Tips & Pauta Trabajo Dirigido C3

Introducción a la Física Newtoniana
16 de junio de 2017

Tutores: Camila Rearte, Benjamín Pérez, Nicolás Valdés, Nicolás Toro, Juan Carlos Cuevas

1. Tips Generales Para la Vida

- (Creo que) Esta prueba no va a tener preguntas conceptuales como las de la P1, pero sí va a ser poco dura en cálculos por lo que entiendo. Esto no significa que va a ser fácil; tienen que tener muy claros todos los conceptos, y una forma muy buena de ver esto es pensando con preguntas conceptuales. Si entienden bien todos los conceptos, se les hace mucho más fácil la pega.
- No empiecen a matraquear altoque. Lean la pregunta con cuidado, traten de imaginarse la situación planteada por un par de minutos (por lo menos) para tener muy claro qué está ocurriendo. Deben tener un "video" del problema en su mente. Con alta frecuencia los errores más grandes nacen de que uno no se imaginó bien la situación.
- Si hay números en una pregunta, NO LOS USEN hasta el final. Por ejemplo, si un objeto tiene masa de 30 gramos, no usen esto; digan $m = 30g$, y trabajen con m, reemplazando el número sólo al final. Hay distintas razones:
  - Es muy fácil equivocarse multiplicando, sumando y dividiendo números. Esto no pasa mucho con letras; lo bacán es que sólo al final del problema, en la respuesta, tienen que reemplazar números y multiplicar y todas esas cosas feas.
  - Cuando hay letras, hacer un análisis del resultado (ver siguiente punto) es mucho más fácil; esto no es posible cuando su resultado final es sólo un número.
- Como les enfaticé hoy, traten de analizar sus respuestas! Asegúrense que están bien las dimensiones; si no lo están, hay algún error. Si hay un parámetro en su respuesta que no es dato del problema (algo típico: tener una tensión desconocida), no debería estar ahí! También, tomen distintos límites para ver que tiene sentido la respuesta. PORFA HAGAN ESTO, LES DOY DECIMAS POR ESTE TIPO DE ANALISIS :D
- Traten de disfrutar el control, les prometo que ayuda :)

2. Tips de Momentum y Trabajo/Energía

1. El momentum no siempre se conserva. Por ejemplo, si consideramos una pelota que se lanza hacia arriba, cambia todo el rato su momentum; esto es fácil de ver al analizar su velocidad, que cambia. En este caso no se conserva en el eje y ya que hay una fuerza externa en esa dirección (gravedad). Pero *durante un choque*, el momentum sí se conserva, ya que el choque ocurre de forma tan rápida que las fuerzas externas no tienen tiempo para modificar el momentum. Por esto es útil analizar el momentum justo antes, y justo después, de un choque. [1]
2. Importa MUCHO el sistema que uno considera al analizar conservación de momentum. Por ejemplo, el momentum de una pelota sobre la Tierra en caída libre no se conserva. Pero si uno considera el sistema Pelota+Tierra, sí se conserva (ya que la pelota también atrae a la Tierra); deja de haber una fuerza "externa" al sistema.

[1] Discusión hermosa de por qué el momentum se conserva siempre en sistemas cerrados, y la energía mecánica no: $https://physics.stackexchange.com/questions/92051/how-can-momentum-but-not-energy-be-conserved-in-an-inelastic-collision$

3. MUY IMPORTANTE: El trabajo total es el cambio de energía cinética. No cambio de energía mecánica. El cambio de energía mecánica es cero, a menos que hayan fuerzas no conservativas (como roce; ésta fuerza disminuye la energía mecánica). Pero SIEMPRE trabajo total es sólo cambio en energía cinética. A las fuerzas conservativas les podemos asociar una energía potencial (a cada fuerza su propia energía potencial), de manera que $\Delta U_F = -W_F$ (el cambio de energía potencial desde A hasta B asociado a una fuerza F es menos el trabajo que hace esta fuerza en llevar la partícula desde A hasta B).

4. Si hay un choque en 2 dimensiones, la ecuación de conservación de momentum es una ecuación *vectorial*, por lo que hay que considerar momentum en cada eje (vertical y horizontal, por ejemplo). Es análogo a lo que ocurría con cinemática en más dimensiones; aparecen más ecuaciones. Energía cinética eso sí es escalar, por lo que sigue habiendo una sola ecuación.

3. Pauta

P1. (a) Primero, un par de aclaraciones: la masa oscila horizontalmente, y la plasticina tiene velocidad cero al caer inicialmente sobre la masa desde arriba. Vean el Tip 1; considerando esto, sabemos que durante el choque entre las dos masas conserva el momentum (pero durante la oscilación NO se conserva, ya que está la fuerza externa del resorte).

La energía no se conserva. La razón detrás de esto la podemos ver con un ejemplo: imaginemos que la masa tiene masa m y la plasticina también. Entonces, el momentum antes del choque es mv, con v la velocidad que tiene la masa en su punto medio de oscilación. Después del choque sigue siendo mv, sólo que las dos masas están pegadas y tienen velocidad u, por lo que tienen momentum $2mu$ en conjunto. Igualando momentum inicial con final, tenemos que $u = v/2$. Si ahora consideramos la energía cinética, tenemos que al principio $K_i = mv^2/2$. Al final, $K_f = 2mu^2/2$. Reemplazando $u = v/2$, tenemos que $K_f = K_i/2$, entonces hay una pérdida de energía. Intuitivamente se gana masa y se pierde velocidad, pero dado que para energía la velocidad es cuadrática, esta pérdida afecta más que la ganancia de masa.

(b) Se sigue conservando el momentum justo antes y después del choque, como antes. Ahora la energía también se conserva. La razón es que en su estiramiento máximo, sólo hay energía potencial elástica, que es igual a $kx^2/2$, y esto no depende de la masa. Entonces la energía mecánica no cambia.

(c) No funciona ya que a pesar de que el viento empuje la vela, también la alumna al soplar recibe un impulso hacia atrás, y se cancelan estas dos contribuciones. (Estoy asumiendo que el choque del viento con la vela es inelástico. Piensen en por qué esto *sí* funciona si el choque es elástico.)

(d) El momentum inicial en el sistema Velero+Alumna+Piedras es cero, y consideramos que no hay fuerza externa neta (no hay roce con el mar por ejemplo). Cuando lanza N piedras, está lanzando una masa Nm con velocidad v hacia atrás, por lo que el momentum de esto es $-Nmv$. Para que siga siendo cero, el velero y la niña deben tener un momentum Nmv. Dado que la masa del velero y la alumna es $M - Nm$ (porque ya no hay piedras), su velocidad será $Nmv/(M - Nm)$. Esto no es equivalente a lanzar una piedra a la vez. (*Lo que viene no es para nada fundamental, se lo pueden saltar si están cortos de tiempo.*) Analicemos el caso $N = 2$ para que sea más simple.

El momentum p_1 al principio es cero. El momentum después del primer lanzamiento va a ser $p_2 = -mv + (M - m)u$ (donde u es la velocidad del velero y la niña y la piedra restante). Momentum se conserva, entonces $p_2 = 0 \implies u = mv/(M-m)$. Después del segundo lanzamiento tenemos: $p_3 = -mv - m(v - u) + (M - 2m)w$, con w la velocidad final de la niña y el velero. La razón que la segunda piedra tiene velocidad $v - u$ es que la niña la lanza con velocidad v con respecto a ella misma, y ella después del primer lanzamiento está avanzando. Hay que tomar esto en cuenta dado que estamos mirando la situación desde afuera. Sabemos que $p_3 = 0$, y conocemos u entonces podemos despejar w:

$$w = \frac{2mv - \frac{m^2 v}{M-m}}{M - 2m} \neq \frac{2mv}{M - 2m} \tag{1}$$

Donde la segunda expresión es lo que sale al lanzar ambas piedras simultáneamente.

(e) Sí funciona. Es análogo, sólo que ahora las piedras son simplemente el viento, y en vez de que la alumna empuje el viento hacia atrás, lo hace el ventilador. El funcionamiento es parecido a cuando uno nada. Lo que uno hace es empujar agua hacia atrás para ser impulsado hacia adelante (de la misma forma que el ventilador empuja viento hacia atrás, para impulsar al velero hacia adelante). Si consideramos el sistema Velero+Viento, el momentum se conserva. Si consideramos el sistema Velero solamente, no se conserva el momentum (hay una fuerza externa aplicada por el viento sobre el ventilador). Si tienen dudas con esto pregunten!!! La energía mecánica no se conserva, ya que aumenta la energía en el sistema. Esto es porque el ventilador utiliza energía eléctrica, que no estamos considerando por ahora en la energía mecánica.

(f) Es nulo. Si están curiosos sobre la razón pregunten por el foro, pero es un poco rebuscado entonces dudo que tengan que entender esto perfectamente. Básicamente, para que haya trabajo, el punto de contacto debe moverse. Como la pared no se mueve con la persona, no hay trabajo realizado por su fuerza normal. Lo que sí realiza trabajo son los músculos de los brazos que empujan contra la pared.

(g) La energía de la partícula sí se conserva. El momentum en el eje x de la partícula se conserva, pero en el eje y no.

P2. Para este problema primero hay que hacer un DCL para M y para m. Aquí sólo les diré las fuerzas que actúan sobre cada una, y ustedes hagan los DCL. El ángulo θ se mide entre la barra y la cuerda.

Las fuerzas sobre la argolla de masa M son el peso Mg hacia abajo, la fuerza normal N hacia arriba debido a la barra, la tensión T diagonalmente hacia la derecha y abajo, y el roce f_r hacia la izquierda (ya que compensa la tensión hacia la derecha).

Las fuerzas sobre la masa m son su peso mg hacia abajo, y la tensión T hacia arriba y hacia la izquierda.

La condición para que la argolla comience a moverse es que justo la fuerza de roce sea $f_r = \mu N$ (toma su valor máximo), y que justo haya equilibrio de fuerzas. Entonces, planteamos las ecuaciones de Newton para M en el eje x horizontal, y el eje y vertical:

$$\sum F_x = T\cos(\theta) - \mu N = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_y = N - Mg - T\sin(\theta) = 0 \tag{3}$$

Tenemos dos ecuaciones y tres incógnitas (N, T, y θ). Entonces necesitamos más información...

Ahora también planteamos la ecuación de Newton para la masa m, pero utilizamos un sistema de referencia más conveniente. m está en un movimiento circular (no uniforme, pero sí circular, ya que está con un radio constante L en torno a la argolla, que está quieta). Entonces, hay una aceleración centrípeta $a_c = v^2/L$. Por lo tanto, tomando el eje radial para hacer la sumatoria de fuerzas:

$$\sum F = T - mg\sin(\theta) = ma_c = \frac{mv^2}{L} \tag{4}$$

(Si no entienden este último paso pregunten en el foro porfa!)

Entonces tenemos otra ecuación, pero agregamos otra incógnita: v. Para determinar esto, podemos usar conservación de energía. Si la energía potencial gravitacional al inicio es cero, tenemos que $E_i = 0$. Al final, mientras tanto, tenemos energía cinética positiva y energía potencial gravitacional negativa:

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 - mgL\sin(\theta) = 0 \tag{5}$$

(Donde la última igualdad viene de conservación de energía.) Bueno, entonces ahora tenemos la misma cantidad de ecuaciones e incógnitas, y se puede resolver matraqueando :)

P3. Notemos que la energía inicial esta dada por $E_o = \frac{1}{2}kD^2$. Como queremos ver los valores de D para que la masa se detenga en el sector con roce, analizaremos los extremos donde empieza y donde termina el roce, lo cual determinara un intervalo de valores para D. De esta forma, como la energia se conserva hasta el punto antes de comenzar el roce se tendra:

$$\frac{1}{2}kD^2 = mgH$$

Notemos que cuando la partícula pasa por el sector con roce, la energía no se conserva y se tendrá la siguiente expresión

$$E_{final} - E_{inicial} = W_{roce}$$

Haciendo un DCL en el sector con roce se tiene que $N - mgcos(\alpha) = 0$. Como μ es dinamico se tiene $f_r = \mu N$, por consiguiente: $W_{roce} = -\mu mgcos(\alpha)b$. Ahora se tiene:

$$mg(H + bsin(\alpha)) - \frac{1}{2}kD^2 = -\mu mgcos(\alpha)b$$

Entonces, para el primer extremo se tendrá que $D = \sqrt{\frac{2mgH}{k}}$.
Para el segundo extremo $D = \sqrt{\frac{2mg}{k}(H + bsin(\alpha) + \mu cos(\alpha)b)}$
Esto implica que:

$$D \in \left(\sqrt{\frac{2mgH}{k}}, \sqrt{\frac{2mg}{k}(H + bsin(\alpha) + \mu cos(\alpha)b)}\right)$$

P4. Aclaración: el tiempo pedido es el tiempo que le toma a la penúltima partícula recorrer la distancia d.

Para el caso donde los choques son elásticos, lo que ocurre, dado que todas las partículas tienen la misma masa, es que la primera partícula choca con la siguiente, se queda quieta, y la segunda partícula sale con velocidad v_0 a la derecha. Esto ocurre sucesivamente hasta el final, entonces la última distancia d se recorre con velocidad v_0, por lo que el tiempo que le toma a la última es $\tau = d/v_0$.

Si los choques son inelásticos, lo que ocurre es un poco más complicado. Las partículas se van quedando pegadas, y el momentum se conserva. Entonces para el primer choque, se tiene que

$$mv_0 = 2mv_1 \tag{6}$$

Donde v_1 es la velocidad que tienen las dos masas pegadas después del choque. Entonces, $v_1 = v_0/2$. Veamos el segundo choque, donde viene una masa $2m$ con velocidad v_1 a chocar con una masa m, y se quedan todas pegadas con velocidad v_2 después del choque:

$$2mv_1 = 3mv_2 \implies v_2 = \frac{2}{3}v_1 = \frac{1}{3}v_0 \tag{7}$$

El tercer choque:

$$3mv_2 = 4mv_3 \implies v_3 = \frac{1}{4}v_0 \tag{8}$$

Así vemos (por inducción se puede hacer rigurosamente xD) que la velocidad después de $N-1$ choques va a ser

$$v = \frac{1}{N}v_0 \tag{9}$$

Para la penúltima partícula, en realidad hay $N - 2$ choques (piénsenlo, es contar los choques y las partículas nomás), entonces su velocidad (en conjunto con todas las partículas que quedaron pegadas) será

$$v = \frac{1}{N-1}v_0 \implies \tau = \frac{(N-1)d}{v_0} \tag{10}$$

Y la pérdida de energía será $K_f - K_i$, donde

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{11}$$

$$K_f = \frac{1}{2}(N-1)mv^2 \tag{12}$$

(Donde v ya lo calculamos.)

P5. Asumiremos que el choque es perfectamente inelástico.

(a) Sabemos que durante el choque, dado que es inelástico, no se conserva la energía. Pero después del choque sí, entonces después de eso podemos aplicar conservación de energía.

Opuestamente, durante el choque se conserva el momentum, pero después del choque no, debido a la fuerza externa (del resorte). Entonces aplicaremos conservación de momentum durante el choque nomás.

Comencemos con el choque. El momentum de m antes es mV_0, y el de M es nulo. Después, las masas están juntas con velocidad V desconocida. Conservación:

$$mV_0 = (m+M)V \implies V_0 = V\frac{M+m}{m} \tag{13}$$

Ahora para encontrar V, usaremos conservación de energía después del choque. Al principio hay sólo energía cinética, y al final en la compresión máxima sólo potencial elástica:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}K\Delta^2 \implies V = \Delta\sqrt{\frac{K}{M+m}} \tag{14}$$

Reemplazando esto en la otra ecuación, encontramos que

$$V_0 = \Delta\sqrt{\frac{K(M+m)}{m^2}} \tag{15}$$

Analicen este resultado para asegurarse de que tiene sentido (dimensionalmente y en distintos límites, y que tenga los parámetros del problema necesarios solamente).

(b) La energía inicial es

$$E_i = \frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}m\left(\Delta^2\cdot\frac{K(M+m)}{m^2}\right) = \frac{1}{2}K\Delta^2\frac{(M+m)}{m} \tag{16}$$

La energía final es:

$$E_f = \frac{1}{2}K\Delta^2 \implies E_i - E_f = \frac{1}{2}K\Delta^2\frac{M}{m} \tag{17}$$

Entonces la fracción f de energía inicial que se perdió ($(E_i - E_f)/E_i$) es

$$f = \frac{M}{M+m} \tag{18}$$

Analicen los límites de este resultado también :)

P6. Notemos que la velocidad en $\hat{x}$ es constante ya que no existen fuerzas en este eje. Luego, se tiene que $v_x = \frac{L}{T}$. Analicemos un caso extremo en que $\tau = \frac{T}{2}$, en donde se tiene que la masa que cae justo debajo del punto cúspide describe una caída libre, de esta forma, no hay una velocidad inicial en $\hat{y}$ para esta masa. Por conservación del momentum en $\hat{x}$ se tiene que $mv_x = \frac{m}{2}v' \Rightarrow v' = 2v_x$. De esta forma, se tiene

$$x = \frac{L}{2} + 2v_x \frac{T}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}L$$

.

Analicemos para $t = \tau$ la masa que cae en $x = \frac{L}{2}$

Se tendra que la altura maxima de la trayectoria es $H_{max} = \frac{1}{2}g(\frac{T}{2})^2$.

Luego, por itinerario $\frac{1}{2}g(\frac{T}{2})^2 = v_o\tau + \frac{1}{2}g\tau^2 \Rightarrow v_o = \frac{g}{2\tau}[(\frac{T}{2})^2 - \tau^2]$. Se tiene que justo antes y después del choque el momentum se conserva, mas aun, en $\hat{y}$ inicialmente se tiene $p_o^y = 0$. Dicho esto, es fácil ver que la otra partícula -la que no cae en un tiempo τ- tendrá, en el punto cúspide, un movimiento con una velocidad $v_y = \frac{g}{2\tau}[(\frac{T}{2})^2 - \tau^2]$ y $v_x = \frac{2L}{T}$ Ahora, solo sigue un análisis cinemático para determinar el tiempo y el alcance.

El tiempo de vuelo que tarde en volver a $y = H_{max}$ estará dado por $t = \frac{2v_y}{g}$. A este tiempo, hay que sumarle el tiempo que tarda en recorrer H_{max} tomando en cuenta que ahora tiene la misma rapidez v_y pero hacia abajo. Esto implica que se tendra $\frac{1}{2}g(\frac{T}{2})^2 = v_y t + \frac{1}{2}gt^2$

Llegando a este punto, diremos que t^* es la solución de la ecuación anterior, por lo que el tiempo que demora en caer esta dado por

$$T' = \frac{2v_y}{g} + t^*$$

Con esto, podemos calcular el lugar de caída como

$$x = \frac{L}{2} + v_x(\frac{2v_y}{g} + t^*)$$