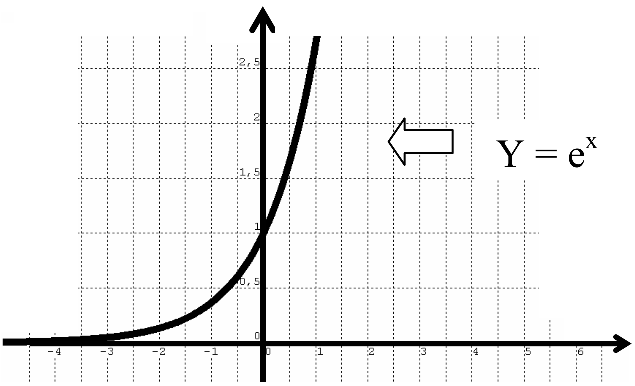


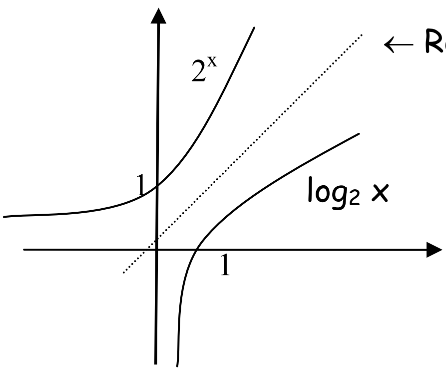
Asíntota horizontal en y = 2.
Asíntota vertical en x = 1

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS



FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

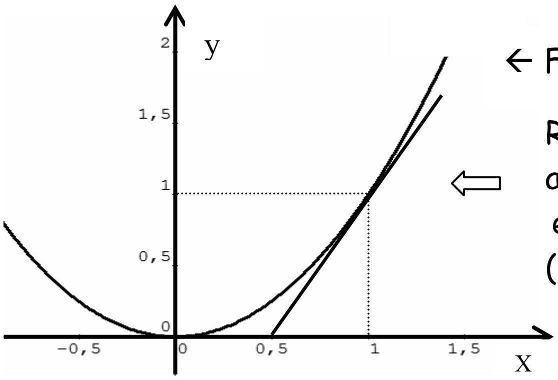




$\log_a (a^x) = x$ **$a^{(\log_a x)} = x$** **$\mathrm{Log}_a (x.y) = \log_a (x) + \log_a (y)$**

$\mathrm{Log}_a (x/y) = \log_a (x) - \log_a (y)$ **$\mathrm{Log}_a (x^r) = r.\log_a x$**

DERIVADAS



← Función $Y = x^2$

Recta tangente
a la función $Y = x^2$
en el punto x = 1
(Derivada)

La derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Si la función crece, la derivada es positiva. Si la función decrece, la derivada es negativa. Si la función es horizontal, la derivada es cero.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}} \longleftarrow$$

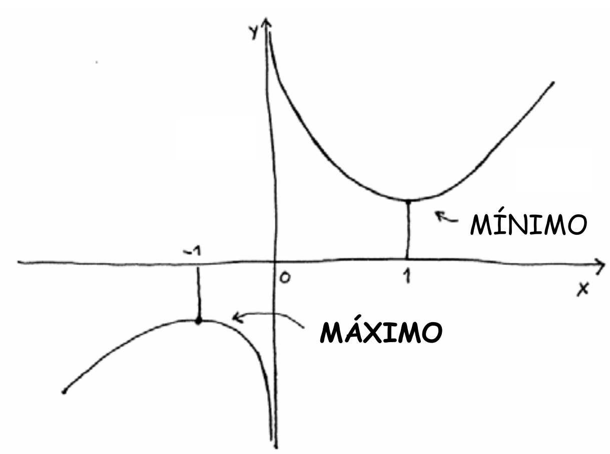
Definición de derivada de una función en un punto

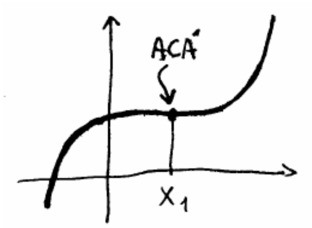
$(f.g)' = f'.g + f.g' \leftarrow$ Derivada del producto

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2} \leftarrow$ Derivada de un cociente

Si $h(x) = f[\,g(x)\,] \Rightarrow \boxed{h'(x) = f'[g(x)].g'(x)}$ $\leftarrow$ Regla de la cadena

Donde la derivada de una función es cero, ahí hay un posible máximo o mínimo.
(Pero no es seguro porque puede ser un punto de inflexión, también)



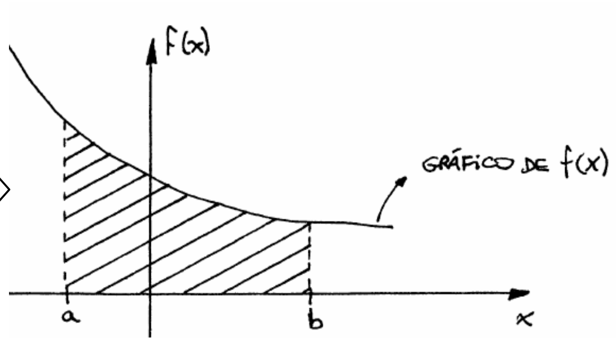


En el punto x_1 no hay máximo ni mínimo. x_1 es punto de inflexión

INTEGRALES

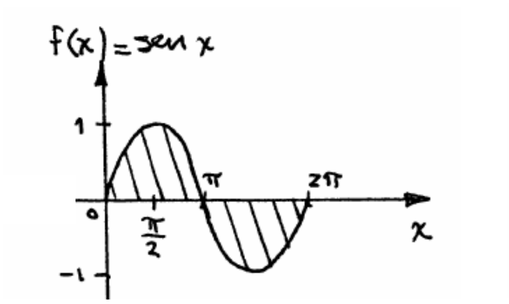
La integral de una función entre 2 puntos a y b es el área bajo la curva entre esos 2 puntos

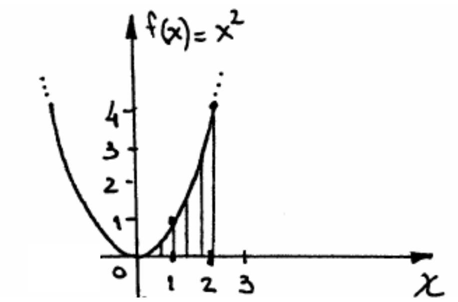
AREA ENCERRADA
BAJO LA CURVA



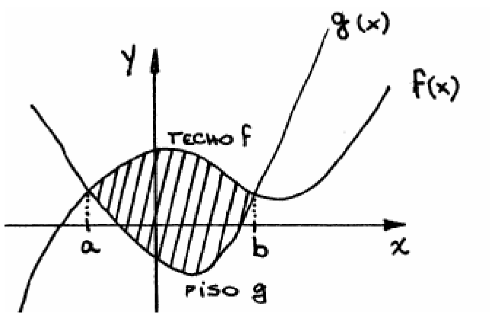
$$\int_a^b f(x)\,dx =$$

El área sombreada está marcada por los bordes x = a, x = b, el eje equis y la curva de la función f de equis





AREA ENCERRADA ENTRE 2 CURVAS



$$\int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

TECHO PISO

REGLA DE BARROW ← (LEER)

Si $\int f(x)\,dx = g(x) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$

TABLA DE DERIVADAS

Función	Derivada	Ejemplos	
Constante			
y=k	***y'=0***	***y=8***	***y'=0***
Identidad			
y=x	***y'=1***	***y=x***	***y'=1***
Funciones potenciales			
$y = u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$	$y = (2x^2+1)^3$	$y' = 3(2x^2+1)^2 \cdot 4x$
$y = \dfrac{1}{u^m}$	$y' = -\dfrac{mu'}{u^{m+1}}$	$y = \dfrac{1}{(2x+1)^3}$	$y' = -\dfrac{6}{(2x+1)^4}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{5x}$	$y' = \dfrac{5}{2\sqrt{5x}}$
$y = \sqrt[m]{u}$	$y' = \dfrac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$	$y = \sqrt[5]{3x^2}$	$y' = \dfrac{6x}{5\sqrt[5]{(3x^2)^4}}$
Funciones exponenciales			
$y = e^u$	$y' = u'e^u$	$y = e^{3x^2+1}$	$y' = 6xe^{3x^2+1}$
$y = a^u$	$y' = u'a^u La$	$y = 5^{3x-4}$	$y' = 3 \cdot 5^{3x-4} L5$
Funciones logarítmicas			
$y = Lu$	$y' = \dfrac{u'}{u}$	$y = L(x^2+7x)$	$y' = \dfrac{2x+7}{x^2+7x}$
$y = \log_a u$	$y' = \dfrac{u'}{u}\log_a e$	$y = \log_2(5x+7)$	$y' = \dfrac{5}{5x+7}\log_2 e$
Funciones trigonométricas			
$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u'\cos u$	$y = \operatorname{sen} 5x$	$y' = 5\cos 5x$
$y = \cos u$	$y' = -u'\operatorname{sen} u$	$y = \cos 3x^2$	$y' = -6x \operatorname{sen} x^2$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u'\sec^2 u$	$y = \operatorname{tg} 7x$	$y' = 7\sec^2 7x$

Derivadas de sumas, restas, productos y cocientes de funciones

$y = ku$	$y' = ku'$	$y = 3x^5$	$y' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$
$y = u + v - w$	$y' = u' + v' - w'$	$y = 3x^2 - 2x + 5$	$y' = 6x - 2$
$y = uv$	$y' = u'v + uv'$	$y = x^2 \cos x$	$y' = 2x \cos x + x^2(-\operatorname{sen} x)$
$y = \dfrac{u}{v}$	$y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$y = \dfrac{2x^2}{x^3 - 1}$	$y' = \dfrac{4x(x^3-1) - 2x^2(3x^2)}{(x^3-1)^2}$

TABLA DE INTEGRALES

$$\int dx = x + C$$

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x+a| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \ (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \ (n \neq -1)$$

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$\int \frac{u'}{u+a} dx = \ln|u+a| + C$$

$$\int u' e^u dx = e^u + C$$

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{\ln a} + C, \ (a > 0, a \neq 1)$$

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotan} x + C$$

$$\int u' \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C$$

$$\int u' \cos u dx = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u + C$$

$$\int u'(1 + \tan^2 u) dx = \tan u + C$$

$$\int \frac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} dx = -\operatorname{cotan} u + C$$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{u'}{\cos^2 u} dx = \tan u + C$
$\int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$	$\int u'(1 + \tan^2 u) dx = \tan u + C$
$\int \frac{1}{\text{sen}^2 x} dx = -\text{cotan } x + C$	$\int \frac{u'}{\text{sen}^2 u} dx = -\text{cotan } u + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \text{arcsen } x + C$	$\int \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}} dx = \text{arcsen } u + C$
$\int \frac{1}{1 + x^2} dx = \arctan x + C$	$\int \frac{u'}{1 + u^2} dx = \arctan u + C$

$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{\text{a}} + C$	$\int \frac{u'}{a^2 + u^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{\text{a}} + C$
Integral de la suma o resta	$\int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx$
Integración por partes	$\int u dv = uv - \int v du$
Regla de Barrow	$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$

Siendo: $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ funciones de $\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{C}$ constantes.

INDICE

Pag

2 .... **DERIVADAS**

7 Cálculo de derivadas por definición

9 ....Función derivada

11 Propiedades de las derivadas

14.......Derivada del producto y de la división

15 Tabla de derivadas

16....... Derivada de composición de funciones. Regla de la cadena

19 Velocidad

23.......Derivada de funciones inversas.

25 Derivadas sucesivas

25.......Crecimiento y decrecimiento.

27 Análisis de una función. Puntos críticos

27.......Máximos y mínimos. Puntos de Inflexión. Concavidad

34 Método de la derivada segunda

41...... EJERCICIOS DE PARCIALES

53 ...... **INTEGRALES.**

56 Integral indefinida.

58.......Integral indefinida de una función f(x)

59 Propiedades de la integral indefinida

61.......Método de Sustitución.

64 Integración por partes

70....... Integral Definida

70 Regla de Barrow

72.......Propiedades de la integral definida.

73 Cálculo de Áreas.

77.......Ejercicios de parciales.

97 Fórmulas útiles

OTROS APUNTES ASIMOV

*** MATEMATICA - EJERCICIOS RESUELTOS**
Son los ejercicios de la guía resueltos y explicados.

*** PARCIALES RESUELTOS**
Son exámenes que fueron tomados el año pasado. Todos los ejercicios están explicados También hay parciales resueltos de años anteriores.

*** FINALES RESUELTOS**
Son exámenes que fueron tomados el año pasado. También hay finales resueltos de años anteriores. Todos los ejercicios están explicados

OTROS LIBROS:

*** QUÍMICA PARA EL CBC**
*** FISICA PARA EL CBC**
*** BIOFISICA PARA EL CBC**

Tienen lo que se da en clase pero hablado en castellano.

<u>Temas que están en la 1era parte</u>:

FUNCIONES