Matemática para el CBC, Parte 1

- 2da. edición. – Buenos Aires: Editorial Asimov, 2013

150 p.; 21 x 27 cm.
ISBN: 978-987-23534-1-4

Matemática para el CBC, Parte 1
- 2da ed. - Buenos Aires : Asimov, 2013

v. 1, 150 p. ; 20 x 27 cm.

ISBN 978-987-23534-1-4

1. Matemática - Enseñanza. I. Título
CDD 510.07

Fecha de catalogación: ABRIL 2007

© 2007 Editorial Asimov
Derechos exclusivos
Editorial asociada a Cámara del Libro

- 2da. edición. Tirada: 100 ejemplares.
Se terminó de imprimir en marzo de 2013

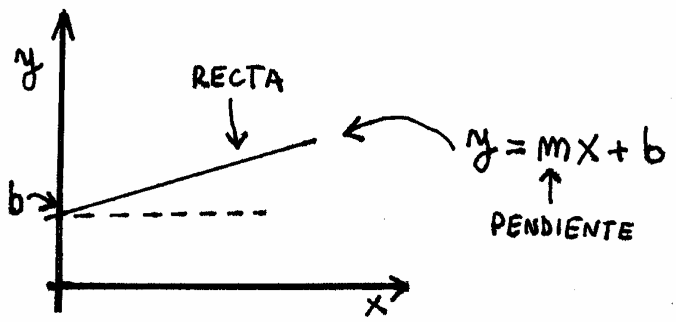
HECHO EL DEPÓSITO QUE ESTABLECE LA LEY 11.723
Prohibida su reproducción total o parcial
IMPRESO EN ARGENTINA

MATEMATICA

PARA EL CBC

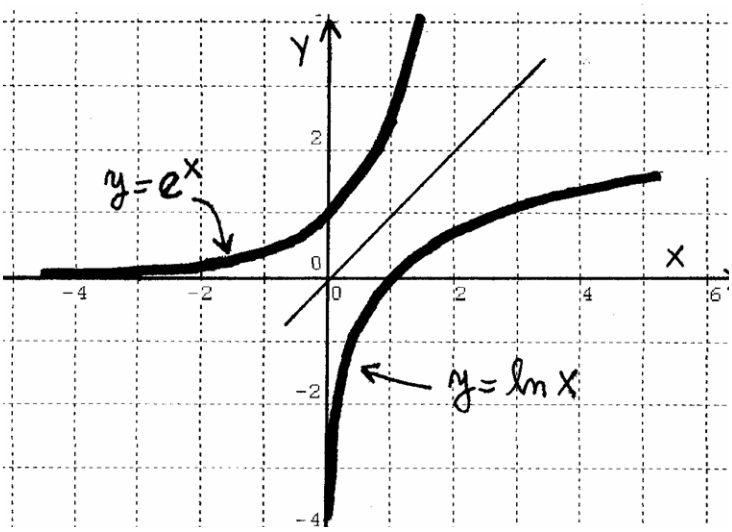
PARTE 1

* MATEMATICA CERO
* FUNCIONES
* FUNC. LINEALES Y CUADRÁTICAS
* FUNCIONES TRIGONOMETRICAS
* EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS
* FUNCIÓN INVERSA
* CONTINUIDAD - LIMITE



¿ Ves algo en este libro que no está bien explicado ?
¿ Encontraste algún error ?
¿ La notación que usé yo no es la que usa la cátedra ?
Mandame un mail y lo corrijo.

www.asimov.com.ar



Podés bajar temas viejos de parciales y finales de www.asimov.com.ar

ASIMOV - MATEMÁTICA PARA EL CBC

- PARTE 1 -

Hola. Ante todo... Bienvenido a la Universidad de Buenos Aires. Bienvenido al CBC. Este libro es una especie de teórico que tiene todo lo que se da en la materia matemática del CBC. En realidad más que un teórico vendría a ser " la carpeta completa ". Digo esto porque básicamente este libro tiene todo lo que se da en clase y de la misma manera que ellos lo dan.

Mi idea es que este resumen te pueda servir si te perdiste alguna clase, si no entendiste bien algún tema o si te tocó un docente malo-malo. También creo que este libro puede facilitarle un poco la vida a los chicos del interior, que a veces tienen que estudiar la materia sin venir a las clases. Y me parece que a los que más les va a servir este libro es a la gente que está preparando el final o el libre.

Ahora, una cosa... Vos sabés que hoy en día el secundario no es muy bueno que digamos. Mucho no te explican. Por eso cuando uno llega al CBC... ¿ que pasa ?
Rta: Pasa que uno no entiende nada. Da la impresión de que uno es un tonto, pero en realidad el asunto es que nadie nunca te explicó nada. Nadie te enseñó a pensar. Nadie te enseñó a razonar.
¿ Este es tu caso ? No desesperéis ! Aquí estoy para ayudarte !

Ojo con esto: No hice escribí esto para expertos en matemática. No busques acá rigurosidad, demostraciones raras o cosas por el estilo. Este no es un libro para docentes. Este es un libro para alumnos. Más concretamente, es un libro para el alumno que existe en la realidad-real (o sea, vos).

Dejame darte unas recomendaciones para cursar la materia

* No hay manera de estudiar matemática a último momento. Tenés que llevar la materia al día e ir haciendo los ejercicios de la guía. Consultá los resultados con otros chicos o verificalos con los ejercicios resueltos que saqué yo.

* Tratá de no faltar a las clases. Si en tu aula no explican bien, cambiate a otra. (No digas que te lo dije yo porque se enojan)

* Atento. Leer sólo teoría no sirve. Ellos te van a tomar ejercicios. Tenés que saber resolver ejercicios. Conclusión, antes del examen buscá parciales viejos y resolvelos. Tenés algunos para temas de exámenes bajar de mi página:

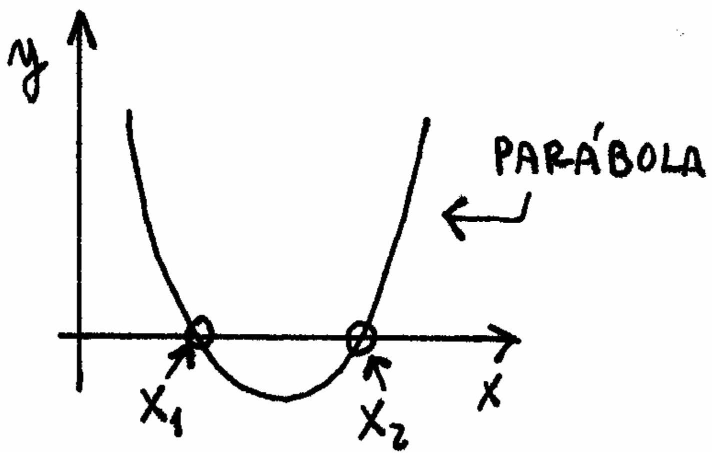
www.asimov.com.ar

También saqué un apunte con parciales resueltos de año pasado. (No están para bajar. Están impresos en papel).

Por último: si te llega a ir mal o tenés que recursar... Bueno, no es terrible, che. Siempre viene bien saber matemática. Hacela de nuevo y sacate mil.

Última cosa: Por favor, si ves errores o pensás que hay cosas que están mal en este libro, avisame. Entrá a la página, mandame un mail y lo corrijo.

Suerte en el examen !



RAICES

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

SOLUCIÓN DE LA CUADRÁTICA

ÍNDICE

MATEMÁTICA CERO

FUNCIONES

FUNCIONES CUADRÁTICAS

CONTINUIDAD - POLINOMIOS

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

FUNCIÓN INVERSA - ASINTOTAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

OTROS APUNTES ASIMOV

*** EJERCICIOS RESUELTOS DE LA GUIA DE MATEMATICA**
Son los ejercicios de la guía resueltos y explicados.

*** PARCIALES RESUELTOS DE MATEMATICA**
Son exámenes que fueron tomados el año pasado. Todos los ejercicios están explicados. También hay parciales resueltos de años anteriores.

*** EJERCICIOS RESUELTOS DE OTRAS MATERIAS**
Son ejercicios resueltos de física, química, matemática, Biofísica y otras materias del CBC. De todas estas materias hay parciales resueltos. También hay parciales resueltos de Biología Celular.

OTROS LIBROS DE ASIMOV:

*** QUÍMICA PARA EL CBC**
*** FISICA PARA EL CBC**
*** BIOFISICA PARA EL CBC**

Estos libros tienen lo que se da en clase pero hablado en castellano.

<u>Temas que están en el libro 2</u> :

DERIVADAS E INTEGRALES

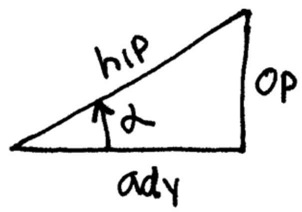
MATEMATICA 0

MATEMATICA NECESARIA QUE HAY QUE SABER PARA ENTENDER MATEMATICA

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$$

$$\left(2^4\right)^6 = 2^{4\times 6} = 2^{24}$$



$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{op}{hip}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ECUACIÓN CUADRATICA

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

FORMULA PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN CUADRATICA

TEMAS:

PASAR DE TERMINO - DESPEJAR - SUMA DE FRACCIONES - FACTOREO - SACAR FACTOR COMUN - ECUACION DE LA RECTA - UNA ECUACION CON UNA INCOGNITA - ECUACION DE UNA PARABOLA - ECUACION CUADRATICA - SOLUCION DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA - SISTEMAS DE 2 ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS – SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE 2 x 2

MATEMATICA CERO

Cosas de matemática que hay que saber para entender matemática

Hola. Para entender matemática hay que saber algo de matemática. Es así. Si vos sabés bien la matemática del secundario, dejá este parte de lado. Empezá directamente donde dice " Funciones ". Si vos sabés que la matemática no te resulta fácil, lee lo que yo pongo acá. Hacete todos los ejercicios. Hacele preguntas a todos los ayudantes que para eso están. Yo sé que nunca nadie te enseñó nada y ahora te exigen que sepas todo de golpe. Qué le vas a hacer. Así es la cosa. Bienvenido a la UBA.

Ahora, ojo, todos los temas que pongo acá son cosas **QUE VAN A APARECER MIENTRAS CURSES LA MATERIA.** No es que estoy poniendo temas descolgados que nunca vas a usar. Todo, absolutamente todo lo que figura va a aparecer y vas a tener que usarlo. Pero:

☺ ¡Alegría!

Vas a ver que no es tan difícil ! Empecemos

PASAR DE TÉRMINO - DESPEJAR

VER

En física todo el tiempo hay que andar despejando y pasando de término. Tenés que saber esto a la perfección. No es difícil. Sólo tenés que recordar las siguientes reglas:

1 - Lo que está sumando pasa restando
2 - Lo que está restando pasa sumando
3 – Lo que está multiplicando pasa dividiendo
4 - Lo que está dividiendo pasa multiplicando
5 - Lo que está como ^{2} pasa como raíz
6 - Lo que está como raíz pasa como ^{2}

Reglas para pasar de término

Estas reglas se usan para despejar una incógnita de una ecuación. Despejar x significa hacer que esta letra incógnita x quede sola a un lado del signo igual. (Es decir que a la larga me va a tener que quedar x = tanto).

Veamos: Usando las reglas de pasaje de términos despejar X de las siguientes ecuaciones:

1) 2 = 5 – X

X está restando, la paso al otro lado sumando: ➔ 2 + X = 5
El 2 está sumando, lo paso al otro lado restando: ➔ X = 5 – 2

Por lo tanto ⇒ $\boxed{x=3}$ ← Solución.

2) $4 = \frac{8}{X}$

X está dividiendo, la paso al otro lado multiplicando: ➔ 4 . X = 8
El cuatro está multiplicando, lo paso al otro miembro dividiendo: ➔ $X = \frac{8}{4}$

Es decir: $\boxed{x=2}$ ← Solución.

3) $x^2 = 25$
La x está al cuadrado. Este cuadrado pasa al otro lado como raíz: ➔ $X=\sqrt{25}$

Por lo tanto ⇒ $\boxed{x=5}$ ← Solución.

(En realidad la solución sería + 5 o - 5 . Eso lo vamos a ver después)

Resolvete ahora estos ejercicios. En todos hay que despejar X :

1) x + 5 = 8 Rta: x = 3

2) x + 5 = 4 Rta: x = -1

3) – x – 4 = - 7 Rta: x = 3

4) $\frac{2}{x} = 4$ Rta: x = $\frac{1}{2}$

5) $\frac{2}{5x} = 10$ Rta: x = $\frac{1}{25}$

6) $\frac{2}{5-x} = \frac{1}{5}$ Rta: x = - 5

7) $-7 = 4 - x^2$ Rta: x = $\sqrt{11}$

8) $\frac{1}{(x-2)^2} = 4$ Rta: $x_1 = 2{,}5$ y $x_2 = 1{,}5$

9) $\frac{1}{(x-2)^2} = a$ Rta: x = $\frac{1}{\sqrt{a}} + 2$

SUMA DE FRACCIONES

Para sumar por ejemplo $\frac{3}{2}+\frac{5}{4}$ lo que hago es lo siguiente:

Abajo de la raya de fracción va a ir el mínimo común múltiplo. Esto quiere decir el número más chico que puede ser dividido por 2 y por 4 (Ese número sería 4). El mínimo común múltiplo a veces es difícil de calcular, por eso directamente multiplico los dos n° de abajo y chau. En este caso 2×4 da 8, de manera que en principio el asunto quedaría así: $\frac{\cdots\cdots\cdots}{8}$

Para saber lo que va arriba de la raya de fracción uso el siguiente procedimiento:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{\quad}{8}$$

Este 8 dividido por el 2 me da 4. Ahora lo multiplico por este 3 y lo pongo acá

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{12}{8}$$

Haciendo el mismo procedimiento con el 4 de la segunda fracción me queda:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{12+10}{8}$$

Es decir:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{22}{8}$$

Simplificando por dos:

$$\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\left[\frac{11}{4}\right] \qquad \leftarrow \text{Resultado}$$

Comprobá este asunto con algunas fracciones a ver si aprendiste el método:

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ Rta : 1

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ Rta : $\frac{3}{4}$

3) $1+\frac{1}{2}$ Rta : $\frac{3}{2}$

4) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$ Rta : $\frac{7}{6}$

5) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ Rta : $\frac{22}{15}$

6) $\frac{7}{3}+\frac{5}{7}$ Rta : $\frac{64}{21}$

7) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ Rta : $\frac{b+a}{a.b}$

8) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ Rta : $\frac{a.d+b.c}{b.d}$

DISTRIBUTIVA

Suponé que tengo que resolver esta cuenta: 2 (3 + 5) = X. Se puede sumar primero lo que está entre paréntesis , y en ese caso me quedaría:

$$2\,(8) = X \quad \Rightarrow \quad 16 = X \qquad \leftarrow \text{Solución.}$$

Pero también se puede resolver haciendo distributiva. ("Distributiva" significa, distribuir el número que multiplica). Eso sería hacer lo siguiente:

ESTE x ESTE

$$2\,(3 + 5) = X$$

MAS ESTE POR ESTE

ES DECIR: $2.3 + 2.5 = X$

o sea : $6 + 10 = X \Rightarrow \boxed{X = 16} \leftarrow$ solución

☆ Practicalo un poco con estos ejemplos:

1) 3 (4 + 5) Rta : 27

2) 3 (4 – 5) Rta : -3

3) a (b + c) Rta : ab + ac

4) a (b + c + d) Rta : ab + ac + ad

5) $a\,(m_1 + m_2)$ Rta : $a\,m_1 + a\,m_2$

SACAR FACTOR COMÚN

Sacar factor común es hacer lo contrario de hacer distributiva. Por ejemplo si tengo la expresión: $X = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 7$ Me va a quedar:

$X = 2\ (\ 4 + 7\ )$ ← Saqué el 2 como factor común

A veces conviene sacar factor común y a veces conviene hacer distributiva. Eso depende del problema.

Ejemplo: Sacar factor común en las expresiones:

1) $F = m_1\, a + m_2\, a$ Rta : $F = a\ (\ m_1 + m_2\ )$

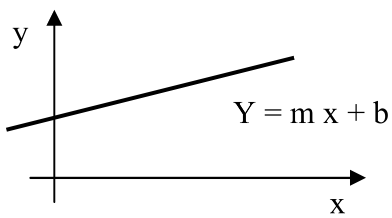
2) $X = x_0 + v\, t - v\, t_0$ Rta : $X = x_0 + v\ (t - t_0)$

3) $F_{roz} = \mu\, m_1\, g + \mu\, N_2$ Rta : $\mu\ (\ m_1\, g + N_2)$

4) $L = F_1\, d \cos a - F_2\, d$ Rta : $d\ (\ F_1 \cos a - F_2\ )$

ECUACIÓN DE UNA RECTA

En matemática la ecuación de una recta tiene la forma y = m x + b. Puedo graficar la recta en un par de ejes X-Y. Queda así:



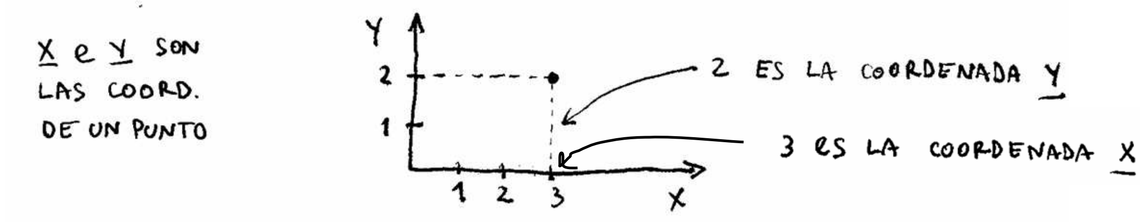
⇦ REPRESENTA-CION DE UNA RECTA

hay varias que tenés que conocer en la ecuación de una recta :

$$y = m\, x + b$$

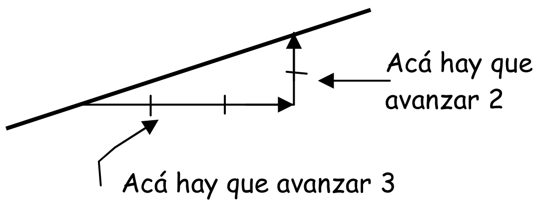
VALOR DE LA COORDENADA Y — PENDIENTE DE LA RECTA — VALOR DE LA COORDENADA X — LUGAR DONDE LA RECTA CORTA AL EJE Y

Fijate lo que significa cada una de estas cosas. Veamos primero qué son x e y. Si quiero representar en el plano el punto (3 , 2) eso significa que:

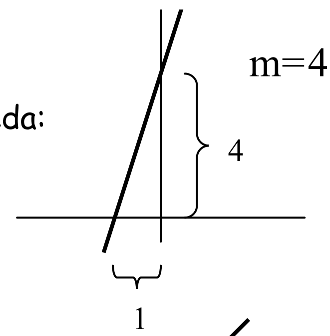


Veamos ahora qué es e**m**e. La **m** representa la **pendiente de la recta**. La palabra "pendiente" significa "inclinación" . La pendiente de una recta da una idea de la inclinación que tiene esa recta. Por ejemplo, si la pendiente vale 2/3, eso significa que la inclinación de la recta tendrá que ser tal que:

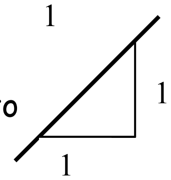
$$m=\frac{2}{3}$$



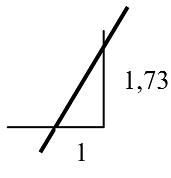
Si la pendiente es 4 puedo poner al Nro 4 como $\frac{4}{1}$ y me queda:



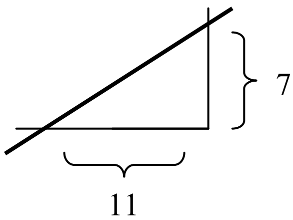
Tengo muchos otros casos. Si la pendiente fuera m = 1 tendría esto (Es decir, sería una recta a 45 °).



Si m fuera 1,73, el asunto quedaría así:



Entonces, la pendiente de una recta es una función en donde:

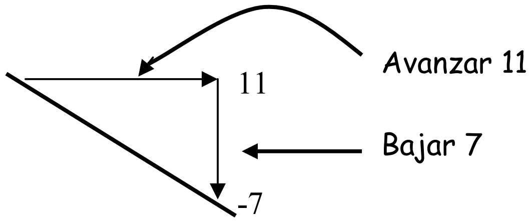


$$m=\frac{7}{11}$$

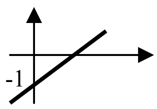
La parte de **arriba** indica lo que hay que avanzar en **Y**

La parte de **abajo** indica lo que hay que avanzar en **X**

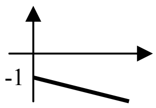
Otra cosa: si la pendiente es negativa (como $m=-\frac{7}{11}$) pongo $m=\frac{-7}{11}$ y la cosa queda:



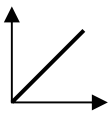
El valor **b** se llama **<u>ordenada al origen</u>** y representa el lugar donde la recta corta al eje Y.

Por ejemplo, una recta así: 

tiene b = - 1

Otra recta así 

también tiene b = -1

Y las rectas que son así  tienen b = 0. Es decir, salen del origen de coordenadas.

¿ <u>CÓMO SE REPRESENTA UNA RECTA</u> ?

Si tengo una ecuación y = m x + b y quiero representarla, lo que hago es darle valores a **X** y obtener los de **Y**. Con estos valores formo una tablita y los represento en un par de ejes x - y. Fijate: Si tengo por ejemplo: y = 2 x + 1

Le doy a **x** el valor 0 y obtengo $\Rightarrow$ y = 2 . 0 + 1 = 1

Le doy a **x** el valor 1 y obtengo $\Rightarrow$ y = 2 . 1 + 1 = 3

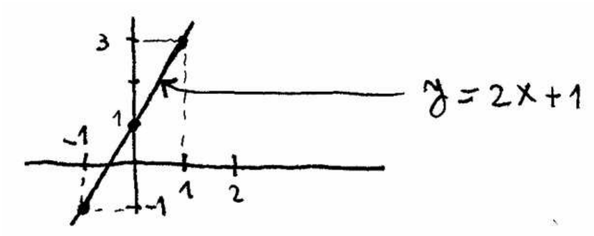
Le doy a **x** el valor – 1 y obtengo $\Rightarrow$ y = 2. (-1) + 1 = -1

Puedo tomar todos los valores que quiera pero con tomar 2 alcanza. Poniendo todo esto en una tabla me queda:

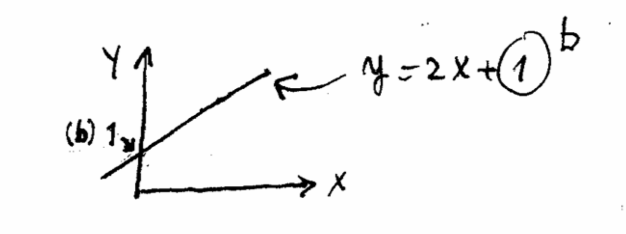
Y = 2 x + 1

x	y
0	1
1	3
- 1	-1

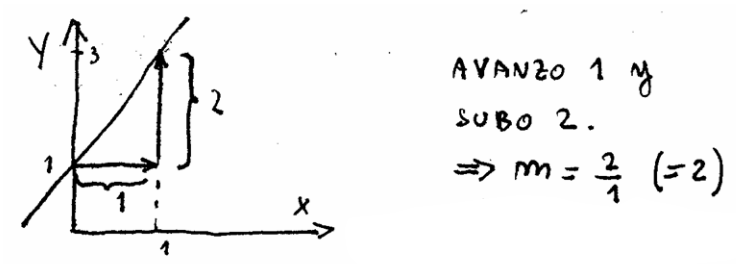
Ahora represento los puntos (0 ; 1) (1 ; 3) y (- 1 ; - 1) en el plano x - y. Uniendo los puntos tengo la recta. Fijate :



Si quisiera ver si la recta está bien trazada puedo fijarme en los valores de m y de b:



La recta corta al eje Y en 1, así que está bien. Veamos la pendiente:

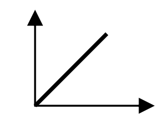


La pendiente de y = **2** x + 1 es m = 2, así que el asunto verifica. Para entender esto mejor tendrías que hacerte algunos ejercicios. Vamos:

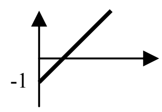
EJERCICIO: DADA LA ECUACIÓN DE LA RECTA:

a) Ver cuánto valen **m** y **b**
b) Graficar la recta dándole valores de **x** y sacando los de **y**
c) Verificar en el gráfico que los valores de m y b coinciden con los de a)

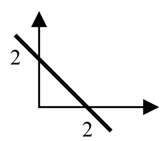
1) y = x Rta: m = 1 , b = 0



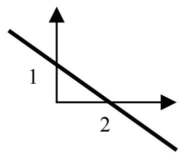
2) y = x - 1 Rta : m = 1 , b = - 1



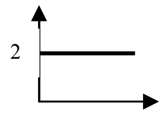
3) y = 2 - x Rta: m = - 1 , b = 2



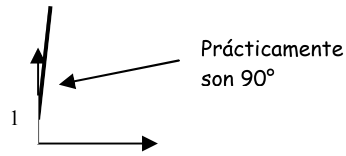
4) y = $-\frac{x}{2}+1$ Rta: m = $-\frac{1}{2}$, b = 1



5) y = 2 Rta: m = 0 , b = 2



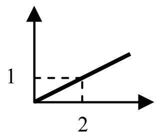
6) y = 1.000 x + 1 Rta: m = 1.000 , b = 1



Acá van otro tipo de ejercicios que también son importantes:

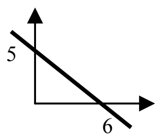
*** DADO EL GRÁFICO, CALCULAR m, b Y DAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA**

a)



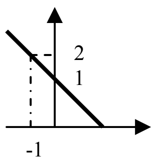
Rta: m = $\frac{1}{2}$; b = 0 y = $\frac{1}{2}$x + 0

b)



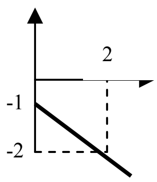
Rta: m = $-\frac{5}{6}$; b = 5 y = $-\frac{5}{6}x+5$

c)



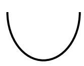
Rta: m = - 1 ; b = 1 y = - 1 x + 1

d)



Rta: m= $-\frac{1}{2}$; b = -1 y = $-\frac{1}{2}x-1$

PARÁBOLA

Una parábola es una curva así ⇒  . Desde el punto de vista matemático esta curva está dada por la función:

Y= a x^2 + b x + c ← **Ecuación de la parábola**

Fijate que si tuviera sólo el término y = b x + c tendría una recta. Al agregarle el término con x^2 la recta se transforma en una parábola. Es el término cuadrático el que me dice que es una parábola. Ellos dicen que $y = a\,x^2 + b\,x + c$ es una **función cuadrática** porque tiene un término con x^2. Una parábola podría ser por ejemplo:

$$Y = 2\,x^2 + 5\,x + 8$$

En este caso **a** sería igual a 2, **b** a 5 y **c** sería 8. Los términos de la ecuación también pueden ser negativos como en:

$$Y = -\,x^2 + 2\,x - 1$$

Acá sería a = - 1, b = 2 y c = -1. A veces el segundo o tercer término pueden faltar. (El primero nunca puede faltar por que es el cuadrático). Un ejemplo en donde faltan términos sería:

$$Y = 0{,}5\,x^2 - 3 \qquad (a = 0{,}5 \;,\; b = 0,\; C = -3)$$

o también:

$$Y = x^2 - 3\,x \qquad (a = 1,\; b = -3,\; c = 0)$$

La ecuación también puede estar desordenada, entonces para saber quién es **a**, quién **b**, y quién **c**, tengo que ordenarla primero. Ejemplo: $Y = -\,3\,x - 1 + 5\,x^2$
Ordeno y me queda :

$$Y = 5\,x^2 - 3\,x - 1 \;\Rightarrow\; a = 5,\; b = -3,\; c = -1$$

REPRESENTACIÓN DE UNA PARÁBOLA

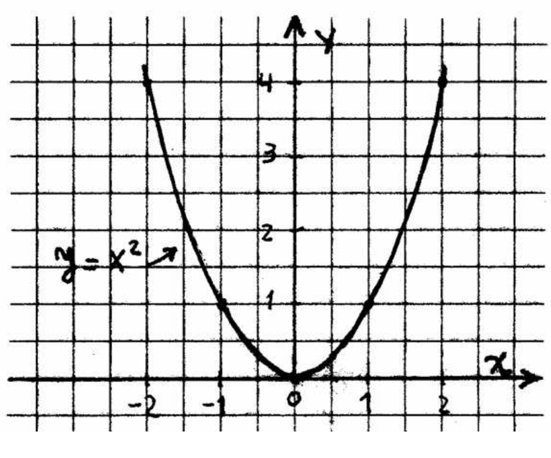
Lo que hago es darle valores a x y sacar los valores de y. Con todos estos valores voy armando una tabla. Una vez que tengo la tabla, voy representando cada punto en un par de ejes x,y. Uniendo todos los puntos, obtengo la parábola.

EJEMPLO:

REPRESENTAR LA EC. $Y = X^2$.

TABLA

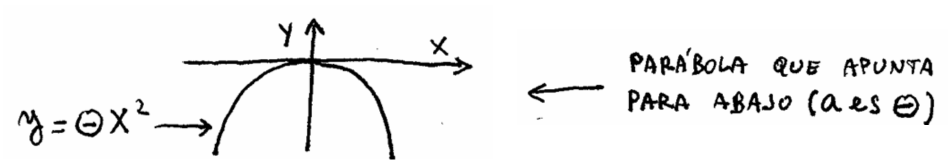
VALOR DE X	VALOR DE Y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4



De acuerdo a los valores de a, b y c la parábola podrá dar más abierta, más cerrada, más arriba o más abajo. Hay una cosa que tenés que saber que es que :

si el término cuadrático es negativo la parábola apunta sus ramas para abajo.

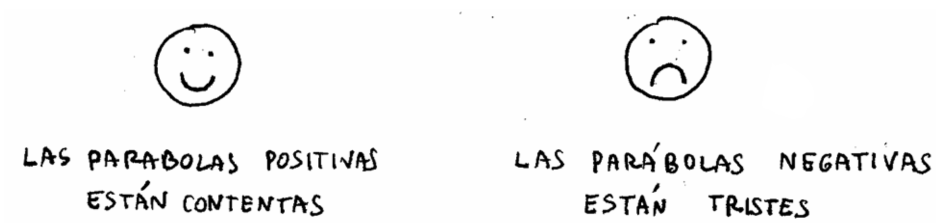
Es decir, por ejemplo, si en el ejemplo anterior en vez de $Y = x^2$ hubiese sido $Y = -x^2$, la cosa habría dado así:



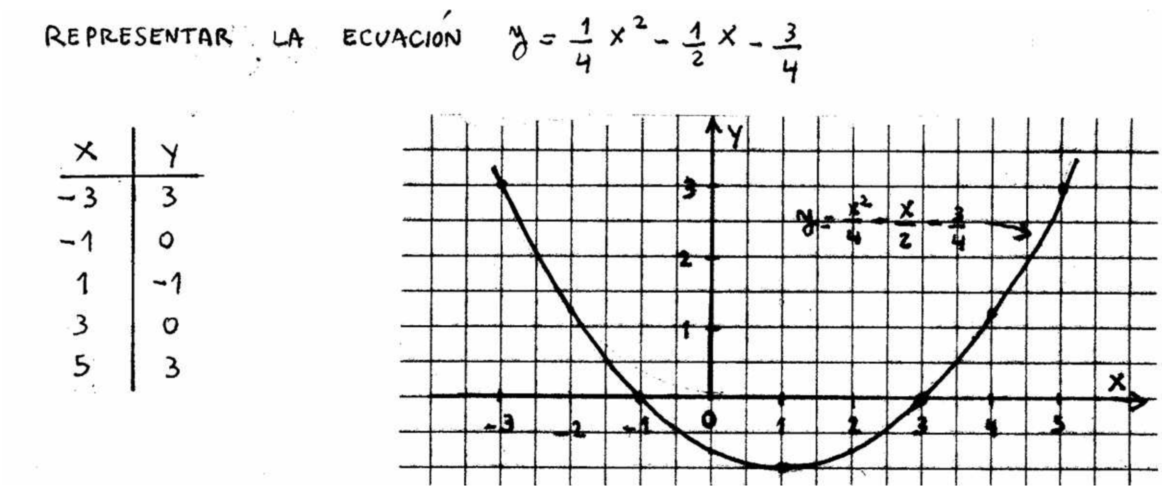
¿ Por qué pasa esto ? Rta : Porque **a** es negativo. (En este caso a = -1)
Entonces conviene que te acuerdes siempre que:

Si en la ecuación $Y = a\,x^2 + b\,x + c$ el valor de **a** es negativo, entonces la parábola va a dar para abajo

Dicho de otra manera:



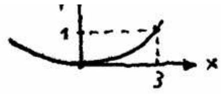
¿ Y si a la ecuación cuadrática no le falta ningún término ? Rta: No pasa nada, el asunto es el mismo, lo único es que va a ser más lío construir la tabla por que hay que hacer más cuentas. Fijate:



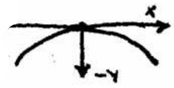
Vamos a estos otros ejercicios :

Representar las siguientes parábolas y decir cuánto valen los términos a, b y c:

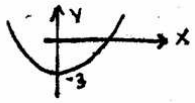
1)- $y = \frac{x^2}{9}$ RTA: $a = \frac{1}{9}$, $b = 0$, $c = 0$



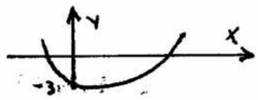
2)- $y = -\frac{x^2}{9}$ RTA: $a = -\frac{1}{9}$, $b = 0$, $c = 0$



3)- $y = \frac{x^2}{9} - 3$ RTA: $a = \frac{1}{9}$, $b = 0$, $c = -3$



4) $y = \frac{x^2}{9} - 3x - 3$ RTA: $a = \frac{1}{9}$, $b = -3$, $c = -3$



Solución de una ecuación cuadrática

Una ecuación cuadrática es la ecuación de una parábola igualada a cero. Es decir, si en vez de tener **y** = $a\,x^2 + b\,x + c$ tengo $a\,x^2 + b\,x + c =$ **0** , eso será una ecuación cuadrática.

Por ejemplo, son ecuaciones cuadráticas:

$$X^2 + 4 = 0 \quad , \quad 5\,X^2 - 3\,X + 7 = 0 \quad , \quad 7\,X - 3\,X^2 = 0$$

Lo que se busca son los valores de **x** que **satisfagan** la ecuación. ¿ Qué significa eso ? Significa reemplazar x por un valor que haga que la ecuación dé cero. Supongamos que tengo:

$$x^2 - 4 = 0$$

¿ Qué valores tiene que tomar **x** para que $x^2 - 4$ de cero ? Bueno, a ojo me doy cuenta que si reemplazo x por 2 la cosa anda. Fijate:

x

$$2^2 - 4 = 0 \quad (\text{ Se cumple })$$

¿Habrá algún otro valor? Sí. Hay otro valor es x = - 2. Probemos:

$$(-2)^2 - 4 = 4 - 4 = 0 \quad (\text{ anda })$$

Este método de ir probando está muy lindo pero no sirve. ¿ Por qué ? Rta: Porque funciona sólo si la ecuación es fácil. Pero si te doy la ecuación $0{,}23\,X^2 - 2{,}17\,x - 73{,}2 = 0$... ¿ Cómo hacés ? Acá no podés ir probando porque el asunto puede llevarte un año entero.

A los valores de **x** que hacen que toda la ecuación de cero se los llama **raíces de la ecuación** o **soluciones de la ecuación**. Entonces, la idea es encontrar una fórmula que sirva para hallar las **raíces** de la ecuación. Esta fórmula es:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

⇦ SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA

(La demostración de está ecuación está en los libros). ¿ Cómo se usa esta fórmula ? Mirá este ejemplo:

Encontrar las raíces de la ecuación $Y = x^2 - 4x + 3$.

En este caso **a = 1**; **b =-4** y **c = 3.**

Planteo :

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Reemplazando:

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

Ahora, para una de las soluciones uso el signo **+** y para la otra el signo menos. La cosa queda así:

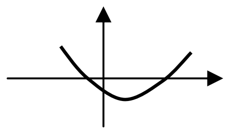
$$x_1 = \frac{4+2}{2} \Rightarrow \boxed{x_1 = 3}$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$$

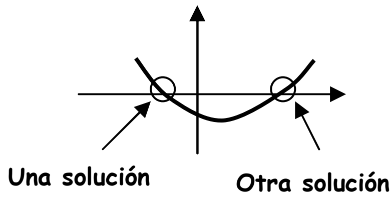
Entonces x = 3 y x = 1 son las soluciones de la ecuación. Podés reemplazar estos valores en la ecuación y ver si verifican.

Quiero decirte una cosita más con respecto a este tema: una ecuación cuadrática podrá tener una solución, 2 soluciones o ninguna solución. ¿ Cómo es eso ? Fijate: ¿ Qué significa igualar la ecuación de una parábola a cero ?

<u>Rta</u>: Bueno, una parábola

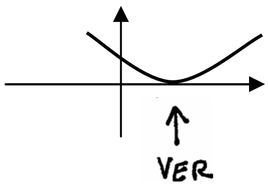
es esto ➔ 

Preguntar para qué valores de **x** la **y** da cero, significa preguntar <u>dónde corta la Parábola al eje de las x</u>. Es decir, que las raíces de una ecuación cuadrática representan esto:



Soluciones de una ecuación cuadrática

El caso de una solución única va a estar dado cuando la parábola NO corta al eje de las **x** en dos puntos sino que lo corta en un solo punto. Es decir, voy a tener esta situación :



← Caso de raíz única.

Cuando la ecuación tiene una sola solución, se habla de raíz única **o de raíz doble**.

La ecuación cuadrática puede no tener solución cuando la parábola No corta en ningún momento al eje de las **x**. Por ejemplo:

Cuando te toque una ecuación de este tipo, te vas a dar cuenta porque al hacer $\sqrt{\mathbf{b^2 - 4ac}}$ te va a quedar la raíz cuadrada de un número negativo (como por ejemplo $\sqrt{-4}$). No hay ningún número que al elevarlo al cuadrado dé negativo. Entonces el asunto no tiene solución.

Acá te pongo algunos ejemplos:

✯ Encontrar las soluciones de la ecuación usando la fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(Podés verificar los resultados graficando la parábola)

1) $x^2 - 2x - 3 = 0$ Rta: $x_1 = 3$; $x_2 = -1$

2) $x^2 - 7x + 12 = 0$ Rta: $x_1 = 4$ $x_2 = 3$

3) $x^2 - 2x + 1 = 0$ Rta: $x = 1$ (Raíz doble)

4) $x^2 - 18x + 81$ Rta: $x = 9$ (Raíz doble)

5) $x^2 + x + 1 = 0$ No tiene solución.

6) $x^2 - x + 3 = 0$ No tiene solución.

SISTEMAS DE 2 ECUACIONES CON 2 INCÓGNITAS

Una ecuación con una incógnita es una cosa así $\Rightarrow$ $x - 3 = 5$. Esta ecuación podría ser la ecuación de un problema del tipo: " Encontrar un número x tal que si le resto 3 me da 5 ". ¿ Cómo se resolvería una ecuación de este tipo ?
Rta: Muy fácil. Se despeja x y chau. Fijate :

$$x - 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 + 3 \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{x = 8}}$$

¿Qué pasa ahora si me dan una ecuación así ? : $x + y = 6$.
Esto es lo que se llama una ecuación con 2 incógnitas. Así como está, no se puede resolver. O sea, tendría infinitas soluciones. Por ejemplo, algunas podrían ser:

$$x = 6 \,;\; y = 0 \quad ó \quad x = 7 \,;\; y = -1$$

$$ó \quad x = 8 \,;\; y = -2$$

Creo que ves a dónde apunto. Si trato de buscar 2 números x e y tal que la suma sea 6, voy a tener millones de soluciones. (Bueno... millones no... infinitas !!!)
Bueno, ahora distinta es la cosa si yo te digo: " dame dos números cuya suma sea 6 y cuya resta sea 4 " Ahí el asunto cambia. Este problema **SI** tiene solución.
Matemáticamente se pone así:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Esto es lo que ellos llaman sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.
¿ Cómo se resuelve esto ? Veamos.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA DE 2 ECUACIONES CON 2 INCÓGNITAS

Hay varios métodos para resolver 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Te recuerdo los dos más fáciles. Supongamos que tengo el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

<u>MÉTODO 1</u> : DESPEJAR Y REEMPLAZAR (SUBSTITUCIÓN)

Se despeja una de las incógnitas de la primera ecuación y se reemplaza en la segunda. Por ejemplo, despejo x de $x + y = 6$. Me queda: $x = 6 - y$.

Reemplazando esta x en la segunda ecuación. Tengo: $(6 - y) - y = 4$
Ahora:

$$6 - y - y = 4 \rightarrow 6 - 4 = 2y$$

$$2 = 2y \Rightarrow \underline{y = 1}$$

Ya calculé el valor de y. Reemplazando esta Y en cualquiera de las 2 ecuaciones originales saco el valor de x. Por ejemplo, si pongo y = 1 en la 1^{ra} de las ecuaciones:

$$x + 1 = 6 \rightarrow x = 6 - 1$$

$$\Rightarrow \underline{x = 5}$$

<u>MÉTODO 2</u> : SUMA Y RESTA

Se suman o se restan las 2 ecuaciones para que desaparezca alguna de las incógnitas. Por ejemplo:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Sumo las ecuaciones miembro a miembro y me queda: $x + y + x - y = 6 + 4$

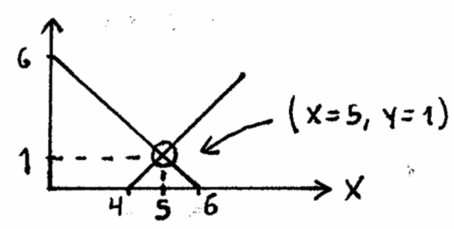
Ahora la **y** se va. Me queda: $2x = 10 \Rightarrow \underline{x = 5}$

Igual que antes, reemplazando este valor de x en cualquiera de las 2 ecuaciones originales obtengo el valor de y. Una cosa: Acá yo sumé las ecuaciones, pero también se pueden restar. Si las hubiera restado, el asunto hubiera sido el mismo (se iba a ir la x).
Vos podés usar el método que quieras para resolver un sistema de ecuaciones. A ellos no les importa qué método uses.

Otra cosita: en realidad cada una de las ecuaciones del sistema, es la ecuación de una recta. Por ejemplo el sistema anterior se podría haber puesto así:

$$y = -x + 6$$
$$y = x - 4$$

¿ Entonces cuál sería el significado geométrico de encontrar la solución de un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas ?
<u>Rta:</u> significa encontrar el punto de encuentro de las 2 rectas. Por ejemplo, para las rectas $x + y = 6$ y $x - y = 4$ tendría esto:



Solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. (Podés representar las 2 rectas para verificar)

1) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 12 \end{cases}$ RTA: $x = 6$, $y = 0$

2) $\begin{cases} -3x + y = -4 \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$ RTA: $x = 2,8571...$, $y = 4,5714...$

3) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 0 \\ -4x + 2y = 2 \end{cases}$ RTA: $x = -2/3$, $y = -1/3$

4) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ RTA: SIN SOLUCIÓN

MATEMÁTICA CERO – PALABRAS FINALES

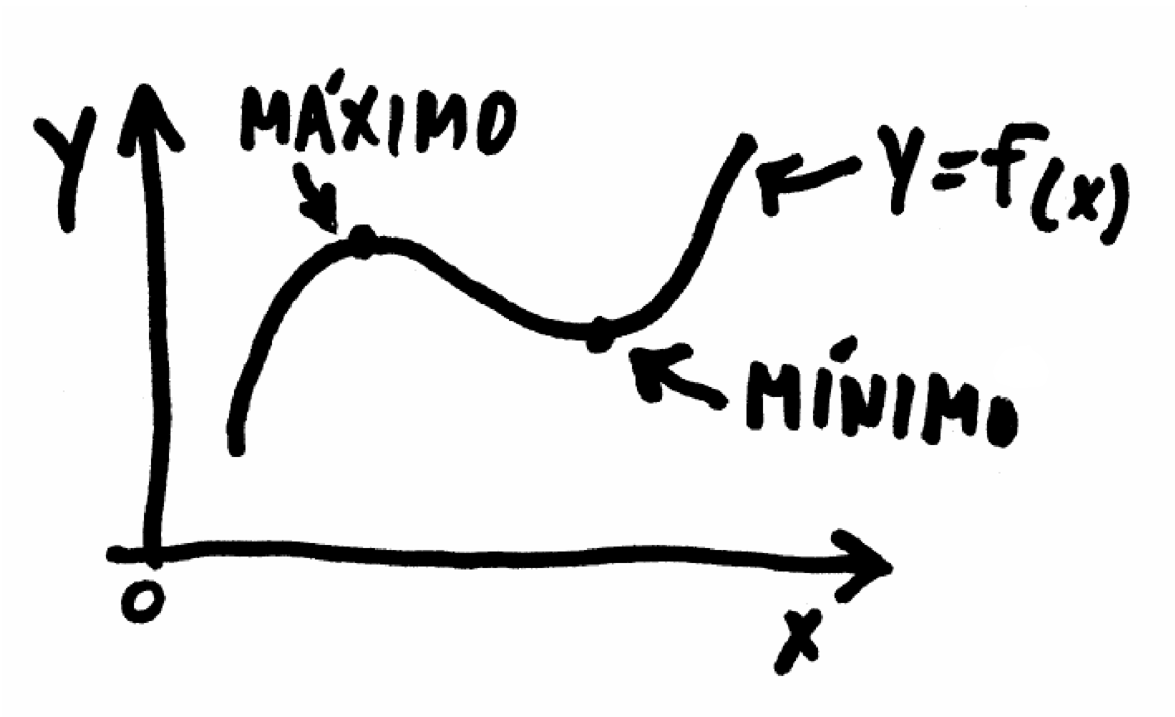
Acá termina el resumen de matemática que te puse para que puedas entender matemática. Esta no es toda la matemática que existe. La matemática es gigantesca. Lo que puse acá es lo hiper-necesario y lo que seguro vas a usar. Hay otros temas que también vas a necesitar como polinomios, trigonometría, funciones exponenciales, logarítmos... Estos temas te los voy a ir explicando a lo largo del libro.

Ahora, pregunta... ¿ Detestás la matemática ?
Rta: Bueno, no sos el único. El 95 % de la gente la detesta. Es que la matemática es muy fea. Y encima es difícil. ¿ Hay alguna solución para esto ?
Rta: Mirá,... no hay salida. Vas a tener que saber matemática sí o sí. Es una materia, hay que aprobarla. Lo único que se puede hacer para solucionar esto es estudiar. (Y estudiar mucho). Es así. El asunto depende de vos.

A veces los chicos dicen: che. Que mala onda tenés ?!
Rta: No es mala onda. Esto es así. En todos lados del mundo estudiar matemática es difícil. Encima vos elegiste la UBA, que es la Universidad de mayor nivel en Argentina... ¿ entonces qué querés ?!
Resumiendo, el que quiere celeste, que le cueste. Nadie te obliga. Ahí afuera te están esperando los de Mc Donald´s para trabajar por dié peso la hora.
Creo que fui claro, no ?

FIN MATEMÁTICA CERO

FUNCIONES



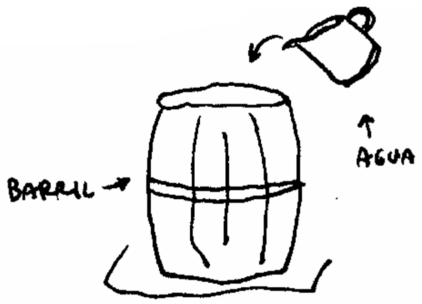
FUNCIONES

Vamos a empezar a hablar de Funciones. Supongamos que queremos saber cuántos alumnos hay por aula. Voy aula por aula y cuento. Hago una tabla:

AULA	ALUMNOS
310	90
311	80
320	100

De esta manera establecemos una relación entre el aula y el número de alumnos.
El conjunto del cual salimos lo llamo **dominio** de la función. Al conjunto de llegada lo llamo **codominio** de la función. Si para cada elemento del dominio, tengo un solo elemento del codominio, tengo una **función**.

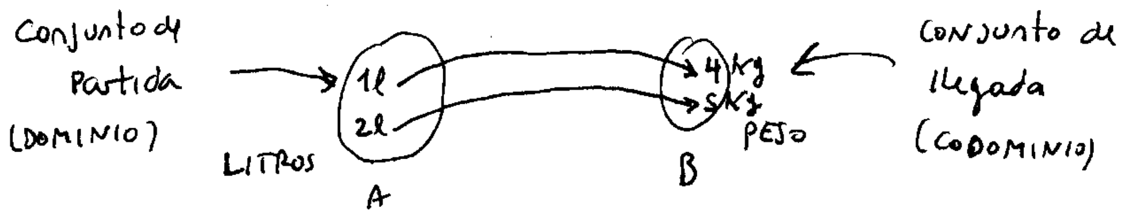
Supongamos que tengo un barril que vacío pesa 3 Kg. Si le agrego agua, el peso del barril va a aumentar. Como cada litro de agua pesa 1 Kg. La tabla me va a quedar así:



LITROS	PESO
0	3 kg
1 ℓ	4 kg
3 ℓ	6 kg

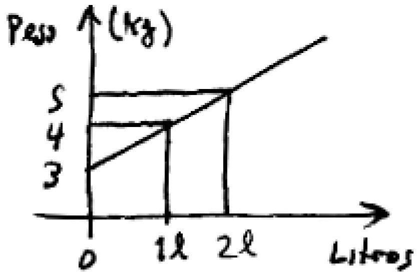
← TABLA

Esto que hice fue establecer una <u>relación</u> entre los litros que pongo y el peso del barrilito de cerveza. Puedo simbolizar esto así:



Hacer una tabla con algunos valores es dar una función. Sin embargo, esto no sirve mucho porque... ¿ qué pasa si yo pongo un litro y medio ? O raíz de 2 litros ?
De manera que otra forma de establecer una función es <u>dar su gráfico</u>.

Dibujo ahora el peso del barril en función de la cantidad de agua que pongo :



← GRÁFICO DEL PESO DEL BARRIL EN FUNCIÓN DE LOS LITROS QUE PONGO

Las funciones pueden ser discretas o continuas. Cuando hablo del número de personas por aula, estoy hablando de una función <u>discreta.</u> Cuando hablo de los litros que pongo estoy hablando de una función <u>continua</u>.
Existe otra forma de dar una función que es <u>dar su fórmula.</u> Para decir de donde a donde va la función uso la siguiente notación:

$$f: \underbrace{\mathbb{N}}_{\text{nros naturales}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{nros reales}}$$

(una función que va de los naturales a los Reales)

La función también podría ir de los reales a los reales o cualquier otra combinación. Por ejemplo:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{etc.}$$

Supongamos ahora que tengo la siguiente función:

$$f_{(m)} : \mathbb{N} \longrightarrow Z \text{ <--- Enteros}$$

$$f_{(x)} : \mathbb{R} > 0 \rightarrow \mathbb{R} > 0$$

$$\text{con} \quad f_{(x)} = \frac{10}{x}$$

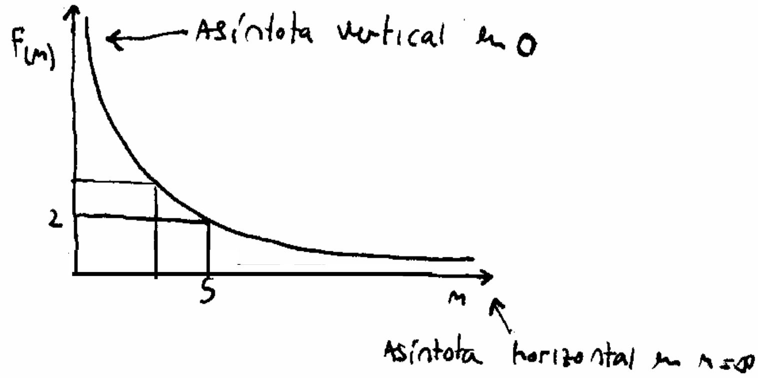
Hago una tabla para esta función:

m	$f_{(m)}$
1	10
2	5
4	2,5
5	2
10	1

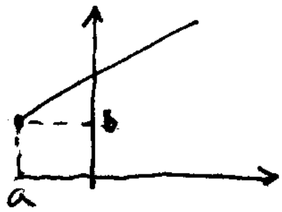
$$\leftarrow f_{(m)} = \frac{10}{m}$$

El gráfico va a ser:

Asíntota significa que la función se acerca al eje pero NO lo corta.

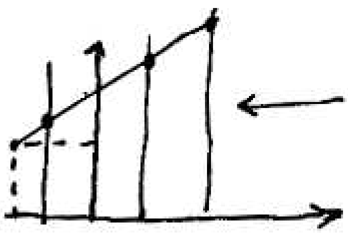


Vamos a un ejercicio. Una cosa para ser función tiene que salir de 1 punto y llegar a un solo punto. Por ejemplo, supongo que me dan esto:



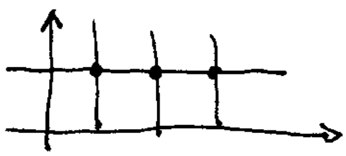
Me piden determinar si es función o no.

Lo que hago es trazar rectas verticales. Si las rectas cortan al gráfico en 1 solo punto, tengo una función. Esto es porque a cada punto del dominio, le debe corresponder un solo punto del codominio.



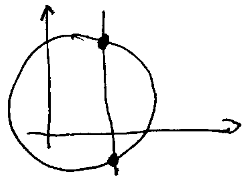
Estas rectas verticales cortan en un solo punto.
⇒ ES FUNCIÓN.

Este caso también es función

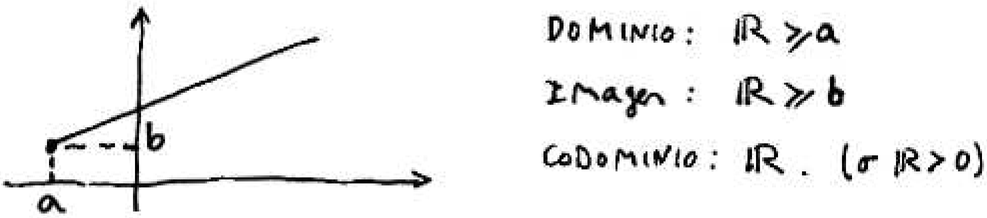


ES FUNCIÓN (las rectas cortan en un solo punto).

NO es función. (otra recta superpuesta la corta en infinitos puntos).

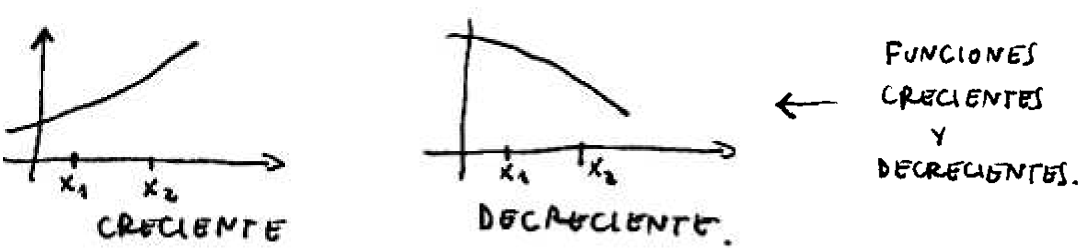


El domino de la función serán todos los puntos que tienen alguna imagen. El codominio será el conjunto que contenga a la imagen. En este caso:



FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

Esto es fácil. Fijate: Una función crece cuando va en subida. Una función decrece cuando va en bajada.



Desde el punto de vista matemático esto se pone así:

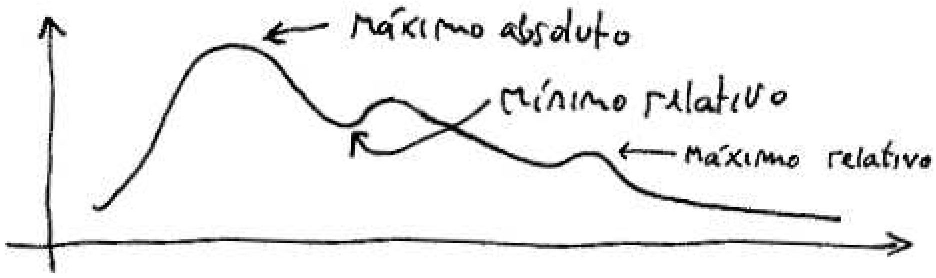
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ⟵ FUNCIÓN CRECIENTE

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ⟵ FUNCIÓN DECRECIENTE

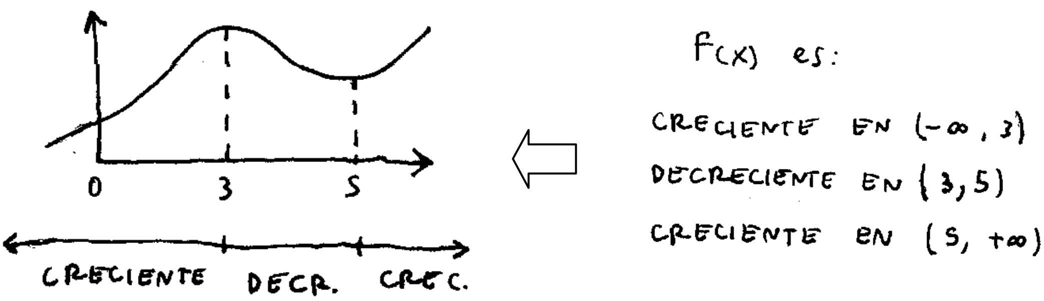
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Cuando la función tiene una montaña, digo que tiene un máximo. Cuando tiene un valle, digo que tiene un mínimo. Una función puede tener varios máximos o varios mínimos. Si el máximo es el más grande de todos los que tienen la función, digo que es un máximo absoluto. Lo mismo para los mínimos.

En realidad, desde el punto de vista de matemático (riguroso) una función tendrá un máximo o un mínimo cuando cambie el estado de crecimiento (de creciente a decreciente o viceversa). Si la función crece entre los puntos 1 y 2, digo que el intervalo de crecimiento es (1, 2). Dar el intervalo de crecimiento (o decrecimiento) es decir en qué puntos la función crece (o decrece). Fijensé este dibujito :



En matemática es muy importante que cuando vean una función puedan decir cuáles son sus intervalos de crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y todo eso. Fijensé este ejemplo.



Vamos a hacer un ejercicio. Es importante que aprendas a interpretar enunciados. Eso queremos.

> UNA FAMILIA QUE POR MES RECORRE 3.000 KM EN UN AUTO SE PLANTEA LA POSIBILIDAD DE INSTALAR UN EQUIPO DE GAS. LA INSTALACIÓN DEL EQUIPO CUESTA 1.500 \$. UN LITRO DE NAFTA CUESTA 0,69 \$. CON 1 Litro DE NAFTA RECORRE 14 Km. CON 0,8 m^3 DE GAS TAMBIÉN RECORRE 14 Km. EL GAS CUESTA 0,32 \$ EL m^3 . SE PIDE:
> HALLAR LA FUNCIÓN QUE MIDE EL GASTO (EN \$) DE COMBUSTIBLE EN FUNCIÓN DEL TIEMPO SI SE USA NAFTA. IDEM EN CASO DE QUE SE UTILICE GAS (INCLUIDO EL GASTO DE LA INSTALACIÓN)

En los 2 casos la variable va a ser el tiempo medido en meses. Vamos a empezar con la función del gasto de combustible. El tipo hace 3000 Km. por mes y con 1 Litro de nafta recorre 14 Km. Entonces:

Por mes gasta: $\dfrac{3.000\text{ L}}{14} = 214{,}28$ Litros /mes

Lo que gasta en plata va a ser: (1 Litro de nafta cuesta 0,69 \$)

$$214{,}28\ \text{L/mes} \times 0{,}69\ \text{\$/Litro} = 147{,}85\ \text{\$/mes}$$

Si por mes gasta esto, la función que me da el gasto en función del tiempo es:

$$f_{(t)} = 147{,}85\ \text{\$/mes} \times t\ \text{(en meses)}$$

Vamos a la parte b). Con 0,8 m^3 la familia Dongo recorre 14 Km. La cantidad de m^3 que gastan al recorrer 3.000 Km es:

$$14\ \text{Km} \text{ ——— } 0{,}8\ m^3$$
$$3000\ \text{Km} \text{ ——— } x = \frac{3000\ \text{Km} \cdot 0{,}8\ m^3}{14\ \text{Km}}$$

➔ GASTO MENSUAL = 171,42 m^3 de gas

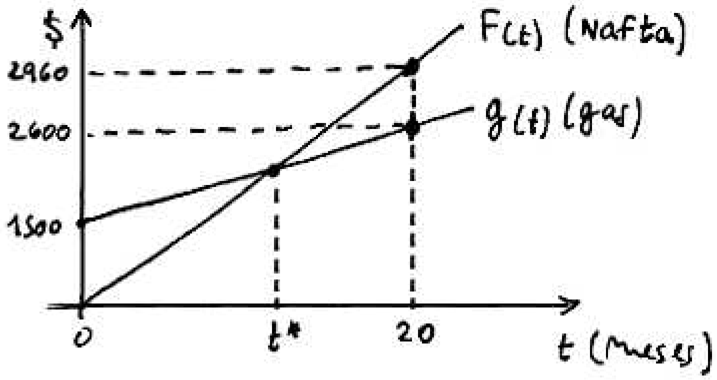
Es decir que en plata, lo que gasta es: 171,42 m^3 x 0,32 \$ / m^3 = 54,85 \$/mes

Si le sumo lo que sale la instalación, el gasto en función del tiempo si uso gas es:

$$g(t) = 1500\,\$ + 54{,}85\,\frac{\$}{\text{mes}} \cdot t\ (\text{meses})$$

Adelantémonos un poco al tema de funciones lineales. Represento las dos funciones que obtuve. Puedo hacerlo dando valores. Me van a dar 2 rectas

$$f_{(t)} = 148\ t$$
$$g_{(t)} = 1500 + 55\,t$$



Supongamos que quiero saber a partir de cuantos meses se amortiza la instalación. Eso significa hallar el punto en donde se cortan las rectas, es decir t*.

Igualo: $f(t) = g(t) \Rightarrow 148\ t = 1.500 + 55\ t$

$$\Rightarrow 148\ t - 55\ t = 1.500$$

$\Rightarrow 93\ t = 1.500$

$\Rightarrow$ <u>t = 16,1 meses</u>

OTRO EJEMPLO

Supongamos que hay una empresa que tiene unos ingresos (en plata) que vienen dados por la función i(t) (t en días). Los gastos a su vez vienen dados por g(t).
¿ Qué representa la función $h(t) = i(t) - g(t)$?

Rta: Bueno, si a lo que entra le resto lo que salte, lo que me queda es la ganancia neta de la empresa. Es decir:

$$h(t) = i(t) - g(t) = \text{ganancia neta}$$

¿ Para que sirve este ejemplo ? Bueno, solamente para que veas que las funciones se pueden sumar y restar.

OTRO EJEMPLO

Supongamos que tengo un país determinado tal que h(t) representa a la cantidad de habitantes de ese país en el tiempo t (t en años). La función g(t) representa el consumo por habitante en función del tiempo. Se pregunta:

a) ¿Cuál es el consumo total de ese país en el año t?
Igual que antes lo que hago es:

CONSUMO POR HABITANTE x CANTIDAD DE HABITANTE = CONSUMO TOTAL

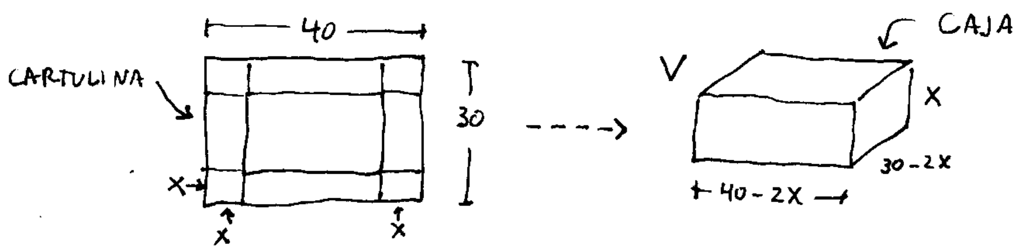
$\Rightarrow$ Si f(t) es el consumo total:

$$f(t) = h(t) \times g(t) \quad \longleftarrow$$ FUNCIÓN QUE DA EL CONSUMO TOTAL

Acá ves como una función puede ser producto de 2 funciones. Ahora, ¿ Cuánto valen las funciones h y g ? Rta: Bueno, no lo sé. Pero su producto da el consumo total.

EJEMPLO

Che, ¿ se callan ? Vamos a hacer un ejercicio. Se quiere hacer una caja partiendo de una cartulina de 30 cm x 40 cm. Se pide calcular el volumen de la caja.



El volumen de la caja será: Vol = ancho $\times$ alto $\times$ largo. Es decir:

$$V = (40 - 2x)\,(30 - 2x)\,.\,x$$

Ahora, x no va a poder tomar valores mayores que 15 cm. Porque sino no tendría caja. Tampoco x puede ser negativo. Entonces digo que la función que me da el volumen de la caja en función de x es:

$$V(x) = (40 - 2x)\,(30 - 2x)\,.\,x \qquad \text{con } 0 < x < 15$$

¿ Cómo hago si quiero graficar esto? Bueno lo que hago es darle valores a x (entre 0 y 15) y sacar los de V(x).

Vamos a otro ejemplo

Supongamos que los precios de la electricidad son los siguientes:

2,38 \$ costo fijo que paga todo el mundo
0,0634 \$ / kilowatt si uno consume menos de 126 Kwh.
0,094 \$ / kilowatt si uno consume más de 126 Kwh.

Encima de esto, se cobra 17,20% de impuesto sobre el total consumido. De manera que voy a tener 2 funciones: una para consumo mayor que 126 Kwh. y otra p/ consumo menor que 126 Kw-h. Si no hubiera que pagar ese 17,20 % de más, lo que habría que pagar sería:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}0634 \,.\, x + 2{,}38 & \text{si } x \leq 126 \text{ Kwh} \\ 2{,}38 + 0{,}0634 \,.\, 126 + 0{,}094\,(x - 126) & \text{si } x > 126 \text{ Kw-h} \end{cases}$$

Ahora, para aumentar una cosa un 17,20 % lo que se hace es multiplicar a todo por $\frac{17.20}{100}$ y sumárselo a lo que uno ya tenía. (Esto hay que pensarlo un poco)

De manera que la función que me dice lo que tengo que pagar (f(x)) en función de los kilowats-hora que consumo (x) va a ser lo que tenía antes multiplicado por $1+\frac{17{,}2}{100}$. $a\left(1+\frac{17{,}20}{100}\right)$. Esto es porque hacer la cuenta $a + \left(\frac{17{,}20}{100}\right)a$ es lo mismo que hacer (Lo que hice es sacar a factor común).

La función queda:

$$f(x) = \begin{cases} 1{,}172 \times \left[0{,}0634 \,.\, x + 2{,}38\right] & \text{si } x \leq 126 \text{ Kw-h} \\ 1{,}172 \times \left[2{,}38 + 0{,}0634 \,.\, 126 + 0{,}094\,(x - 126)\right] & \text{si } x > 126 \end{cases}$$

Esta función así definida es lo que el problema pedía calcular. Teniendo la función ésta, puedo calcular por ejemplo cuánto paga un tipo que consumió 122 Kw. (por ejemplo). Para hacer eso, reemplazo x por 122 en la función para $x \leq 126$ Kwh.

Quedaría así :

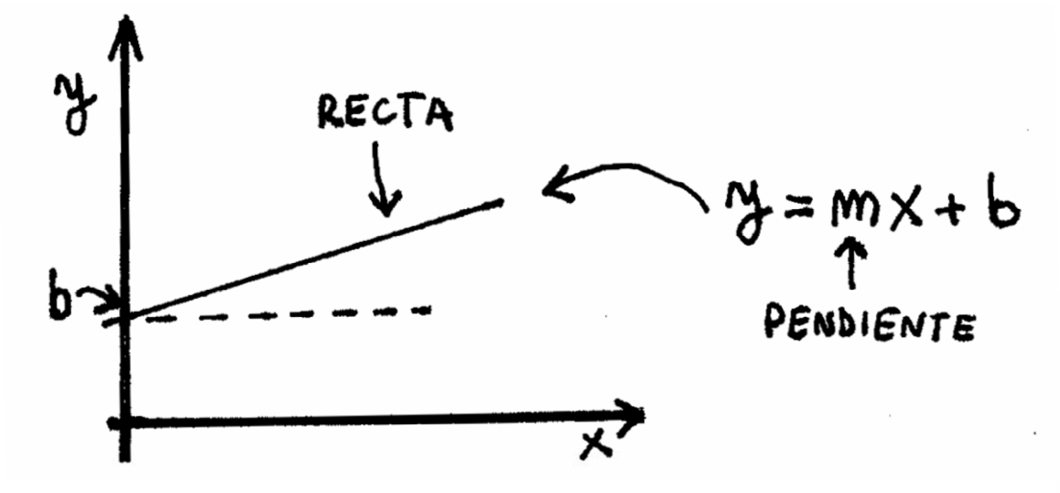
$$\text{Plata a pagar} = 1.172 \times [\ 0{,}0634\ .\ \mathbf{122} + 2{,}38]$$

Si el consumo fuera mayor a 126 Kw. (por ejemplo **130** Kw), la cosa quedaría:

$$\text{Plata a pagar} = 1.172 \times [2{,}38 + 0{,}0634 \times 126 + 0{,}094\ (\mathbf{130} - 126)]$$

FIN FUNCIONES

FUNCIONES LINEALES



FUNCIONES LINEALES

Son las funciones que tienen forma de línea recta. La expresión matemática es:

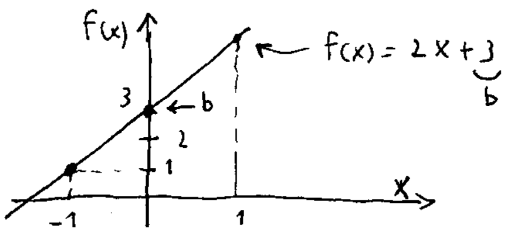
$$f_{(x)} = m\,x + b \quad \leftarrow \text{FUNCIÓN LINEAL}$$

La b es la ordenada al origen, es decir, el lugar donde la recta corta al eje y. La m es la pendiente de la recta. Esta pendiente se calcula haciendo la cuenta:

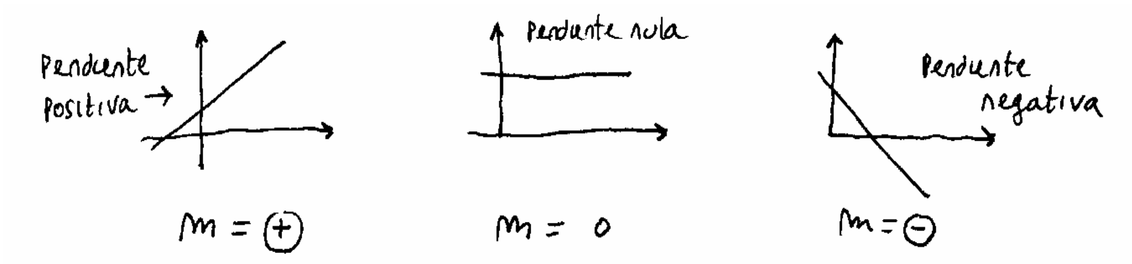
$$\boxed{m = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}}}$$

Supongamos que me dan la siguiente función lineal: $f_{(x)} = 2\,x + 3$. Voy a graficar esto. ¿Cómo hago? Y bueno. Le doy valores a x y saco los de $f_{(x)}$.

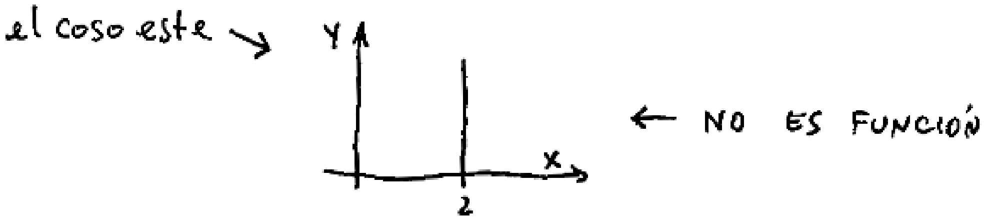
x	f(x)
0	3
-1	1
1	5



Hay algo importante que tenés que saber y es la cuestión de la pendiente. Tengo 3 casos. Mirá :



Ahora, ojo ! Las rectas verticales no son función. Ver acá :



En este caso, la ecuación de esta recta sería x = 2. Esto pasa porque otra recta vertical superpuesta "corta" a la recta x = 2 en más de 1 punto. En realidad la corta en ∞ puntos porque está superpuesta. Vamos a un ejemplo.

SE SABE QUE UNA FUNCIÓN LINEAL TOMA LOS SIGUIENTES VALORES: $f_{(2)} = 3$ y $f_{(4)} = 7$. HALLAR LA ECUACION DE LA FUNCION

Bueno, lo que hago es escribir la ecuación de una función lineal: $f(x) = m\,x + b$. Reemplazo ahora por los valores que me dieron:

$$f_{(2)} = m.\,2 + b = 3$$

$$f_{(4)} = m.\,4 + b = 7$$

Esto es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas. Lo puedo resolver por cualquier método.

$$\begin{cases} 2m + b = 3 \\ 4m + b = 7 \end{cases}$$

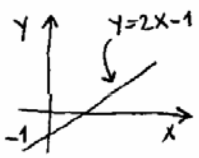
Despejo b de la 1ra y la reemplazo en la 2da:

$$b = 3 - 2\,m \quad \Rightarrow \quad 4\,m + (3 - 2\,m) = 7$$

$$\Rightarrow 4\,m + 3 - 2\,m = 7 \quad \Rightarrow \quad 2\,m = 7 - 3$$

$\boxed{m = 2}$ ⟵ VALOR DE LA PENDIENTE

Reemplazo ahora m = 2 en cualquiera de las ecuaciones y saco b. Fíjate :



$$2m + b = 3 \Rightarrow 2.2 + b = 3$$

$$\Rightarrow 4 + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 4$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -1} \longleftarrow \text{ORDENADA AL ORIGEN}$$

Quiere decir que la función buscada es : $\boxed{f(x) = 2\,x - 1}$

Ahora vamos a hacer esto para un caso general. Quiero obtener una fórmula general que va a valer para todos los casos . La idea es poder ahorrarme de trabajar con un sistema de 2 x 2 . Entonces :

$$f(x_1) = y_1$$

$$f(x_2) = y_2$$

me queda: $\begin{cases} m\,x_1 + b = y_1 \\ m\,x_2 + b = y_2 \end{cases}$

Voy a resolver este sistema restando miembro a miembro. A la 1ra ecuación le resto la 2da. Esto queda:

$$m x_1 - m x_2 = y_1 - y_2$$

$$\Rightarrow m(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$$

$$\Rightarrow \boxed{m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}} \longleftarrow$$

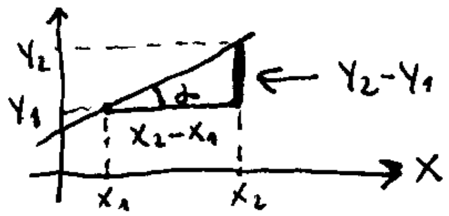
FÓRMULA PARA SACAR LA PENDIENTE

Vamos a ver si cumple con el ejercicio anterior. Yo tenía f(2) = 3 y f(4) = 7. Tonces:

$x_1 = 2$, $y_1 = 3$
$x_2 = 4$, $y_2 = 7$

$$\Rightarrow m = \frac{3-7}{2-4} = \frac{-4}{-2} = \underline{\underline{2}} \quad \text{(verifica)}$$

¿Cuál es el significado de esta fórmula? Bueno, lo puedo ver en este dibujo:



Es decir, lo que hace la fórmula es calcular la pendiente haciendo la cuenta opuesto sobre adyacente.

<u>OTRO EJEMPLO</u>

USANDO LA FORMULA PARA LA PENDIENTE, CALCULAR <u>m</u> SABIENDO QUE f(2) = 1 y f(5) = -3

Entonces, tengo que tener una función lineal del tipo f(x) = m x + b donde la pendiente viene dada por la siguiente fórmula:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

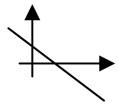
En este caso $x_2 = 5$, $y_2 = -3$ y $x_1 = 2$ e $y_1 = 1$. Entonces:

$$m = \frac{-3-1}{5-2} = \frac{-4}{3} \quad \Leftarrow$$

PENDIENTE DE LA RECTA

Fijate que me dio con signo negativo. ¿ Qué me indica el signo menos ?

Rta: Bueno, que la pendiente es **negativa**, es decir que la recta tiene que ir así:



Ahora planteo que:

$f(x) = -4/3\ x + b \quad \Rightarrow$ Reemplazo x por 2 y f(x) por 1:
$1 = -4/3 \cdot 2 + b \quad \Rightarrow$ De acá despejo b que me da:
$1 + 8/3 = b$

$\Rightarrow \boxed{b = 11/3} \longleftarrow$ ORDENADA AL ORIGEN

La función lineal buscada es: $f(x) = -4/3\ x + 11/3$

OTRO EJEMPLO

UNA RECTA PASA POR EL PUNTO P = (3, -4) y SU PENDIENTE ES m = - 2. HALLAR LA ECUACIÓN DE LA RECTA:

Lo que hago es esto: La ecuación tiene que ser: $y = -2x + b$ (porque m = - 2)

Como la recta pasa por x = 3 e y = - 4, reemplazo y me queda:

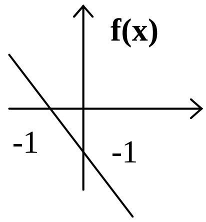
$$-4 = -2 \cdot 3 + b \quad \Rightarrow \quad -4 + 6 = b$$

$$\Rightarrow \quad b = 2$$

La función dada va a quedar: $\boxed{y = -2x + 2}$

OTRO EJEMPLO

Ahora me dan este gráfico y me piden hallar la ecuación correspondiente. Mirá
Es como si nos dieran 2 puntos. Sé que la recta corta al eje y en el punto -1.
Entonces
b = - 1. Ahora saco m. Los dos puntos por donde pasa la recta son (-1, 0) y (0, -1). Tengo 2 puntos y puedo sacar la pendiente con:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 0}{0 - (-1)} = \frac{-1}{1} = -1$$. Dio negativo.

Está ok porque la recta va así: 
La ecuación buscada va a ser: $\boxed{y = -1\ x - 1}$

INTERVALOS

Esto lo vas a entender mejor si ves un ejercicio. Fijate. Copien. Dicto:

EJERCICIO

DADAS f(x) y g(x) DETERMINAR EL CONJUNTO A DEFINIDO

COMO: $A = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \geq g(x) \}$

$f(x) = 3x + 2$

y $g(x) = 2x - 1$

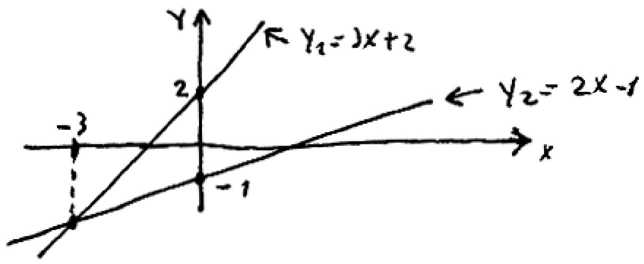
Lo que tengo que calcular son los x que $\in$ a los reales tales que f(x) sea mayor o igual que g(x). Es decir, planteo:

$$3\,x + 2 \geq 2\,x - 1$$

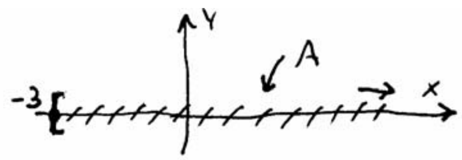
Resuelvo esta inecuación pasando a un miembro todo lo que tiene x.

$$3\,x - 2\,x \geq -1-2 \quad \Rightarrow \quad x \geq -3$$

Esta es la solución analítica del problema. Voy a resolverlo ahora gráficamente. Represento las 2 funciones:



Ahora, todos los x $\in$ R tal que $y_1 \geq y_2$ son los $x \geq -3$. Eso lo saco mirando el gráfico. Veo que para cualquier $x \geq -3$ la recta y_1 está siempre por arriba de la y_2. Representando gráficamente el intervalo obtenido me queda:



$A = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq -3 \}$

Vamos a otro ejemplo de intervalos. ¿ Si lo toman ? Sí, lo toman, pero es fácil. Fijate:

DADAS f(x) y g(x) DETERMINAR EL CONJUNTO A DEFINIDO

f(x) = -2 x +1 y g(x) = 4x +1. COMO: $A = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) \geq g(x) \}$

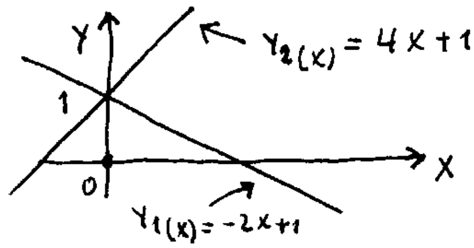
Piden lo mismo que antes. O sea, dar el intervalo en donde f(x) ≥ g(x). Bueno, planteo entonces que f(x) ≥ g(x), es decir:

$$-2x + 1 \geq 4x + 1 \Rightarrow 1 - 1 \geq 4x + 2x$$

$$\Rightarrow 0 \geq 6x \Rightarrow 0 \geq x \Rightarrow x \leq 0$$

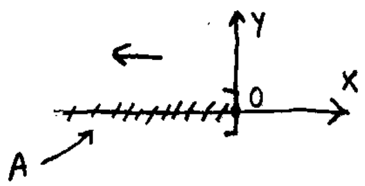
Entonces el conjunto solución será: $A = \{ x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq 0 \}$

Voy a representar las rectas en un gráfico para verificar lo que hallé:



Para hacer el gráfico tuve en cuenta que las ordenadas al origen eran 1 para las 2 rectas y que en un caso la pendiente era positiva y en el otro -, por lo tanto las rectas deberían ir así ↗ y así ↘ respectivamente.

Gráficamente la representación del conjunto A es:



$A = \{ X \in \mathbb{R} \ / \ X \leq 0 \}$

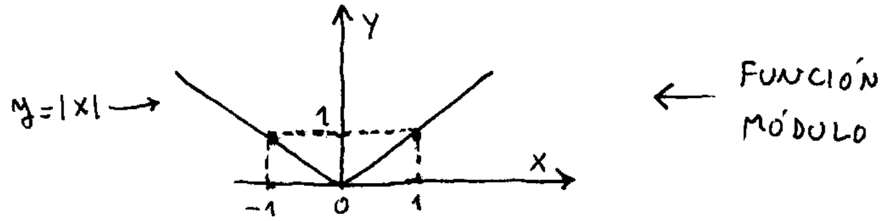
Mirando el gráfico con las 2 rectas veo que siempre que tenga un <u>x ≤ 0</u> , la función será mayor que la g(x). (esto era justamente lo que yo buscaba).

<u>FUNCIÓN MÓDULO</u>

Acá presten un poco de atención porque siempre se confunden. Vamos a ver la función MODULO de equis. Tomar módulo significa considerar el <u>valor absoluto</u> de x. Esto se escribe: f(x) = |x|. Esto lo vamos a usar mucho. Le doy valores a x y saco los de f(x). Es decir, si x = 1, |x| será 1. Si x = -1, el |x| será también 1. Matemáticamente la función módulo de x se define así:

$$F_{(x)} = |x| \longrightarrow \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Represento esta función:



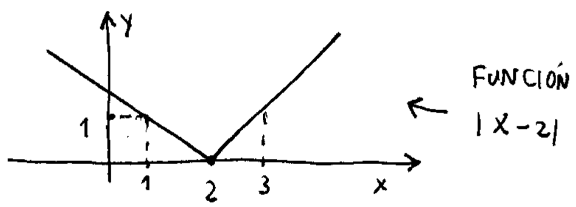
Esta función es como la función y = x pero igual de los 2 lados. El eje Y es el eje de simetría. Es como si el eje Y fuera un espejo.

EJEMPLO

GRAFICAR LA FUNCION f(x) = |x - 2|

Lo que hago es darle valores a **x** y formar una tabla:

X	f(x)
0	2
1	1
2	0
3	1



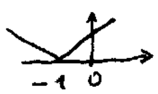
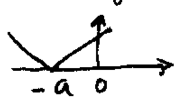
Esta función es igual a la función módulo de x (|x|) pero toda corrida para allá → en 2 lugares. Vamos a hacerlo ahora en forma analítica, es decir, aplicando la definición de módulo.

Fíjate. Tengo f(x) = |x - 2|. Eso significa que aplicando la definición me queda:

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{si } x-2 < 0 \end{cases}$$

Ahora, x -2 ≥ 0 significa x ≥ 2 y x -2 < 0 significa x < 2. La función queda definida así:

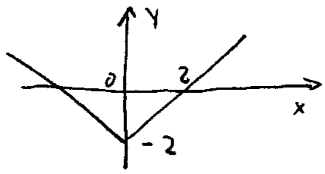
$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

Si hubiera tenido la función F(x) = |X+1| me quedaría así: →  . Si tengo la función f(x) = |x+a| queda siempre así: →  .

Fíjense ahora esta otra función: $f_{(x)} = |x| - 2$. ¿ será igual que la anterior?

<u>RTA</u>: <u>NO</u>. Voy a hacer una tabla con valores y la represento:

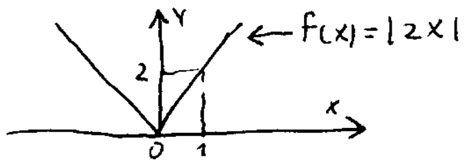
X	$\|X\| - 2$
0	-2
1	-1
2	0
-1	-1



← FUNCIÓN $|X| - 2$

Es decir, lo que pasa es que todo el gráfico se va para abajo en 2 unidades.
Si tuviera $f(x) = |a.x|$ me queda como la $|x|$ pero más abierta o más cerrada.
Supongamos que a = 2. Le doy valores a x y me queda:

X	$\|2x\|$
0	0
1	2
-1	2



Es decir, al meter el 2 adentro hizo que la función se cerrara. La $|x|$ era así: → . La $|2x|$ es así: → .

¿ Cuál es la pregunta ? ¿ Qué para que sirve la función módulo ?
Rta: Eeehhhhmmm... Que se yo. Para nada. La matemática es así. Uno define cosas y después se pone a jugar con ellas. ¿ Cómo? ¿ Que ? ¿ Que estoy chapita ? Sí, sí, los matemáticos estamos re-chapitas ! (Risas)

<u>EL CASO DEL MOVIMIENTO RECTILINEO Y UNIFORME</u>

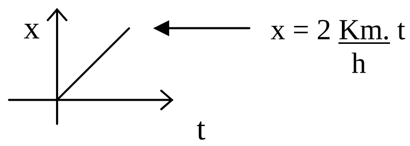
Este es un tema de física. ¿ Alguien cursa física ? En física la ecuación de la posición de un móvil que se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme es:

$$x(t) = x_o + v\,(t - t_o)$$

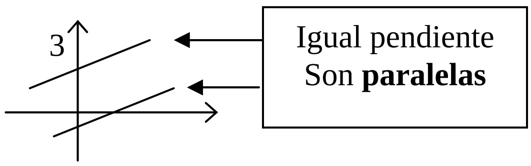
Esta es una función lineal. V es la velocidad del móvil y x_o es la posición inicial. (Es el lugar de donde salió). t_o es la hora en el momento de salir.

Si tengo el caso de que $x_o = 0$ y $t_o = 0$ $\Rightarrow$ me queda: $x_{(t)} = v.t$

Esta es una ecuación del tipo y = m x . Acá a **y** yo la llamé **x** y a **x** la llamé **t**. Lo demás es lo mismo.
Si tuviera por ejemplo $x_{(t)} = 2\ Km/h\,.\,t$, la representación sería:



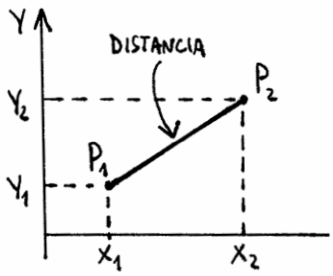
Lo que tienen que ver acá es que si la velocidad del móvil es positiva, la recta va a ir así: ↗ . Si la velocidad fuera negativa, la recta iría así ↘ . Esto es porque en el gráfico x = f(t), la velocidad del movimiento es la pendiente. Si los 2 móviles tuvieran la misma velocidad pero uno estuviera 3 Km. más adelante que el otro, el gráfico quedaría:



Esto es porque la velocidad es la <u>PENDIENTE</u>. Si los tipos tienen igual velocidad, las dos rectas deberán ser paralelas (no importa de donde hayan salido)

<u>DISTANCIA ENTRE 2 PUNTOS</u>

Che, anoten esto porque lo toman. Supongamos que tengo 2 puntos P_1 y P_2. Las coordenadas del punto P_1 son (x_1, y_1). Las coordenadas del punto P_2 son (x_2, y_2).



Entonces la distancia que va de P_1 a P_2 se calcula con esta fórmula:

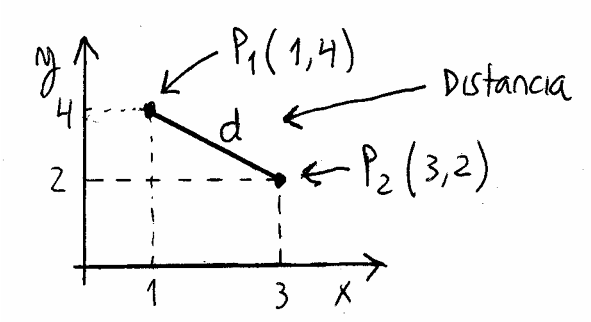
$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

No voy a hacer la deducción de esta fórmula choclaza. Pero si lo pensás un poco, vas a ver que sale de plantear el teorema de Pitágoras en el triángulo formado entre los puntos P_1 y P_2.

Che, ahora ojo, entiendan lo que estoy diciendo. Cuando digo "calcular la distancia" me estoy refiriendo efectivamente a la distancia real que hay de un punto a otro.
O sea, la distancia que vos podrías ir y medir con una regla sobre el papel.
Vamos a un ejemplo:

CALCULAR LA DISTANCIA QUE HAY ENTRE
LOS PUNTOS P_1 (1 , 4) Y P_2 (3 , 2)

Solución: Bueno, hago un dibujito y escribo la fórmula



La distancia va a ser: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$

Entonces: $d(P_1, P_2) = \sqrt{(2 - 4)^2 + (3 - 1)^2}$

➔ $d(P_1, P_2) = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = \sqrt{8}$

Raíz de 8 es más o menos 2,82. Si hicieras el dibujito en escala en un papel, la distancia entre P_1 y P_2 medida con una regla te daría 2,82 cm.

FUNCIONES LINEALES - EJERCICIOS DE PARCIALES

Vamos a resolver algunos ejercicios que saqué de parciales.

L MATEMATICA PRIMER PARCIAL TEMA 4 ASIMOV

APELLIDO: ....NOMBRES:....... ................D.N.I: .. ..

1	2	3	4	NOTA
X	M	B⁻	B⁻	4 (cuatro)

INSCRIPTO EN : SEDE: CIUDAD .DIAS: MARTES/VIERNES

HORARIO: 20-23 .AULA: 319.

CORRECTOR: Evangelina.

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta

1) Hallar todos los puntos de la recta y=3x que están a distancia $\sqrt{40}$ del origen de coordenadas.

Solución: Esos puntos están sobre la recta y = 3x → son de la forma P = (a ,3a)

Nos dan la distancia al centro de coordenadas: $\sqrt{40}$ (o sea, al punto (0 , 0)).

Entonces, usamos la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

$$\sqrt{40} = \sqrt{(3a - 0)^2 + (a - 0)^2}$$

$$40 = 10\, a^2$$

$$a^2 = 4 \rightarrow |a| = \sqrt{4} = 2$$

Nos dan dos resultados para a. Entonces tenemos dos puntos:

a = 2 → $\boxed{P = (2,6)}$ y a = - 2 → $\boxed{P = (-2,-6)}$

M MATEMATICA PRIMER PARCIAL TEMA 2 ASIMOV

APELLIDO:..............................NOMBRES:......................................D.N.I:............................

INSCRIPTO EN: SEDE:......................DIAS:....................

HORARIO:...............AULA:....................

CORRECTOR: ....

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta

1. Escribir como intervalo o como unión de intervalos el conjunto $A = \{x \in R / \frac{4}{x} > 5\}$

<u>Solución:</u> Pasamos multiplicando la x $\rightarrow$ hay que ver las dos opciones

- Si $x > 0 \rightarrow 4 > 5x \rightarrow x < {}^4/_5 \rightarrow x \in (0\,;\,{}^4/_5)$

- Si $x < 0 \rightarrow 4 < 5x \rightarrow x > {}^4/_5 \rightarrow$ no puede ser las dos cosas a la vez

Entonces, ese conjunto es igual a intervalo $\boxed{(0\,;\,{}^4/_5)}$

MATEMATICA **PRIMER PARCIAL** **TEMA 3**

APELLIDO: [redacted] ....**NOMBRES:** .Fernanda........**D.N.I:** [redacted]

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B	10 (DIEZ)

INSCRIPTO EN : **SEDE:**........**DIAS:**........
HORARIO:.........**AULA:** .1..

CORRECTOR: [illegible]

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta

1. Escribir el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{5}{x+4} < 1\}$ como intervalo o como unión de intervalos.

<u>Solución:</u> Nos piden que escribamos el conjunto A como un intervalo o unión de intervalos. Entonces:

$$\frac{5}{(x+4)} < 1$$

Despejemos: $\frac{5}{(x+4)} - 1 < 0$ Me conviene sacar denominador común (x + 4)

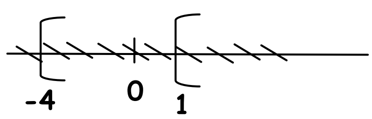
$$\Rightarrow \frac{5}{(x+4)} - \frac{1\,.\,(x+4)}{(x+4)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{5 - x - 4}{(x+4)} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-x}{x+4} < 0$$

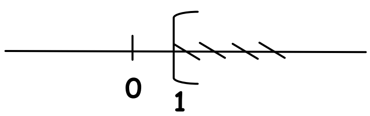
Para que toda la fracción sea negativa hay dos posibilidades:

<u>Caso 1</u>: $(1 - x) < 0$ y $(x + 4) > 0$

Despejando de $(1 - x) < 0$ me queda que $1 < x$, o sea $x > 1$. También se tiene que cumplir que $(x + 4) > 0$, o sea, $x > -4$. Representemos esto en una recta numérica:

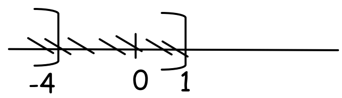


Muy bien. La solución que cumple con las dos desigualdades a la vez es $S_1 = (1\,;\,+\infty)$



<u>Caso 2</u>: Se tiene que cumplir que $(1 - x) > 0$ y $(x + 4) < 0$

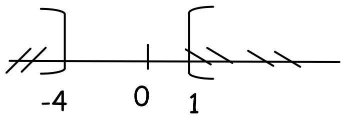
De $(1 - x) > 0$ me queda que $1 > x$. De $(x + 4) < 0$ me queda que $x < - 4$.
Representemos en una recta las dos desigualdades:



La solución que cumple con las dos desigualdades es $S_2 = (-\infty ; - 4)$. Ahora bien la solución total es la unión de estos intervalos:

$$S_2 \cup S_1 = (- \infty ; - 4) \cup (1 , + \infty)$$

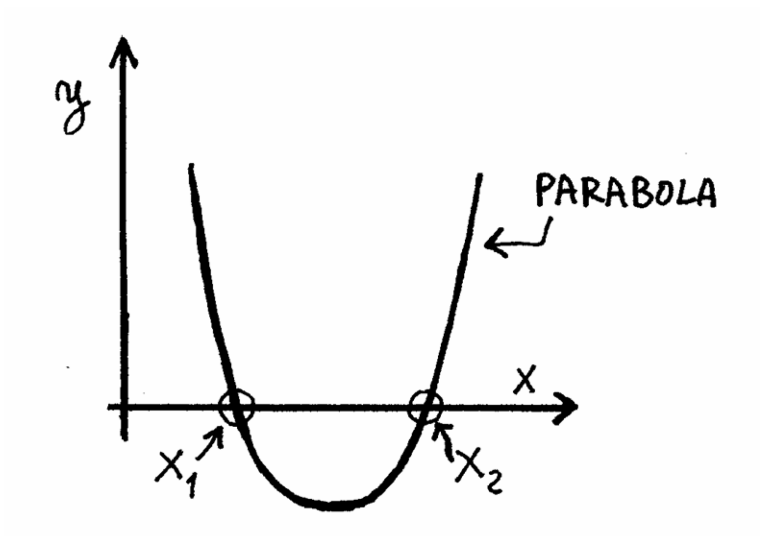
En la recta se vería así:



<u>Rta</u>: La solución al conjunto A es $(- \infty ; - 4) \cup (1 , + \infty)$

FIN FUNCIONES LINEALES

FUNCIONES CUADRÁTICAS



RAICES

$$x_{1-2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

SOLUCIÓN DE LA CUADRÁTICA

FUNCIONES CUADRÁTICAS

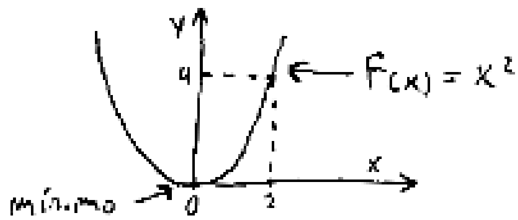
¿ Qué es una función cuadrática ? <u>Rta:</u> son las funciones que tienen esta forma:

$$\boxed{f(x) = a\,x^2 + b\,x + c} \longleftarrow \text{FUNCIÓN CUADRÁTICA}$$

Fíjense que el valor **a** no tiene que ser cero porque sino estaría en el caso de una función lineal. Siempre en las funciones cuadráticas el dominio serán los reales y el codominio también. El gráfico de una f cuadrática es una parábola.

Vamos a graficar una función cuadrática fácil $\Rightarrow$ Por ejemplo $y = x^2$
¿ Cómo hago ? Bueno, le voy dando valores a **x** y saco los de **y**. Formo esta tabla

Y	X
1	-1
0	0
1	1
4	2



Fíjense que el gráfico es simétrico. Es decir, de los dos lados es igual. La función $y = x^2$ tiene la forma $y = a\,x^2 + b\,x + c$. Lo que pasa es que acá **a** vale 1 y **b** y **c** valen cero. (es decir, tengo $y = 1.x^2 + 0.x + 0$). En el eje **x** uno mira el **dominio**. En el eje **y** uno mira la **imagen** y el **codominio**. Puedo decir, mirando el gráfico que:

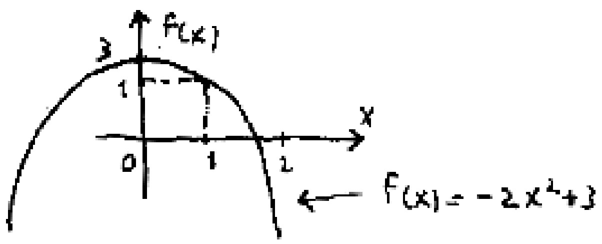
Para $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$

La imagen de f será: $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$

Ojo, es importante que recuerdes la manera de escribir intervalos !

Vamos a graficar otra función cuadrática un poco más complicada: $y = -2\,x^2 + 3$.

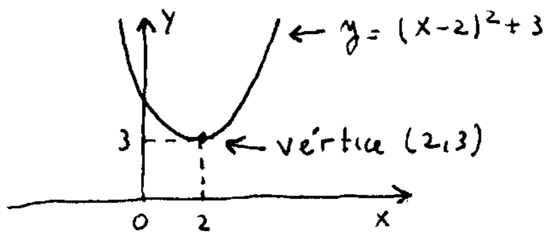
Hacemos la tabla y el gráfico:



x	f(x)
0	3
1	1
2	-5
3	-15

La parábola va para abajo. Eso pasa porque el término **a** es negativo. Siempre que **a** sea negativo la parábola va a ir así: ∩ . (Está triste).
Si a es positivo la parábola va a ir para arriba. (Sonríe)
El vértice de esta parábola está en el punto (0 , 3). El máximo está en x = 0. El eje de simetría es el eje **y**. La imagen de la función será: Im (f): (-∞, 3]

OTRO EJEMPLO: Representar $y = (x - 2)^2 + 3$



f(x)	X
12	-1
7	0
4	1
3	2

← Hago esta tabla

El (x – 2) hace que toda la función se corra para allá → en dos unidades.
El +3 hace que toda la función se corra para arriba en 3 unidades.

El mínimo de la parábola está en x = 2. El eje de simetría es la recta x = 2.
La imagen de la función es Im (f) = R ≥ 3

La función $f(x) = (x-2)^2 + 3$ no parece tener la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sin embargo es una cuadrática. Fijate. Hago el cuadrado del binomio y veamos que da:

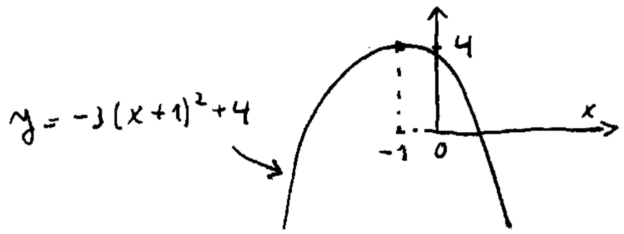
$$f(x) = (x - 2)^2 + 3 = \underbrace{(x^2 - 2.2\,x + 2^2)}_{\text{cuadrado del binomio}} + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4\,x + 4 + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4\,x + 7$$

¿ Es lo mismo escribir la ecuación de cualquiera de las dos maneras ?
Rta: SI, es lo mismo. Lo que pasa es que si quiero graficar, la primera manera me permite hacerlo prácticamente sin tener que hacer una tabla.

Por ejemplo quiero que dibujen a ojo esta función: $Y = -3(x + 1)^2 + 4$. Vayan pensándolo. ¿ Listo ? Bueno. ¿ a ver que hicieron ?
El + 1 me dice que la función está corrida para allá ← en 1 unidad. El + 4 me dice que la parábola está corrida en 4 unidades para arriba. El - del 3 indica que va para abajo. De manera que el gráfico tiene que dar algo así:



¿ El 3 que significa ? Bueno, solamente me dice si la parábola va a ser más ancha o más angosta. (así ⌒ o así ∩)
Ahora quiero poner todo esto en forma general. Supongamos que tengo la parábola escrita en la forma $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Eso querrá decir que el vértice está en el punto (α,β)

Ojo, (α, β), <u>NO</u> $(-\alpha, \beta)$. Recuerden esto.

Si **a** es positiva la cosa irá para arriba ◡ (sonriente). Si **a** es negativa la cosa iría así ⌒ (triste).

El eje de simetría será la recta $x = \alpha$.

<u>VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA</u>

Hay una cosa que se llama completar cuadrados. La deducción no la voy a hacer. Les voy a dar las fórmulas finales. Estas fórmulas sirven para escribir la parábola en la forma $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$, si a uno se la dan escrita en la forma $f(x)= ax^2 + bx + c$. Las dos fórmulas son:

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \longleftarrow$$ COORDENADA EQUIS DEL VERTICE

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a} \longleftarrow$$ COORDENADA Y DEL VERTICE

Vamos a hacer un ejemplo. Me dan la parábola $f(x) = 2x^2 - 4x + 7$. Tengo: $a = 2$, $b = -4$ y $c = 7$. Entonces :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 2} = 1 \leftarrow X_v$$

$$\beta = c - \frac{b^2}{4a} = 7 - \frac{(-4)^2}{4 \cdot 2} = 7 - \frac{16}{8} = 5 \leftarrow Y_v$$

⇒ La ecuación será:

$$F(x) = \overbrace{2}^{a}(x - \overbrace{1}^{\alpha}) + \overbrace{5}^{\beta}$$

Tener formulitas así no es muy lindo. Vamos a ver esto. ¿ Cómo sé donde corta la parábola al eje x ? Rta: Bueno, tengo que aplicar una fórmula que te debés acordar. Es la fórmula de la resolvente de la cuadrática:

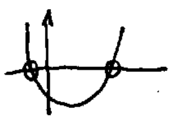
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a.}$$

Para una de las soluciones uso el signo +, y para la otra uso el signo - . De ahí saco las 2 raíces x_1 y x_2. Raíz quiere decir que ahí la función corta al eje x.

Hay 3 casos posibles. Puedo tener 2 raíces, 1 raíz o ninguna raíz.
¿ Cuándo tengo dos raíces ? Bueno, llamemos al término $b^2 - 4ac$, discriminante (Δ).

* Si el discriminante es positivo, tendré dos raíces.
* Si el discriminante es cero, tendré una sola raíz
* Si el discriminante es negativo, no tendré ninguna raíz.

La representación de los 3 casos es:



$b^2 - 4ac = \oplus$ (2 raíces)

$b^2 - 4ac = \ominus$ (ninguna raíz)

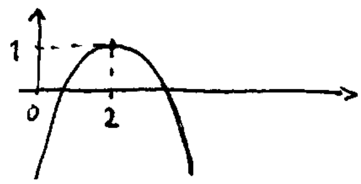
$b^2 - 4ac = 0$ (1 raíz)

RECTA TANGENTE

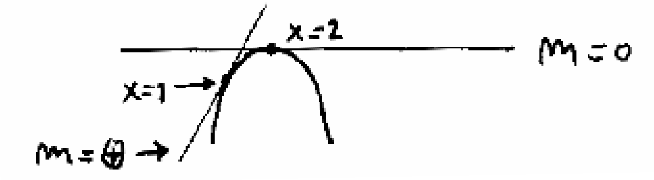
Es una recta que roza a la función en un punto. Es decir, no corta a la función, sino que pasa justo por ahí apenas tocándola. Por ejemplo:

← RECTAS TANGENTES

Supongamos que me dan: $f(x) = -(x-2)^2 + 1$.
Según lo que vimos el gráfico da así:

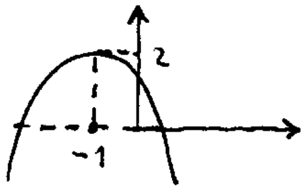


Si me piden trazar la recta tangente a la parábola en el punto x = 1 y x = 2 tendría que hacer lo siguiente:



Lo que quiero que veas es esto: cuando la función crece, la pendiente de la recta tangente va a ser positiva. Cuando la función decrece, la pendiente de la recta tangente va a ser negativa. ¿ y cuándo tengo un máximo o un mínimo que pasa ? Rta: Bueno, la pendiente de la recta tangente va a dar <u>CERO</u>. Todo esto lo vamos a usar mucho después cuando veamos derivadas e integrales.

Veamos un ejemplo:
Me dan la parábola y = - (x + 1) + 2. Me piden graficarla. Eso da así:



$x_v = -1$

$Y_v = +2$

Las coordenadas del vértice son x = -1 e y = 2. Las escribo de la otra manera:

$$f(x) = -(x+1)^2 + 2 = -(x^2 + 2x + 1) + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x - 1 + 2$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^2 - 2x + 1$$

¿ Cuáles son las raíces ? Bueno aplico la formulita:

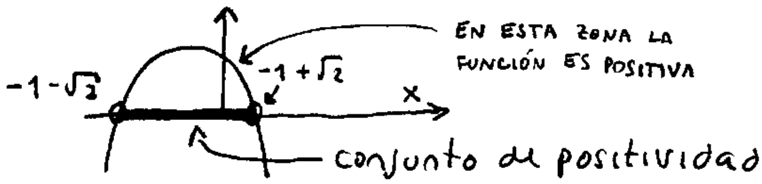
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad a = -1,\ b = -2,\ c = 1$$

ESO DA: $$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\,(-1)\,1}}{2.(-1)}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{-2} \quad \leftarrow$$ RAICES DE LA ECUACIÓN

CONJUNTO DE POSITIVIDAD

Son los valores de x en donde la función es positiva. Para saber donde una función es positiva, lo que tengo que hacer es mirar el gráfico y ver si la curva está por arriba o por debajo del eje x. Eso es todo.
Si miran el gráfico van a ver que la función toma valores positivos para los valores de x comprendidos entre las dos raíces. Es decir:



Al conjunto de positividad lo vamos a designar como C_+ y en este caso va a ser:

$$C_+ = \left(-1-\sqrt{2}\ ,\ -1+\sqrt{2}\right) \longleftarrow \text{CONJUNTO DE POSITIVIDAD.}$$

También podemos hablar de conjunto de negatividad. Ese conjunto serían los valores del dominio tales que en ellos la función es negativa. Lo designamos como C_- y en este caso sería:

$$C_- = \left(-\infty,\ -1-\sqrt{2}\right) \underbrace{\cup}_{\text{unión}} \left(-1+\sqrt{2}\ ,\ \infty\right)$$

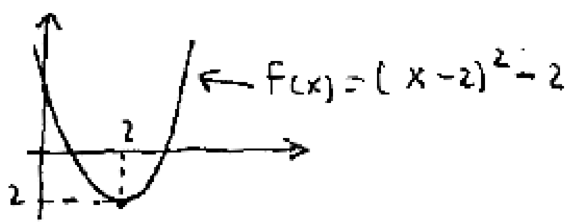
El lugar donde la función no es positiva ni negativa son los x tal que en ellos la función corta al eje x. Lo designamos como C_0 y en este caso sería:

$$C_0 = \left\{-1-\sqrt{2}\ ;\ -1+\sqrt{2}\right\}$$

Vamos a este otro ejemplo:

Hallar el conjunto de positividad de la parábola: $f(x) = (x - 2)^2 - 2$

Lo primero que hago es graficar la función. Veo que va para arriba y está corrida en 2 a la derecha y en 2 para abajo. Ahora hago el dibujo.



Para saber donde corta la parábola al eje equis, desarrollo el binomio al cuadrado. Lo hago para tener escrita a f en forma de $ax^2 + bx + c$.

$$f(x) = (x - 2)^2 - 2 = (x^2 - 2.2\,x + 4) - 2$$

$$\Rightarrow\ f(x) = x^2 - 4x + 4 - 2$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 2$$

Tengo así: $a = 1$ $b = -4$ $c = 2$

Hago la fórmula $-b \pm$ etc, etc y me queda:

$$x_1 = 2 - \sqrt{2} \qquad x_2 = 2 + \sqrt{2}$$

Los conjuntos de positividad y negatividad van a ser:

$$C_+ = (-\infty, 2 - \sqrt{2}) \cup (2 + \sqrt{2}, +\infty)$$

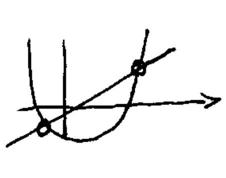
$$C_- = (2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

$$C_0 = \{2 - \sqrt{2} ; 2 + \sqrt{2}\}$$

Esto no es difícil. Hagan los ejercicios de la guía. Es siempre lo mismo. Grafican la parábola, se fijan donde corta al eje x y después hallan los conjuntos de positividad y negatividad.

INTERSECCIÓN ENTRE UNA RECTA Y UNA PARÁBOLA

Una recta y una parábola se pueden cortar o no. Tengo los siguientes casos:



Hay 2 puntos

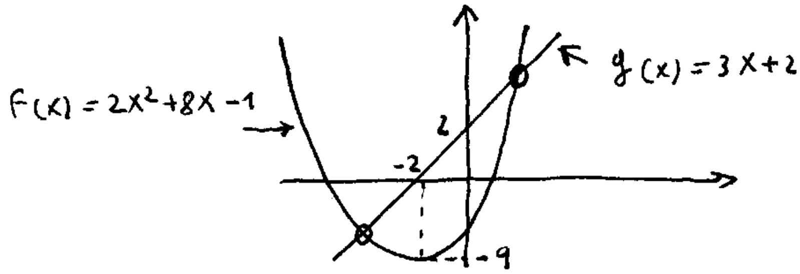
Hay 1 solo punto

No hay ningún punto.

Vamos a hacer un ejemplo:

HALLAR LA INTERSECCIÓN ENTRE LA RECTA $g(x) = 3x + 2$ Y LA PARÁBOLA $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$

Bueno, lo que hago es graficar la recta y la parábola y ver donde se cortan.



Lo que hice fue resolver el ejercicio gráficamente. Ahora quiero resolverlo analíticamente. ¿ Qué hago ? A ver, piensen. Claro, tengo que igualar las dos ecuaciones y despejar x. Entonces: Hago f(x) = g(x) :

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x - 1 = 3x + 2$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 8x - 3x - 1 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

Aplico la fórmula para las raíces de la ec. cuadrática y me da:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4} \qquad a = 2,\ b = 5,\ c = -3$$

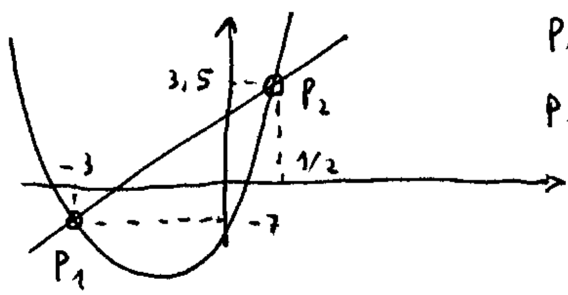
$$\Rightarrow \underline{x_1 = -3} \ ; \ \underline{x_2 = \tfrac{1}{2}}$$

Estas son las coordenadas de **x** donde se cortan la recta y la parábola. Para hallar las coordenadas **y**, lo que hago es reemplazar x_1 y x_2 en la ecuación de f(x) o de g(x). Si hice todo bien, tendría que dar lo mismo. Si hago eso me da:

$$g_{(-3)} = 3(-3) + 2 = -7$$

$$g_{(1/2)} = 3(1/2) + 2 = 3.5$$

Entonces, los puntos de encuentro son:



$P_1 = (-3, -7)$

$P_2 = (\frac{1}{2} ; 3{,}5)$

Quiero que veas ahora otra aplicación de todo este tema de funciones cuadráticas. Vamos a hacer el problema del rendimiento de la nafta.

PROBLEMA:

EL RENDIMIENTO DE NAFTA r (EN Km/LITRO) DE UN AUTOMOVIL ESTÁ RELACIONADO CON LA VELOCIDAD (EN Km/h) POR LA FUNCIÓN:

$$r(v) = -1/3\ v^2 + 60\ v \qquad \text{con } 0 < v < 180$$

a) HALLAR LOS VALORES DE v PARA LOS CUALES EL RENDIMIENTO DE NAFTA AUMENTA CON v Y LOS VALORES DE v PARA LOS CUALES EL RENDIEMIENTO DE NAFTA DISMINUYE.
b) HALLAR LA VELOCIDAD PARA LA CUAL EL RENDIEMITNO ES MÁXIMO Y CACULAR DICHO RENDIMIENTO.

a) Tengo que graficar la función $r_{(v)} = -1/3\ v^2 + 60\ v$. Esto me va a dar una parábola que va para abajo. Fijate que el domino está restringido (la función solo ∃ para valores de v comprendidos entre 0 y 180 Km/h.

Para graficar, hago lo de siempre. Calculo las coordenadas del vértice.

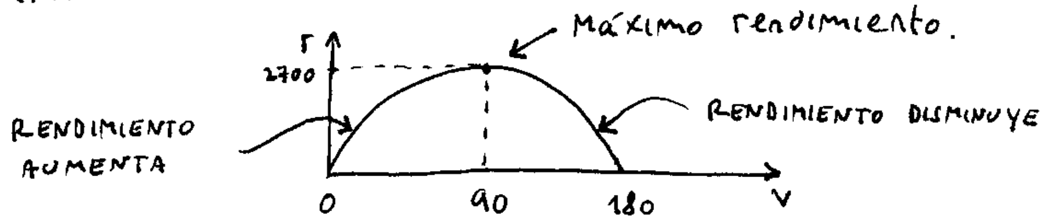
$$x_V = \frac{-b}{2a} \quad y \quad y_V = c - \frac{b^2}{4a}$$

Haciendo las cuentas me da:

$$x_V = \frac{-60}{2 \cdot (-\frac{1}{3})} = 90$$

$$y_V = 0 - \frac{(-60)^2}{4(-\frac{1}{3})} = \frac{-3600}{-\frac{4}{3}} = +2700$$

El gráfico va a dar así



a) Entonces veo que el rendimiento de nafta aumenta en (0, 90) y disminuye en (90, 180).

b) La velocidad para la cual el rendimiento es máximo es v = 90 Km/h. El máximo rendimiento será r = 2.700 Km/L.

<u>PROBLEMA</u>: Se lanza una pelota desde 25 m de altura. Piden hacer el gráfico de la posición en función del tiempo y preguntan en que momento la pelota vuelve a estar a 25 m de altura. Dan como dato la ecuación de la posición en función del tiempo que es: $s(t) = -16\,(t-3)^2 + 169$ Para $t \geq 0$

Hago el gráfico de esto. Las coordenadas del vértice son (3, 169). Vamos a ver dónde corta esta función al eje t. En este caso como tengo expresada la función en la forma $y = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$. Puedo directamente despejar directamente $(t - 3)^2$ sin usar la fórmula para la ecuación cuadrática. Igualo a cero:

$$-16\,(t-3)^2 + 169 = 0$$

$$\Rightarrow -16\,(t-3)^2 = -169$$

$$\Rightarrow (t-3)^2 = \frac{169}{16}$$

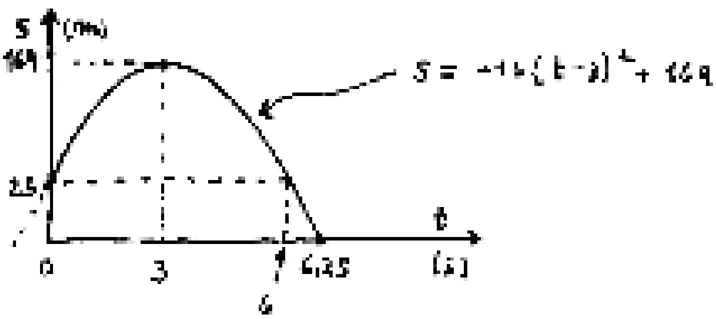
Los 2 signos menos se cancelan. Ahora lo que no se tienen que olvidar es que cuando pasan el ^{2} al otro lado como raíz cuadrada, esa raíz tiene <u>doble signo.</u>

Miren:

$$(t-3)^2 = \frac{169}{16} \quad \Rightarrow t - 3 = \pm\sqrt{\frac{169}{16}} \quad \Rightarrow t_{1,2} = 3 \pm 3{,}25$$

Si hubiera hecho esto aplicando la fórmula para la ecuación cuadrática … ¿ me hubiera dado lo mismo ?

Rta: Sí, claro. <u>TIENE QUE DAR LO MISMO</u>. (Probalo). El gráfico queda:



Si me preguntan en que momento pasa otra vez por la posición s = 25 m, la respuesta es a los 6 segundos. Eso lo veo mirando el gráfico. Uno puede evaluar s = 25 m en la ecuación, pero yo quiero que vean que la parábola es simétrica alrededor de la recta vertical x = 3. Por eso sé que a los 6 segundos va a volver a estar a los 25 m.
De cualquiera de las 2 maneras que lo hagan está bien. Pero no se olviden este asunto de la simetría de las parábolas. Puede ser que lo tengan que usar en algún caso, como por ejemplo en éste de recién.

FUNCIONES CUADRATICAS - EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES

2. Dar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola $y=(x+1)(x+7)$ y por el punto en que dicha parábola corta al eje y.

Este ejercicio no es complicado, sólo tenés que leer bien el enunciado y ordenar lo que te piden. Vamos. Tenemos que encontrar la ecuación de la recta que pasa por el vértice de la parábola y = (x +1) (x + 7) y pasa por el punto en que la parábola corta al eje y.

Calculemos el vértice de la parábola. Como la parábola es simétrica, las raíces van a estar a la misma distancia del vértice. Entonces a x_v la podemos calcular así:

$$\boxed{x_v = \frac{(x_{raíz\,1} + x_{raíz\,2})}{2}}$$

Como la parábola está escrita como un producto, las raíces están a la vista:

$$x_{raíz\,1} = -1 \quad y \quad x_{raíz\,2} = -7$$

Reemplazando en la ecuación para calcular el vértice:

$$x_v = \frac{(-1) + (-7)}{2}$$

$$x_v = -4$$

Para calcular y_v reemplazamos en la ecuación de la parábola y = (x +1) (x + 7)

$$y_v = (-4 + 1)(-4 + 7)$$

$$y_v = -9$$

Llegamos a uno de los puntos por los que pasa la recta es: P_1 = (-4, -9). Busquemos el punto donde la parábola corta al eje y, esto ocurre cuando x = 0.

$$y = (0 + 1)(0 + 7)$$

$$\Rightarrow \quad y = 7$$

El otro punto por el que pasa la recta es: P_2 = (0 , 7). Con estos dos puntos podemos construir la recta. Bueno, lo que hago es escribir la ecuación de una función lineal: f(x) = m x + b. Reemplazo ahora por los valores de P_1 y P_2:

$$f(-4) = m.(-4) + b = -9$$

$$f(0) = m.0 + b = 7$$

Esto es un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\begin{cases} -4\,m + b = -9 \\ b = 7 \end{cases}$$

Reemplazo <u>b</u> en la 1er ecuación para calcular <u>m</u>

$$\Rightarrow \quad -4\,m + b = -9 \quad \Rightarrow \quad -4\,m + 7 = -9$$

$$\Rightarrow -4\,m = -9 - 7$$

$\boxed{m = -16}$ ← VALOR DE LA PENDIENTE

<u>Rta</u> : La ecuación de la recta queda así $\boxed{y = -16\,x + 7}$

---

2) Sea la función cuadrática f cuyo gráfico es la parábola de vértice V=(-4,-2) que pasa por el punto (-3,16). Hallar el conjunto de ceros y el conjunto de positividad de la función f.

La función cuadrática tiene esta forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tenemos tres incógnitas: a, b y c. Entonces, necesitamos tres ecuaciones. Las sacamos de los datos que nos dan:

- Pasa por el punto (-3 , 16) $\rightarrow f(-3) = a\,(-3)^2 + b\,(-3) + c = 9a - 3b + c = 16$
- La abscisa del vértice es - 4 $\rightarrow x_v = -\dfrac{b}{2a} = -4$
- Pasa por el punto (-4 , -2) $\rightarrow f(-4) = a\,(-4)^2 + b\,(-4) + c = 16\,a - 4b + c = -2$

Si resolvemos este sistema de tres ecuaciones, nos queda la función

$$a = 18,\ b = 144 \text{ y } c = 286$$

$$\rightarrow \quad f(x) = 18\,x^2 + 144\,x + 286$$

Los ceros de esta función los podemos calcular con la formulita:

$\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ → Los ceros son $-{}^{11}/_{3}$ y $-{}^{13}/_{3}$

El dominio nos queda dividido en tres intervalos (lo dividimos en los ceros).

Vemos que es positiva en $\boxed{(-\infty,\ -{}^{13}/_{3}) \cup (-{}^{11}/_{3}\ ,\ +\infty)}$

---

2. Sea f(x)= $\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x+c$ .Hallar el valor de c ϵ R de manera que la imagen de f sea el intervalo [-3;+∞). Para el valor de c encontrado,hallar el conjunto de positividad de f

La función tiene un mínimo en el vértice. La abscisa del vértice la calculamos como $x_v = -\frac{b}{2a}$. En este caso, nos da $x_v = -1$

Entonces, el mínimo valor de la función va a ser

$$f(-1) = \tfrac{3}{4}\,(-1)^2 + \tfrac{3}{2}\,(-1) + c = c - \tfrac{3}{4}$$

Nos piden que la imagen de la función sea [-3 ; +∞) → el mínimo es -3

$$c - \tfrac{3}{4} = -3 \quad \rightarrow \quad c = -3 + \tfrac{3}{4}$$

$$\rightarrow \boxed{c = -\tfrac{9}{4}}$$

Entonces, la función nos queda $f(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$

Calculamos los ceros: $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow 1 \;\text{ y }\; -3$

El dominio nos queda dividido en tres intervalos:

(-∞ ; -3) → $f(-4) = \frac{15}{4} > 0$
(-3; 1) → $f(0) = -\frac{9}{4} < 0$
(1; +∞) → $f(2) = \frac{15}{4} > 0$

El conjunto de positividad es $\boxed{(-\infty\,;-3) \cup (1\,;+\infty)}$

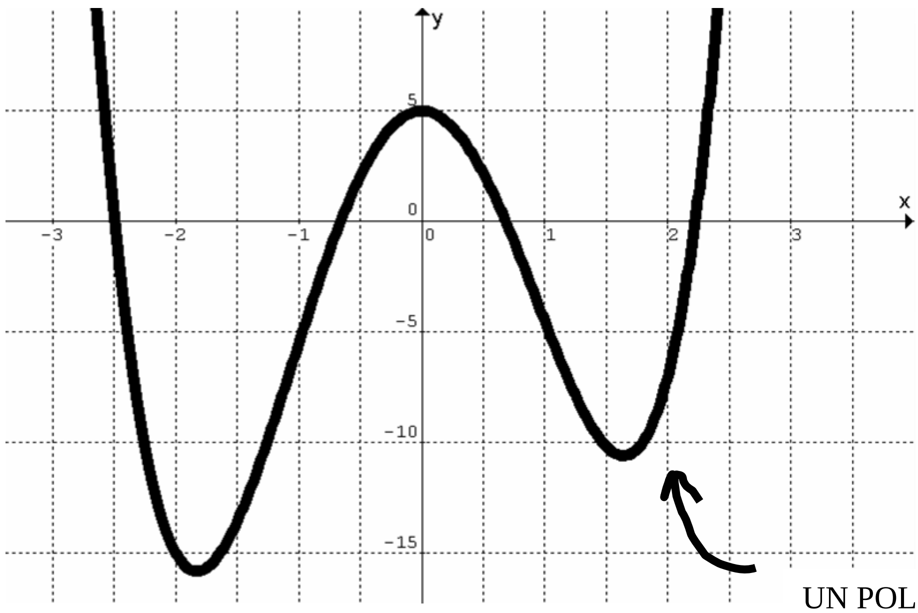
FIN FUNCIONES CUADRÁTICAS

* CONTINUIDAD

* POLINOMIOS

* COMPOSICION DE FUNCIONES

CONTINUIDAD - TEOREMA DE BOLZANO - DIVISIÓN DE POLINOMIOS - TEOREMA DEL RESTO - INTERVALOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD - COMPOSICION DE FUNCIONES



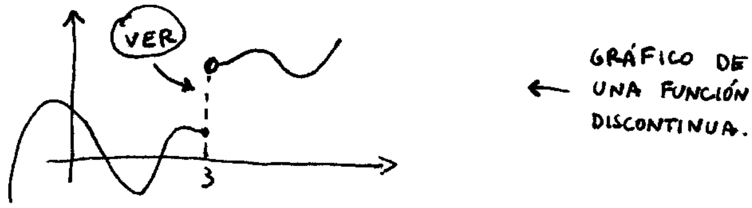
UN POLINOMIO DE GRADO 4to. (CORTA 4 VECES AL EJE X)

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

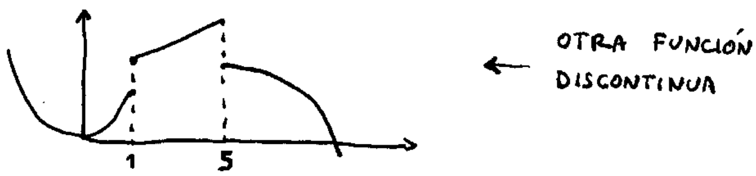
Vamos a ver ahora el tema de funciones continuas y discontinuas. No es difícil. Presten atención.

<u>FUNCIÓN CONTÍNUA</u>

Una función es continua cuando para dibujarla NO necesito levantar el lápiz de la hoja. Por ejemplo:



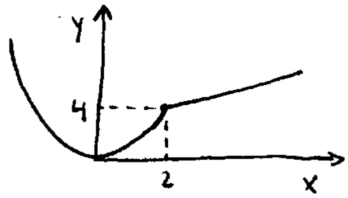
Creo que esto lo entienden ¿ no? En x = 3 la función es discontinua. Pega un salto. Para poder dibujarla necesito levantar el lápiz de la hoja. Esa es la idea.
Ahora miren esto:



Fíjense que esta función es discontinua en los puntos x = 1 y x = 5. Esto lo veo mirando el gráfico. En todos los otros puntos la función es continua. Las funciones lineales (rectas) y las cuadráticas (parábolas) son <u>SIEMPRE CONTINUAS.</u>
Supongamos que me dan una función que está definida en 2 partes:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ x + 2 \text{ si } x \geq 2 \end{cases}$$



En x = 2 la función es continua. Cambia su forma pero es continua. Vamos a afinar más la definición de continuidad. Decimos así:

Una función es **continua** en un punto si acercándose por la derecha o por la izquierda la función tiende a valer lo mismo.

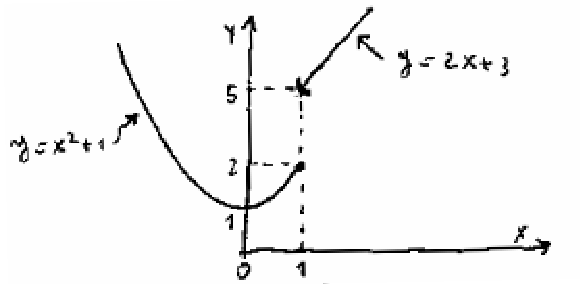
FUNCIÓN CONTÍNUA

Para el ejemplo que les di, si me acerco al punto x = 2 viniendo así →, la función toma el valor 4. Si me acerco a x = 2 viniendo así ← la función también vale 4. Esto me está diciendo que la función es continua en x = 2.

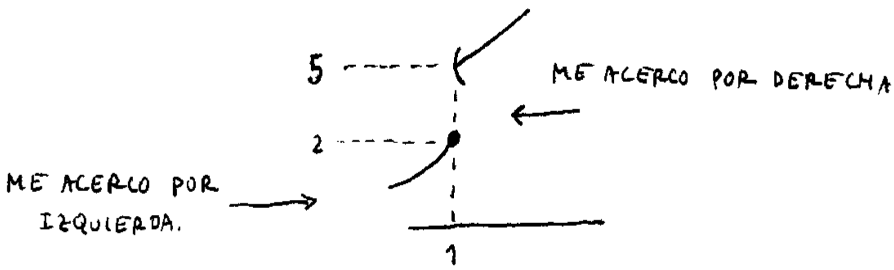
Vamos a este otro ejemplo: Me dan una función que está definida de esta manera:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases} \qquad \text{con } f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Voy a hacer el gráfico. Puedo hacerlo dando valores o pensando un poco. La primera parte es una parábola y la segunda parte es una recta. Esto da algo así:



Pregunto: ¿ Es continua la función en x = 1 ? **Rta**: Bueno, acerquémonos por derecha y por izquierda y veamos que pasa:

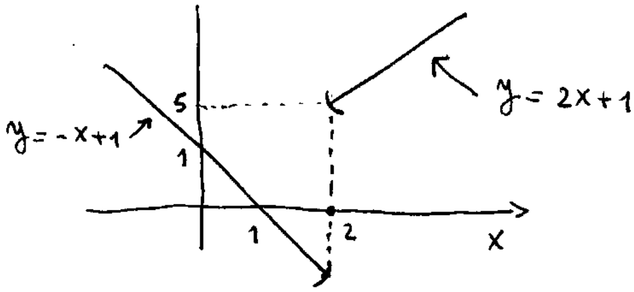


Veo que viniendo por la derecha la función vale 5 y viniendo por la izquierda la función vale 2. Eso me está diciendo que la función <u>no es continua.</u>

Vamos a este otro ejemplo. Una función que está partida en 3. Viene definida así:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{si } x < 2 \\ 0 & \text{en } x = 2 \\ 2x+1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

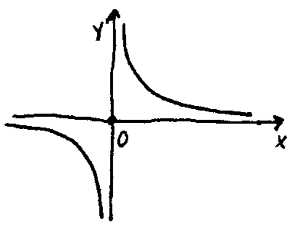
De acuerdo a lo que me dice la definición, voy dibujando la función. Primero dibujo lo que pasa antes de llegar a 2, después justo en 2 y después para x mayor que 2.
Da algo así:



Miren bien, chicos. ¿ Es continua ? No. A ojo ya ve que no es continua porque el dibujo pega un salto en x = 2. ¿ Lo ven ?
Ojo ! La función ∃ en x = 2 ! Ahí f(x) Vale cero. Sin embargo no es continua. Para poder probar esto tengo que aplicar la definición rigurosa que es la de ir acercándose por izquierda y por derecha.
Si hago eso, veo que viniendo así ⟶ la función vale - 1. En cambio, si vengo así ⟵ la función vale 5.
¿ Será continua la función ? Rta: **NO**, porque los valores **no** coinciden.

Vamos a ver esto: quiero que tengan una idea del concepto de asíntota. Esto lo vamos a usar mucho después. Miren: tenemos una función que va de los reales a los reales definida como:

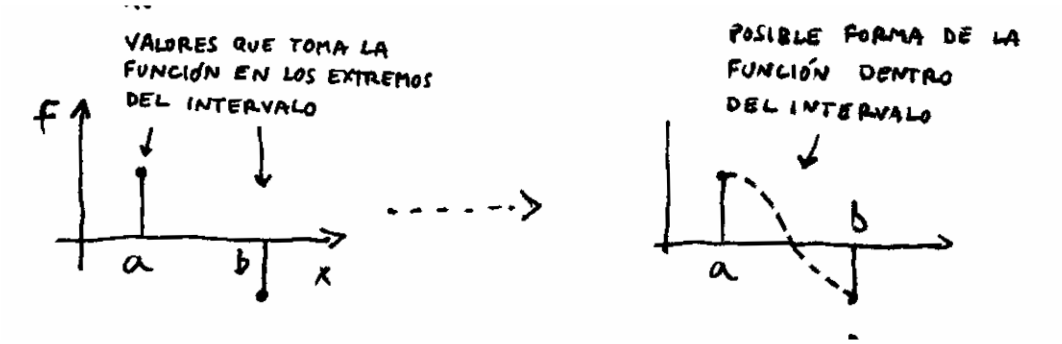
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$



Lo que quiero que vean es, a ver, ¿ qué pasa con la función cuando me voy acercando al origen ? Bueno, la función se hace se hace asintótica al eje y. Bueno, y... ¿Qué significa esto? Significa que la curva se acerca más y más al eje pero nunca lo corta. Digo entonces que la función tiene una asíntota vertical en x = 0, La asíntota es el eje y.
¿ Y que pasa cuando tomo valores de x muy grandes ? (100, 1.000, 1.000,000). La función se acerca más y más al eje x pero no lo corta. ¿entonces el eje x qué es? Rta.: Una asíntota horizontal cuando x tiende a infinito. Del lado negativo de la función pasa exactamente lo mismo ¿ lo ven ?

TEOREMA DE BOLZANO

No voy a dar la demostración de este teorema. Solo quiero que entiendan la idea. Tengo una función continua en un intervalo. Supongamos que de un lado del intervalo es negativa. Eso quiere decir, dice Bolzano, que obligatoriamente, dentro de ese intervalo, hay un punto en el cual la función vale cero. Miren el dibujo.



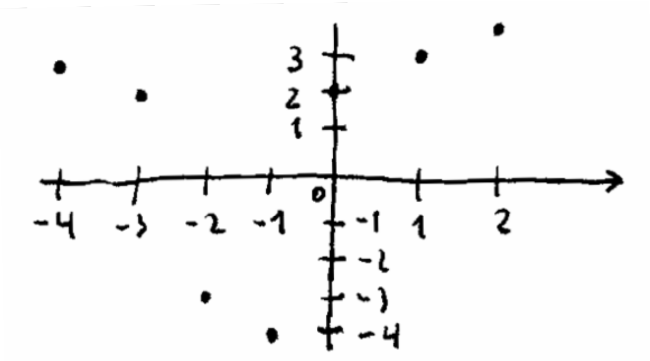
Entonces, resumiendo: si en un intervalo (a,b) una función cambia de signo, en ese intervalo habrá un **cero** de la función. ¿ Lo ven ?

<u>EJEMPLO:</u>

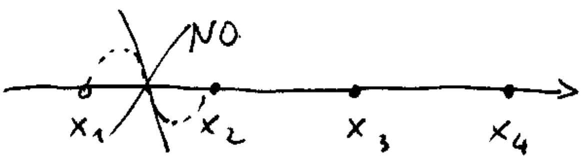
Me dan una función continua y me dicen que sólo tiene dos ceros. Pero no me dan la función, me dan un tabla:

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2
f(x)	3	2	- 3	- 4	2	3	4

Dibujemos estos puntos en un gráfico y contestemos esto: ¿ En qué intervalos de amplitud 1 estarán los ceros de f ?



Me fijo en qué intervalo la función cambia de signo. Veo que eso pasa en (-3, -2) y en (- 0). Entonces en esos intervalos estarán los dos ceros de la función.
¿ Cómo es el dibujito de la función ? Rta: no lo sé. No sé que forma tiene.
Lo único que sé que corta al eje x en los intervalos que marqué. ¿ Lo repito ?
Ahora veamos esto. Supongamos una función continua que tiene ceros en x x_2, x_3 y x_4 ¿ Qué pasa si estos ceros son consecutivos ? ¿ Podría la función tener esta forma?



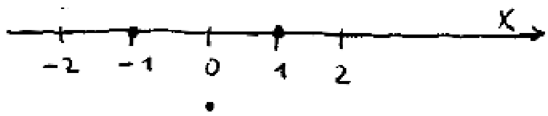
Pasa que entre dos ceros consecutivos la función no puede cortar al eje **x**. Eso quiere decir que entre dos ceros consecutivos, la función debe tener todo el tiempo el mismo signo. Es decir, todo el tiempo será positiva o todo el tiempo negativa.
¿ Para qué me sirve esto ? Rta: Para poder determinar intervalos de positividad y negatividad. Pongamos esto en forma matemática:

> SI TENGO UNA FUNCIÓN CONTINUA QUE TIENE 2 CEROS CONSECUTIVOS X_1 y X_2, ENTONCES:
>
> $$\forall\ X \in (x_1,x_2)\ ,\ F_{(X)} > 0 \ \text{ o } \ F_{(X)} < 0$$

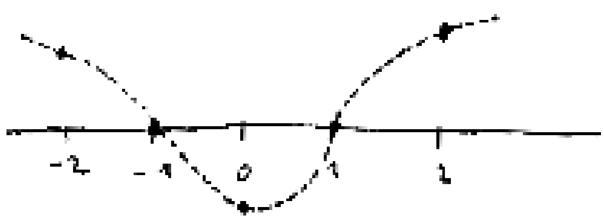
La función podrá ser positiva en ese intervalo o negativa en ese intervalo. Pero no podrá cambiar de signo.

EJEMPLO:
Me dan una función continua cuyos **únicos** ceros son: f(-1) = 0 y f(1) = 0, Además me dicen que: f(-2) = f(2) = 2. Piden dibujar la función en forma aproximada.

Hago esto →



Como es exactamente el gráfico de f, no lo se. Sin embargo se que va a tener esta forma:

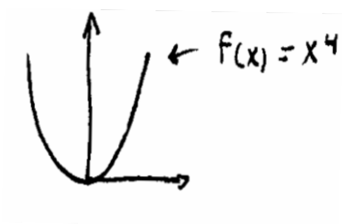


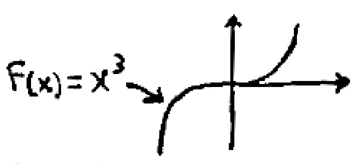
Intervalo	Signo de F
$(-\infty, -1)$	+
$(-1, 1)$	−
$(1, +\infty)$	+

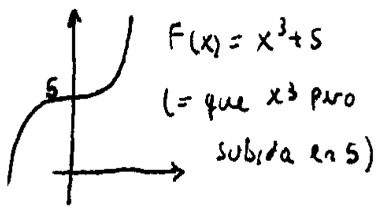
Esto es todo lo que hay que saber sobre el teorema de Bolzano.

FUNCIONES POLINÓMICAS

Son funciones de este tipo:







Ojo, las funciones cúbicas no siempre tienen esta forma .

Lo mismo con las cuárticas. No siempre son parábolas. Puede haber cuárticas y cúbicas que sean así :

Un polinomio es una cosa que tiene esta forma:

$$f_{(x)} = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_0$$

A esto se lo llama función polinómica. Ojo, algunos de los términos pueden ser <u>cero</u>. Por ejemplo puedo tener algo así:

$$F_{(x)} = 2x^3 - 2x + 4$$

Acá los valores de cada término son:

$$a_3 = 2\ ,\ a_2 = 0\ ,\ a_1 = -2 \ \text{ y } \ a_0 = 4$$

Si el polinomio fuera :

$$F_{(x)} = 4x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 1$$

$$\text{Tengo: } \ a_4 = 4\ ,\ a_3 = -3\ ,\ a_2 = -2\ ,\ a_1 = 0 \ \text{ y } \ a_0 = 1$$

A la potencia más grande que tiene el polinomio se la llama <u>GRADO DEL POLINOMIO.</u> Por ejemplo, las funciones lineales son polinomios de grado 1. Las funciones cuadráticas son polinomios de grado 2. Las funciones cúbicas son polinomios de grado 3 (y así siguiendo).
¿Y qué pasa con las constantes? (los números). Por ejemplo, ¿qué grado tiene el polinomio f(x) = 2 ? Piensen ¿ A qué potencia está elevada la x ?
<u>Rta</u>: A la cero. Por lo tanto f(x) = 2 es un polinomio de grado cero.

Vamos a hacer un ejercicio. Me dan esta función polinómica y me piden hallar los ceros y los intervalos de positividad y negatividad.

$$f_{(x)} = (3x-2)(4x+1)(x-5)$$

¿ Qué tengo que aplicar ? El teorema de Bolzano. Bolzano sólo vale para funciones continuas. Eso anótenlo. Los polinomios de cualquier grado son siempre <u>funciones continuas</u>. Vamos a buscar los ceros de la función que me dan. Igualo a cero :

$$(3x-2)(4x+1)(x-5) = 0$$

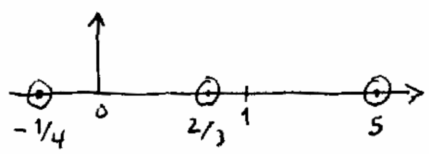
¿ Qué hago ? ¿ Hago distributiva ? Nooooo ! Al revés !! Si hago distributiva me complico más. Piensen. Si cualquiera de los paréntesis da cero, la función dará cero. Entonces las 3 posibilidades van a ser:

$$(3x-2)=0$$
$$ó\ (4x+1)=0$$
$$ó\ (x-5)=0$$

De acá sale:

$$1)\ 3x-2=0 \Rightarrow 3x=2 \Rightarrow x_1=\frac{2}{3}$$
$$2)\ 4x+1=0 \Rightarrow 4x=-1 \Rightarrow x_2=\frac{-1}{4}$$
$$3)\ x-5=0 \Rightarrow \underline{x_3=5}$$

Fíjense una cosa. Un polinomio de grado n podrá cortar al eje x a lo sumo (como máximo) en n puntos. Por lo tanto, un polinomio de grado n tendrá como máximo n raíces. Eso es importante. Busquemos ahora los intervalos de positividad y negatividad. Tengo que los ceros de la función están ubicados así:



Lo que hago entonces es darle a la función valores que estén dentro de estos intervalos. Como estos son <u>todos</u> los ceros de la función, en esos intervalos la función tendrá siempre el mismo signo. Tenía:

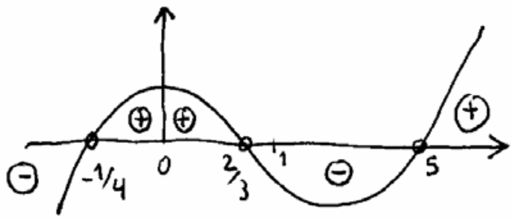
$$f(x)=(3x-2)(4x+1)(x-5)$$

Entonces:

$$f(0)=(3.0-2)(4.0+1)(0-5)=10 \leftarrow \oplus$$
$$f(1)=(3.1-2)(4.1+1)(1-5)=-20 \leftarrow \ominus$$
$$f(6)=(3.6-2)(4.6+1)(6-1)=\oplus$$

Hago una tablita con los signos que obtuve y ya puedo dibujar aproximadamente la función. Queda algo así :

intervalo	Signo de f(x)
$(-\infty, -1/4)$	$\ominus$
$(-\frac{1}{4} ; 2/3)$	$+$
$(2/3 ; 5)$	$-$
$(5, +\infty)$	$\oplus$



Los conjuntos de positividad y negatividad van a ser:

$$C_+ = \left(-\frac{1}{4} ; \frac{2}{3}\right) \cup (5, +\infty)$$

$$C_- = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 5\right)$$

$$C_0 = \left\{-\frac{1}{4} ; \frac{2}{3} ; 5\right\}$$

<u>OTRO EJEMPLO</u>

Dado el siguiente polinomio hallar los ceros y los intervalos de positividad y negatividad:

$$F(x) = \left(x^3 - \frac{9}{4}x\right)\left(-x^2 - x + 2\right)$$

¿Cómo hago en este caso? Bueno. Acá tengo que darme cuenta de que puedo sacar equis factor común en el 1er paréntesis. La cosa quedaría:

$$x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)\left(-x^2 - x + 2\right) = 0$$

Igual que antes, tengo 3 posibilidades para que todo el bicho dé cero. Estas posibilidades son:

1) $x = 0$

2) $\left(x^2 - \frac{9}{4}\right) = 0$

3) $\left(-x^2 - x + 2\right) = 0$

De acá saco todos los valores de x que hacen cero el asunto. (ojo van a ser 5)
Lo que sigue es todo igual al ejercicio anterior. Creo que lo pueden hacer solos.
Chicos, les recomiendo que no se atrasen. Hagan los ejercicios de la guía.
Cualquier cosa que no entiendan, pregunten.

EJERCICIO:

DADA LA FUNCIÓN $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$

PROBAR QUE f TIENE CEROS EN LOS INTERVALOS (1 , 2), (4 , 5) Y (41 , 42)

Para resolver esto uso el teorema de Bolzano: si de un lado del intervalo la función es positiva y del otro lado es negativa, quiere decir que por el medio la función deber ser cero. (Esto vale para funciones continuas, no se olviden)
¿ Qué tengo que hacer ? El primer intervalo que me dan es el (2). Entonces tengo que reemplazar x = 1 en la función y x = 2. Si uno da positivo y otro da negativo, eso querrá decir f tiene un cero en ese intervalo. Veamos:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2$$

$$\Rightarrow \quad f(1) = 1^3 + 1^2 - 2.1 - 2$$

$$f(1) = -2 \leftarrow \text{DIÓ NEGATIVO.}$$

$$f(2) = 2^3 + 2^2 - 2.2 - 2$$

$$f(2) = 6 \leftarrow \text{DIÓ POSITIVO.}$$

La función tiene un cero en el intervalo (2). Voy ahora al intervalo (4; 5). hay que hacer todas las cuentas. Yo les pongo el resultado:

$$f(1,4) = 1,4^3 + 1,4^2 - 2.\,1,4 - 2$$

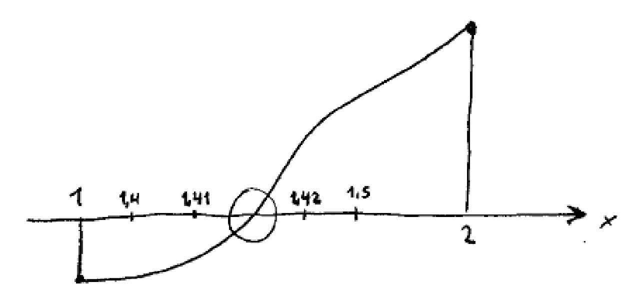
$$\Rightarrow f(1,4) = -0,096 \leftarrow \text{DIÓ } \ominus$$

$$f(1,5) = 1.5^3 + 1.5^2 - 2.\,1.5 - 2$$

$$\Rightarrow f(1,5) = 0,625 \leftarrow \text{DIÓ } \oplus$$

Por el teorema de Bolzano la función tiene un cero en el intervalo (1,4; 1,5). Para el intervalo (41 ; 42) me da: f(41) = -0,028 ; f(42)= 0,039. Bueno, así vamos conociendo con más exactitud el valor de la raíz. Sabemos que está entre 41 y 42. ¿ Podría haber MAS de una raíz en ese intervalo ? Piensen. Si, podría. El enunciado no aclara nada al respecto. Lo que sabemos es que por lo menos hay **una** raíz.

Hay algunos ejercicios que piden hallar un cero de la función con un error menor que 0,001. Lo que están pidiendo es que calcule x con 3 decimales. Eso es todo.
Lo que hay que hacer es esto: sé que la función tiene una forma así:



Tengo que ir probando con muchos valores entre 1,41 y 1,42. Hasta lograr un valor de x tal que $|f(x)|$ sea <u>menor</u> que 0,001.
Uno no puede saber a priori **donde** está la raíz. Sabe que está entre 1,41 y 1,42, pero … ¿ dónde ? Entonces voy dando valores. Voy probando hasta pegarle. Se que es un plomo pero es así. Difícil que tomemos esto en el parcial. No nos interesa que se maten haciendo cuentas.

Los ejercicios que siempre se toman son parecidos a estos pero tienen una variante. Suele dar un polinomio de grado cúbico como por ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 4$$

y dicen que una de las raíces es 1. Suelen pedir hallar todas los demás raíces e indicar los intervalos de positividad y negatividad. Para poder resolver ejercicios de este tipo tienen que saber factorear polinomios. Ese es el tema que voy a explicar la clase que viene.

<u>DIVISION DE POLINOMIOS</u>

Supongamos que quiero dividir $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4$ por $g(x) = 2x^2 + 3x - 1$.
Voy haciendo esto:

$$
\begin{array}{rl}
2x^4 - 3x^3 + x^2 - 4 & \underline{|\ 2x^2 + 3x - 1} \\
-\ \underline{2x^4 + 3x^3 - x^2 \qquad} & x^2 - 3x + \frac{11}{2} \quad \nwarrow \text{resultado de la división (cociente)} \\
-6x^3 + 2x^2 - 4 & \\
\underline{-6x^3 - 9x^2 + 3x} & \\
11x^2 - 3x - 4 & \\
-\ \underline{11x^2 + \frac{33}{2}x - \frac{11}{2}} & \\
-\frac{39}{2}x + \frac{3}{2} & \leftarrow \text{resto}
\end{array}
$$

La división se termina cuando el resto tiene grado menor que el cociente. Siempre el cociente de la división por el divisor más el resto me da el polinomio original.
Quiere decir que:

$$\begin{array}{l|l} f(x) & g(x) \\ \hline r(x) & q(x) \\ r & \end{array}$$

$$f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$$

En el caso anterior:

$$\left(2x^2+3x-1\right)\left(x^2-3x+\frac{11}{2}\right)+\left(-\frac{39}{2}x+\frac{3}{2}\right) = 2x^4-3x^3+x^2-4$$

TEOREMA DEL RESTO

Supongamos ahora que tengo un polinomio f(x) y lo divido por (x-a).

si tengo: $\begin{array}{l|l} f(x) & x-a \\ \hline r(x) & q(x) \end{array}$

puedo poner esto como:

$$f(x) = (x-a)\, q(x) + r(x)$$

si hago $x = a$: $f(a) = (\overset{0}{\cancel{a-a}}) \cdot q(a) + r(a)$

$$\Rightarrow \boxed{f(a) = \text{resto}}$$

EJEMPLO:

$$f(x) = x^2+2x+2 \quad y \quad g(x) = x-1$$

Entonces, puedo decir cual va a ser el resto de la división (sin dividir los polinomios)
Estoy dividiendo un polinomio f(x) por otro de la forma (x – a). En este caso a = 1.
Entonces reemplazo x = 1 en el polinomio:

$$\Rightarrow \text{resto} = f(a) = 1^2 + 2 \cdot 1 + 2$$

$$\Rightarrow \text{resto} = 5$$

OTRO EJEMPLO:

HALLAR EL RESTO AL DIVIDIR $f(x) = x^3-2x^2+2x-2$ por $x+3$.

En este caso vuelvo a usar el teorema con a = -3. Entonces Lo que hay que hacer es sólo aplicar el teorema.

$$\text{resto} = f(-3) = (-3)^3 - 2(-3)^2 + 2(-3) - 2$$

→ Resto = - 53

¿ Qué pasa ahora si el número **a** es justo una raíz del polinomio ?
Rta: Tiene que pasar que f(a) es cero, es decir, el resto será cero. Esto lo vamos a usar. Traten de entenderlo.

Vamos a hacer un ejemplo. Supongamos que me dan:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Y me dicen que x = - 1 es una raíz. Me piden sacar las otras 2 raíces. ¿ Cómo hago ?
Primero pruebo a ver si x = - 1 es efectivamente una raíz:

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - 4(-1) - 4 = -1 + 1 + 4 - 4$$

$$\Rightarrow \underline{f(-1) = 0} \quad \text{(verifica)}$$

Lo que hago es dividir el polinomio que me dan por el término (x – la raíz). Entonces, en este caso me queda (x – (-1)) = x + 1. Hago la división choclaza :

$$\begin{array}{rl} x^3 + x^2 - 4x - 4 & \underline{|\ x+1\quad} \\ -\ \underline{x^3 + x^2 \qquad\qquad} & x^2 - 4 \\ -4x - 4 & \\ -\ \underline{-4x - 4} & \\ 0 & \end{array}$$

¿Qué logré con esto? Logré que ahora puedo expresar el polinomio como:

$$-x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)\,(x^2-4) + 0$$

Esto es lo que se llama **factorear** el polinomio. Con el polinomio factoreando ya puedo saber las demás raíces. El paréntesis (x^2 – 4) lo puedo poner como:

$$(x^2-4) = (x^2 - 2^2) = (x+2)\,(x-2)$$

Entonces las 3 raíces del polinomio que me daban son:

$$x_1 = -1$$
$$x_2 = -2$$
$$x_3 = 2$$

Teniendo las 3 raíces ahora podría hallar los intervalos de positividad y negatividad. A eso apunta todo esto. La idea es que aprendan a factorear polinomios para hallar los intervalos de positividad y negatividad. Eso es todo.

Si por ejemplo, me dicen que tengo un polinomio de grado 3 cuyas raíces son $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ y $x_3 = 4$, eso quiere decir que el polinomio tiene que tener la forma:

$$f(x) = (x-1)(x+3)(x-4)$$

Lo único que hay que darse cuenta es de que todo el polinomio podrá estar multiplicado por un número a, y las raíces seguirían siendo las mismas. Es decir que puedo poner a f(x) como:

$$f(x) = \underline{a}\ (x-1)(x+3)(x-4)$$

El valor **a** podría ser cualquier número (2, 3, etc)

EJEMPLO:

HALLAR UN POLINOMIO DE GRADO 3 QUE TENGA RAICES EN $x = 0$, en $x = 3$, en $x = -3$ y QUE EN 2 VALGA ($f(2) = 1$)

Hago lo mismo que hice recién. Me dicen que las raíces son: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ y $x_3 = -3$. Quiere decir que el polinomio tendrá que tener la forma:

$$f(x) = (x-0)(x-3)(x+3)$$

Pero atención! Todo esto puede estar multiplicado por un número **a**. Entonces:

$$f(x) = \boxed{a} . x\ (x-3)(x+3)$$

Hasta acá vamos bien. Ahora hay que considerar la parte que dice que f(2) tiene que ser 1. Hago:

$$f(2) = a . 2\ (2-3)(2+3) = 1$$

$$\Rightarrow \quad a.2(-1)(5) = 1$$

$$\Rightarrow a . (-10) = 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{10}$$

Entonces el polinomio pedido es:

$$\underline{f(x) = -\frac{1}{10}\ x\ (x-3)(x+3)}$$

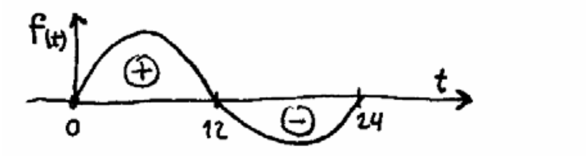
OTRO EJEMPLO:

DICEN QUE LA TEMPERATURA EN FUNCIÓN DEL TIEMPO SIGUE ESTA FUNCIÓN:

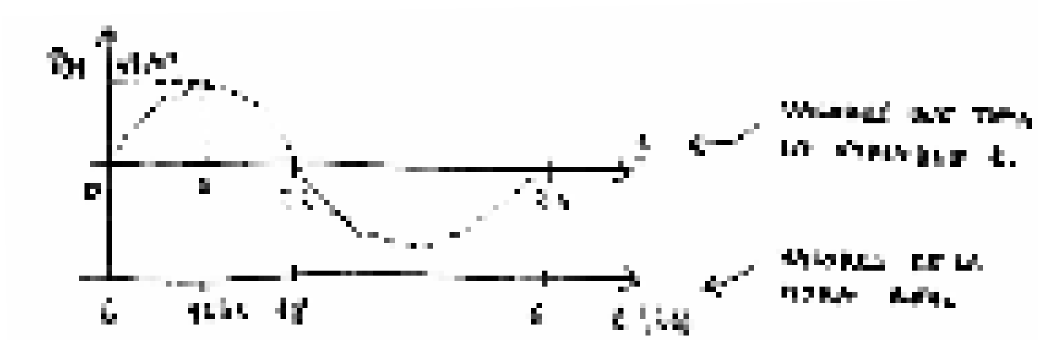
$$f(t) = 0{,}05\ t\ (t-12)(t-24) . t$$

ACLARAN QUE PARA ESTA FUNCION t = 0 CORRESPONDE A LAS 6 DE LA MAÑANA.

Hago la representación de f(t) que me da así:



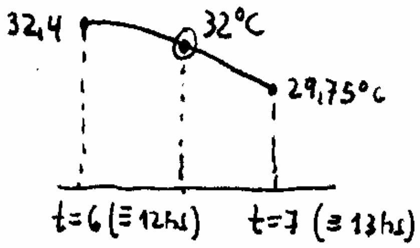
Los intervalos de positividad y negatividad son los que marqué. Supongamos que me piden probar que entre las 12 y las 13 horas la temperatura fue de 32 °C. Hay que darse cuenta que la equivalencia es la siguiente:



Lo que están pidiendo entonces es probar que para t comprendido entre 6 y 7 la función vale 32. No se compliquen, chicos. Miren el gráfico. Le di a t el valor 6 y que pasó? Obtuve que la temperatura a esa hora (las 12) era 32,4°. Veamos que pasa una hora después. Una hora después significa las 13 hs, es decir, t = 7. Le doy el valor t a la función y saco la temperatura.

$$f_{(t=7)} = 0{,}05 \cdot 7\,(7-12)\,(7-24) = \underline{29{,}75\,°C}$$

¿Entonces qué pasa? Pasa que la representación sería la siguiente:



La función es continua. Quiere decir que si en un momento la temperatura era de 32,4° C y en otro momento era de 29,75 °C, debió haber algún momento intermedio en donde la temperatura fue de 32 °C.

EJERCICIO

HALLAR UNA FUNCIÓN DE GRADO 3 SABIENDO QUE CORTA AL EJE X EN LOS PUNTOS 0, 1 y -3 Y ADEMÁS f(-1) =1.

Lo que hago es poner el polinomio en su forma factoreada. Las raíces son: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -3$. Entonces el polinomio va a ser :

$$f_{(x)} = (x-0)\,(x-1)\,(x+3)$$

Ahora, no me tengo que olvidar que en su forma general el polinomio está multiplicando por un número cualquiera **a**. Entonces:

$$f_{(x)} = a\,(x)\,(x-1)\,(x+3)$$

Me piden ahora que f(-1) valga 1. Le doy a la función el valor - 1 y lo igualo a 1.

$$f_{(-1)} = 1 = a\,(-1)\,(-1-1)\,(-1+3)$$

$$\Rightarrow f_{(-1)} = 1 = a\,(-1)\,(-2)\,(2)$$

$$\Rightarrow 1 = a\,.\,4$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

El polinomio buscado es:

$$\underline{f_{(x)} = \frac{1}{4}\,x\,(x-1)\,(x+3)}$$

EJERCICIO

SABIENDO QUE EL POLINOMIO $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

CORTA AL EJE EN X (2 , 0), CALCULAR:

a) TODOS los puntos del gráfico donde f corta al eje x.
b) Los intervalos de positividad y negatividad C_+ y C_-
c) Hacer el gráfico aproximado de f.

Este tipo de ejercicios tienen que saberlos porque siempre los tomamos en los parciales. Sé que una de las raíces es x = 2. Entonces puedo factorear al polinomio dividiéndolo por (x-2). Fíjense:

$$\text{Si} \quad f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$$

Puedo poner: $f(x) = (x-2) \cdot q(x) + \underbrace{0}_{\text{resto}}$

El resto tiene que ser <u>cero</u> por el teorema que dice que si **a** es raíz del polinomio, el resto vale cero. Entonces divido.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 & x - 2 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 - 2x^2} & \underbrace{x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}} \\ \qquad \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 & \quad \text{me da esto} \\ \qquad \cdots \text{ etc, etc.} & \end{array}$$

El polinomio factoreado queda: $f(x) = (x - 2)(x^2 + 1/2\, x - \frac{1}{2}) + 0$. Para sacar las raíces del paréntesis $(x^2 + 1/2\, x - \frac{1}{2})$ lo igualo a cero y uso la ecuación cuadrática:

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}}{2.1} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \quad y \quad x_2 = -1$$

Entonces, las raíces del polinomio f(x) son: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$ y $x_3 = -1$

Puedo escribir a esto como: $C_0 = \left\{ 2\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ -1 \right\}$

Ya contesté el punto a) que pedía hallar los puntos donde f(x) corta al eje x. Voy al punto b), que pide los intervalos de positividad y negatividad. Entonces voy a escribir el polinomio en su forma factoreada. Eso queda:

$$f(x) = (x-2)\,(x - \tfrac{1}{2})\,(x+1)$$

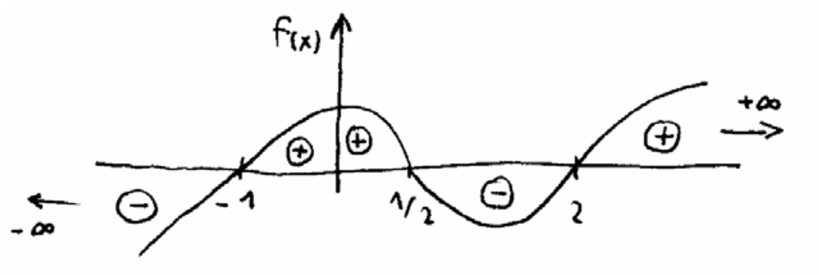
Ahora hago la tablita:

INTERVALO	SIGNO DE f(x)
$(-\infty, -1)$	$-$
$(-1, 1/2)$	$+$
$(1/2, 2)$	$-$
$(2, +\infty)$	$+$

← Estos signos salen de reemplazar x por algún valor cualquiera que esté comprendido dentro del intervalo que estoy considerando.

No hace falta que hagan toda la cuenta. Interesa solamente el signo que la función toma en ese intervalo.

c) Sabiendo los intervalos de positividad y negatividad puedo dibujar el gráfico aproximado de f. Eso da así:



Quiero aclararles una cosa. Supongamos que tengo un polinomio como este :

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 1$$

Cuidado ! Para hacer la división la división de este polinomio por otro tengo primero que completar el polinomio original con los términos que faltan. En este caso daría:

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + \boxed{0x} + 1$$

este falta.

ECUACIONES BICUADRÁTICAS

Chicos, miren un poquito esta ecuación:

ver

$$f(x) = x^{4} - 9x^{2} + 20$$

Lo que hay que hacer para resolver estos ejercicios es llamar con otra letra a x^2. Por ejemplo “y”. Me queda:

$$f(y) = y^2 - 9y + 20$$

Esto si lo se resolver. Es una cuadrática común. De acá saco 2 valores, y_1 e y_2. bueno, usando la cuadrática me da:

$$y_1 = 5$$

$$y_2 = 4$$

Pero atención ! Ahora para sacar los x, tango que hacer: $|x| = \sqrt{y}$ (porque y era igual a x^2) De manera que en realidad obtengo 4 valores por el doble signo de la raíz.

Estos 4 valores son:

$$x_1 = +\sqrt{5}$$
$$x_2 = -\sqrt{5}$$
$$x_3 = +2$$
$$x_4 = -2$$

Las ecuaciones bicuadráticas no tienen nada de complicado. Sólo hay que hacer el reemplazo **x^2** igual a **y** para después hacer las cuentas. ¿ Qué es lo único de lo que no me tengo que olvidar ? Rta. Del doble signo de la raíz al hacer $|x| = \sqrt{y}$.
Esto es todo.

EJERCICIO TIPO PARCIAL

HALLAR LAS RAICES DEL POLINOMIO $F(x) = 3x^4 - 9x^2 + 6x$

SABIENDO QUE CORTA AL EJE X EN X = - 2.

Bueno, acá se que -2 es raíz de la ecuación. Entonces puedo dividir al polinomio que me dan por (x + 2) y el resto dará 0. Entonces, completo el polinomio y lo divido:

$$\begin{array}{rl}
3x^4 + 0x^3 - 9x^2 + 6x & \underline{|\ x + 2 \qquad\qquad} \\
-\ \ 3x^4 + 6x^3 \qquad\qquad\quad & 3x^3 - 6x^2 + 3x \\
\hline
-6x^3 - 9x^2 + 6x & \\
-\ \ -6x^3 - 12x^2 \qquad & \\
\hline
3x^2 + 6x & \\
-\ \ 3x^2 + 6x & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

El polinomio factoreado queda así:

$$F(x) = (x + 2)\,(3x^3 - 6x^2 + 3x) + 0$$

Ahora... ¿Cómo factoreo al polinomio $3x^3 - 6x^2 + 3x$?

Bueno, tengo que darme cuenta de que puedo sacar el x como factor común. Quiero decir que puedo poner:

$$3x^3 - 6x^2 + 3x = x\,(3x^2 - 6x + 3)$$

Las raíces del paréntesis de la derecha las puedo sacar aplicando la cuadrática.

Si hago todas las cuentas me da: $X_1 = 1$ y $X_2 = 1$

Es decir, 1 es raíz doble. Puedo factorear ahora a $3x^2 - 6x + 3$. Lo puedo poner como a $(x - x_1)(x - x_2)$. Me queda:

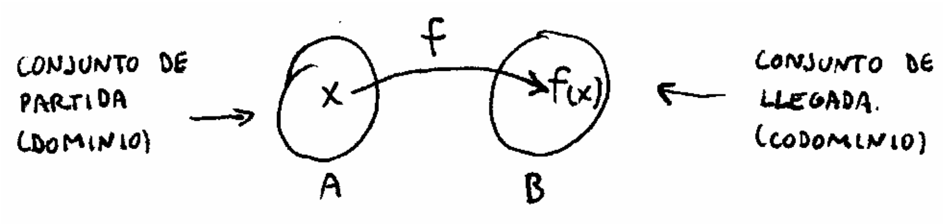
$$3x^2 - 6x + 3 = 3\,(x-1)\,(x-1)$$

Finalmente el polinomio f(x) factoreado será:

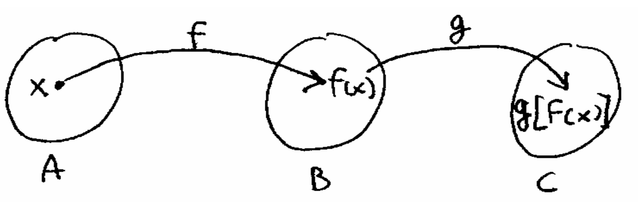
$$f(x) = (x+2) . 3x . (x-1)(x-1)$$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Si uno tenía un conjunto de partida A, yo agarraba un elemento x de A y lo mandaba a B a través de la función f(x). Eso lo simbolizamos con este dibujo.



¿Se acuerdan? ¿Qué pasa ahora si a lo que obtuve (f(x)), le aplico a su vez una función g y lo mando a un conjunto C? En ese caso el dibujo sería así:



Esto que hice se llama hacer una composición de funciones. Es decir, componer a una función f con una función g es hacer la cuenta g[f(x)]. Vamos a anotarlo así:

$$g\,[f(x)] = g \circ f$$

SE LEE: ge de efe de x

se lee: Efe compuesta con g.

No se preocupen mucho por esto ahora. Ya lo van a entender mejor al hacer los ejercicios. Miren este :

EJEMPLO:

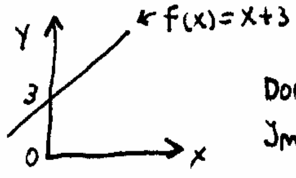
DADAS LAS FUNCIONES

$$f(x) = x + 3 \quad \text{que va } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{y}$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{que va } \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

HALLAR f COMPUESTA CON g Y g COMPUESTA CON f.

Analicemos primero las funciones que me dan:



$Dom(f) = \mathbb{R}$

$Im(f) = \mathbb{R}$

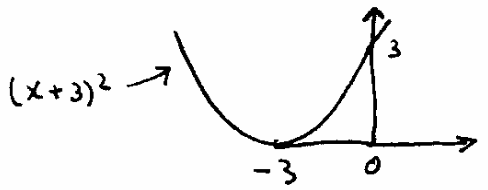
$Dom\, g = \mathbb{R}$

$Im\, f = [0, +\infty)$

Analicemos lo que obtuve. Al hacer la composición me dio:

La composición de $f_{(x)} = x + 3$ con $g_{(x)} = x^2$ Da:

$$g \circ f_{(x)} = g\,[f_{(x)}] = g\,[x+3] = (x+3)^2$$

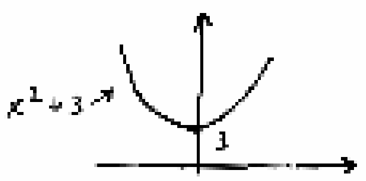


$Dom\,[g \circ f_{(x)}] = \mathbb{R}$

$Im\,[g \circ f_{(x)}] = [0, +\infty)$

Lo hago ahora al revés. Hago f o g (x). Me da:

$$f \circ g_{(x)} = f\,[g_{(x)}] = f\,[x^2] = x^2 + 3$$



$Dom\,[f \circ g] = \mathbb{R}$

$Im\,[f \circ g] = [3, +\infty)$

Quiero que vean que componer f con g **no es lo mismo que componer que componer g con f**. (Lo vieron, no ?)

Ahora vamos a este otro caso: Supongamos que me dan

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad y \quad g(x) = x + 1$$

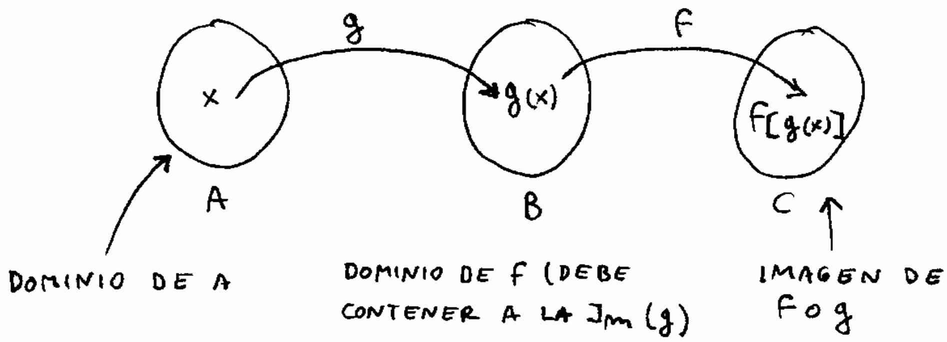
¿Qué pasa si quiero hacer f de g(x) ? Veamos:

$$f[g(x)] = f[x+1] = \frac{1}{x+1}$$

Fíjense. No le puedo dar a esta función que obtuve el valor x = -1.
La función 1/x+1 **no** existe en x = -1. Entonces:

$$\text{Dom}[f \circ g] = \mathbb{R} - \{1\} \qquad \text{Im}[f \circ g] = \mathbb{R} - \{0\}$$

Lo que quiero que vean es que la composición f o g se va a poder hacer siempre que <u>la imagen de g(x) esté dentro del dominio de f.</u> Es decir:



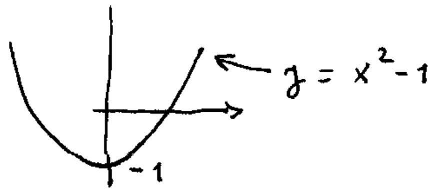
<u>OTRO EJEMPLO</u>

componer : $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = x - 2$.

queda: $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[x^2+1] = x^2 + 1 - 2 = x^2 - 1$

¿Cuáles son el dominio y la imagen de la composición?

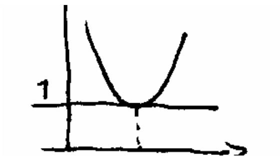
$$\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \quad , \quad \text{Im}(g \circ f) = [-1, +\infty)$$



Hagamos ahora el revés y vamos que pasa:

$$f \circ g_{(x)} = f\,[\,g_{(x)}\,] = f\,[\,x-2\,] = (x-2)^2 + 1$$

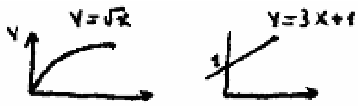
El gráfico daría así: $\longrightarrow$



$$\text{Dom}\,(f \circ g) = \mathbb{R} \qquad \text{Im}\,(f \circ g) = [1, +\infty)$$

OTRO EJEMPLO MAS

$$f_{(x)} = \sqrt{x} \quad y \quad g_{(x)} = 3x + 1$$



Los dominios y las imágenes de estas funciones son:

$$\text{Dom}\, f_{(x)} = \mathbb{R} \geq 0 \qquad \text{Dom}\, g = \mathbb{R}$$

$$\text{Im}\, f_{(x)} = \mathbb{R} \geq 0 \qquad \text{Im}\, g = \mathbb{R}$$

Fíjense que puse que la Im de f(x) eran sólo los reales mayores o iguales que <u>cero</u>. Eso lo hice para que la función f(x) = $\sqrt{x}$ fuera función: Hago primero g de f de x:

$$g\,[\,f_{(x)}\,] = g\,[\,\sqrt{x}\,] = 3\sqrt{x} + 1 \quad \Rightarrow$$

$$g \circ f_{(x)} = 3\sqrt{x} + 1$$

El dominio y la imagen de $g \circ f_{(x)}$ son:

$$\text{Dom}\,[\,g \circ f\,] = \mathbb{R} \geq 0 \qquad \text{Im}\,[\,g \circ f\,] = [1, +\infty)$$

Ahora al revés: $f_{(x)} \circ g_{(x)}$

$$f_{(x)} \circ g_{(x)} = f\,[\,g_{(x)}\,] = f\,[\,3x+1\,] = \sqrt{3x+1}$$

$$\Rightarrow \quad f \circ g = \sqrt{3x+1}$$

$$\text{Dom}\,(f \circ g) = [-\tfrac{1}{3}, +\infty) \qquad \text{Im}\,[\,f \circ g\,] = \mathbb{R} \geq 0$$

Vamos ahora a esto otro:

compongamos: $f(x) = x^2$ con $g(x) = x + 2$. Hago:

$$f \circ g = f[g(x)] = f[x+2] = (x+2)^2$$

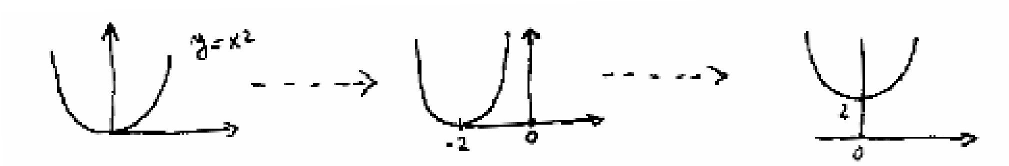
$$\Rightarrow f \circ g = (x+2)^2$$

Hagamos al revés y veamos que pasa:

$$g \circ f = g[f(x)] = g[x^2] = x^2 + 2$$

$$\Rightarrow g \circ f = x^2 + 2$$

Lo que quiero que vean es ésto ¿Qué pasó con el gráfico original de la función x^2? Bueno, hagamos algunos dibujos:

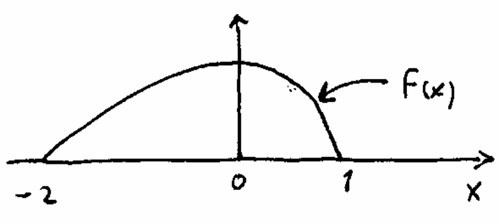


¿A qué voy? Voy a que componer una función f cualquiera con una función lineal, lo que me hace siempre es correrme todo el grafico en alguno dirección así: $\longrightarrow$ o así $\longleftarrow$ o para arriba y para abajo. Eso sí es importante. Anótenlo. Componer una función cualquiera con una función lineal hace que el gráfico de esa f se corra para arriba, para abajo, para la derecha o para la izquierda.

Chicos, ahora presten atención. Vamos a ver un tema que en general siempre les cuesta bastante. Anoten:

CAMBIOS DE ESCALA

Ahora vamos a ver composición de funciones que provocan cambios de escala. Supongamos una función así:

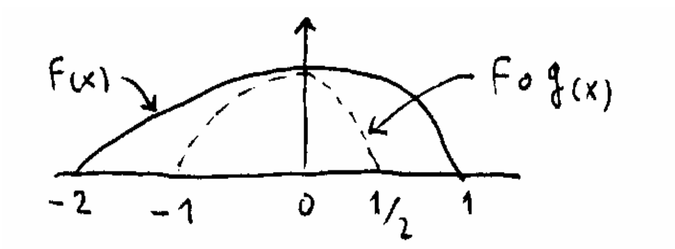


Dom f = [-2, 1]

Si la función lineal que me dan es f(x) = 2x, la composición f[g(x)] lo que hace es achicarme el dominio.

$$F[g(x)] = F[2x]$$

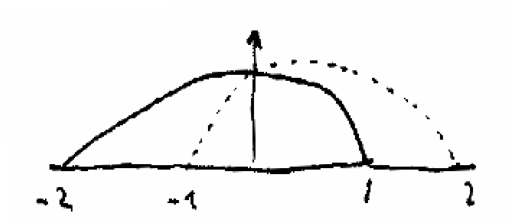
Es decir que el dominio de la función compuesta va a dar así:



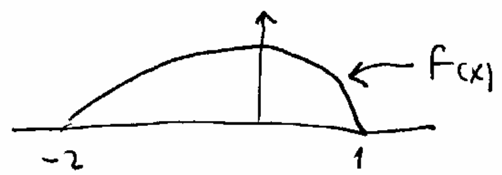
Esto tienen que pensarlo un poco. Vamos a esto. Dejo la función f como esta y tomo g(x) = - x. La composición da:

$$F \circ g(x) = F[g(x)] = F[-x]$$

Quiere decir que lo que antes pasaba para x, ahora va a pasar para –x. Eso se ve bien en el gráfico. Miren. El gráfico queda igual pero para el otro lado. Es como si se hubiera reflejado en un espejo:



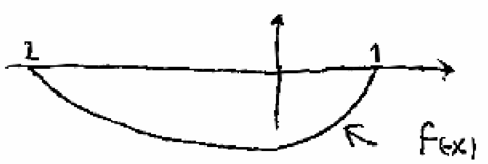
Quiero componer ahora pero al revés. Voy a hacer g[f(x)]:



$$g(x) = -x$$

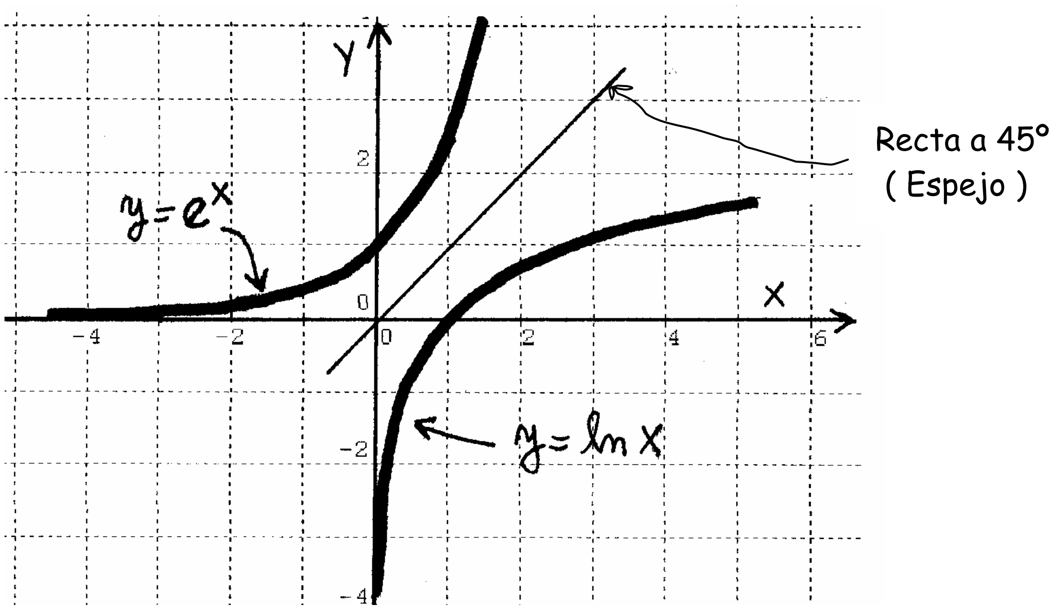
$$\text{Dom } f = [-2, 1]$$

g[f(x)] lo que me hace ahora es reflejarme todo respecto al eje x. Eso me daría algo así:



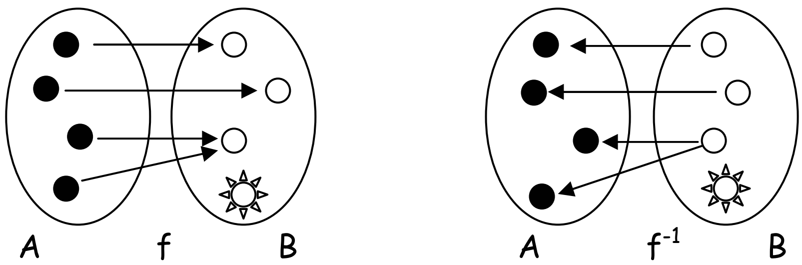
Lo que tienen que entender es que componer una función cualquiera con una función **lineal** provoca cambios de escala o corrimientos a la derecha o a la izquierda o arriba o abajo. La función se puede agrandar, se puede achicar, puede reflejarse sobre el eje x o sobre el eje y. Eso es lo que quiero que vean.

FUNCIÓN INVERSA



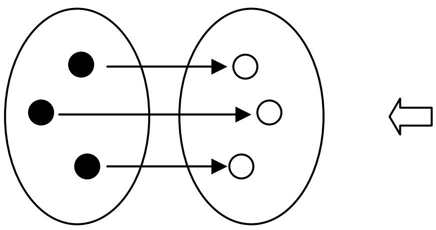
FUNCIÓN INVERSA

Ustedes saben que puedo tener una función F que va de un conjunto A a otro conjunto B. Ahora busco la función INVERSA, es decir la función que va de B a A. Pregunto: ¿ Siempre existirá esa función ? Fíjense en este ejemplo:



¿ Podría ser F^{-1} una función ? Respuesta: no. Fíjense que no. Hay dos cosas que no se cumplirían. Por un lado habría un elemento que no tendría imagen ( ). Por otro lado habría un elemento con dos imágenes ( )

Entonces, ¿qué tendría que pasar para que existiera función inversa ? Y bueno, de cada elemento tendría que salir UNA SOLA flecha y esa flecha tendría que llegar a UN SOLO elemento. Es decir, tendré funciones inversas cuando tenga gráficos de este tipo:



ESTA FUNCIÓN PUEDE TENER INVERSA

Esto escrito en forma matemática queda así:

1) se debe cumplir que Imagen f = Codominio F
2) dado un elemento Y_0 que pertenece a la imagen de F, debe existir un único x_0 que pertenezca al dominio de F tal que $F_{(x_0)} = Y_0$

A estas dos cosas le vamos a poner nombre. Decimos así (esto anótenlo):

FUNCIÓN SURYECTIVA: una función es suryectiva si la imagen de la función coincide con el conjunto de llegada (codominio).

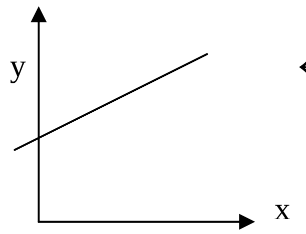
FUNCIÓN INYECTIVA: una función será inyectiva si cada Y_0 es imagen de un único elemento del dominio.

Ahora, si una función es suryectiva e inyectiva a la vez decimos que la función es **BIYECTIVA**. Siempre que una función sea BIYECTIVA tendrá inversa. Vamos a ver algunos ejercicios para reconocer cuándo una función es biyectiva, suryectiva y todo eso.

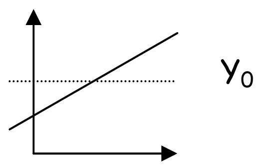
EJEMPLO:

Dada la función f(x)= x + 2 decir si tiene inversa.

Bueno, hagamos el gráfico:

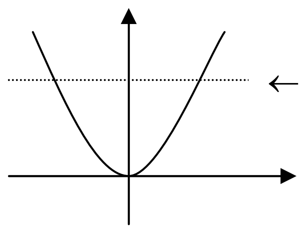


El Codominio son todos los reales. La imagen de la función también son todos los reales. De manera que la función es suryectiva. Toda la imagen coincide con todo el codominio. 2Para saber si es inyectiva tengo que fijarme si existe algún valor Y_0 que sea imagen de dos elementos. Para eso trazo una recta paralela al eje x y me fijo si corta la función en más de un punto.



Veo que la recta corta en un solo punto, ⇒ la función dada es inyectiva.
Conclusión: F es suryectiva e inyectiva, ⇒ F es biyectiva y tiene inversa.

Vamos a este otro caso: Miren esta función:

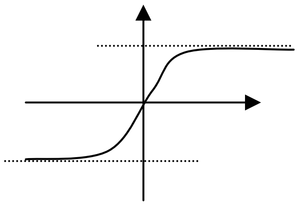


Veo que la imagen son $\mathbb{R}_{\geq 0}$. El codominio son todos los reales, por lo tanto F(x)= x^2 no es suryectiva. Si trazo una recta horizontal, veo que corta el gráfico en más de un punto. ⇒ la función dada tampoco es inyectiva. Entonces... ¿ tendrá inversa ? Rta : No, por que no es biyectiva.

Ahora vamos a hacer unos ejemplos más:

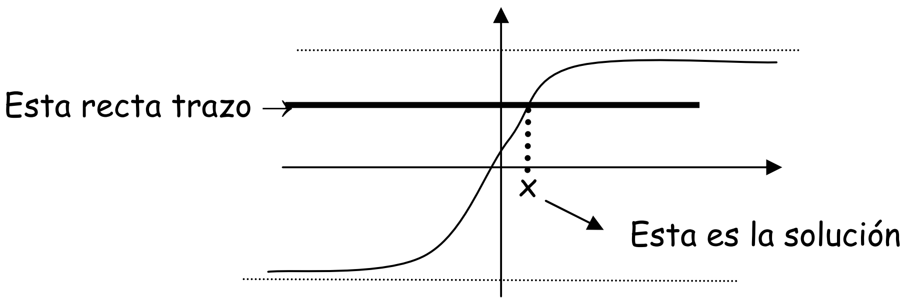
<u>EJERCICIO</u>: **Dado el siguiente gráfico:**

a) **Resolver la ecuación F(x)=0.**
b) **¿ Para qué valores tiene solución la ecuación F(x)= Y_0?**



a) Bueno, ¿ cuándo la función dada valdrá cero ? Me tengo que fijar para $Y_0 = 0$, cuánto vale x. Mirando el gráfico veo que F(x) es igual a cero en X = 0, por lo tanto la respuesta es X = 0.

Si me piden cuándo la función dada vale 1, trazo una recta horizontal en $Y_0 = 1$ y me fijo dónde corta a la función. El x correspondiente al lugar donde la recta corte, será la solución.



b) Ahora, ¿ entre qué valores puedo mover la recta horizontal tal que corte a la función?. Bueno, entre –2 y 2. Cualquier recta horizontal que esté en el intervalo (-2;2) corta la función en <u>un solo punto.</u>
Por lo tanto, la ecuación $F_{(x)} = Y_0$ tiene solución para todos los $Y_0 \in (-2, 2)$. La función dada, ¿tendrá inversa?. Bueno, así como está <u>no,</u> por que la Im f = (-2 , 2) y el codominio son todos los reales, de manera que en principio la función no sería suryectiva. Sin embargo, si restrinjo el codominio y digo que el codominio de f = (-2 , 2) , entonces ahí <u>sí</u> la función sería suryectiva.

Esto de restringir el dominio o el codominio se puede hacer. Ahora: ¿la función dada es inyectiva? <u>Sí</u>, es inyectiva porque rectas horizontales la cortan en un sólo punto. Es decir, que si restrinjo el codominio la función dada es biyectiva y tendrá inversa. Si no restrinjo el codominio, la función no es nada. Fíjense entonces que el hecho de que una función tenga inversa o no, depende un poco de cuáles sean el dominio y el codominio.
Vamos a otro ejemplo.

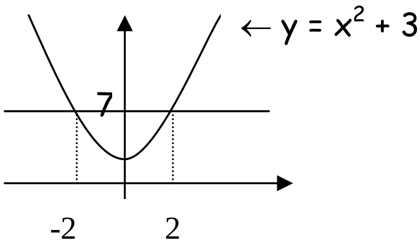
EJERCICIO:

Dada la función $F(x)= x^2 + 3$ decidir en qué caso existe por lo menos una solución de la ecuación $F(x) = Y_0$.

Bueno, supongamos que me dicen que $Y_0 = 7$. Me queda:

$$F(x) = 7 \Rightarrow x^2 + 3 = 7 \quad \Rightarrow x^2 = 7 - 3 \Rightarrow x = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \underline{\mathbf{x = \pm 2}}$$

¿La función dada será inyectiva?. No. Porque hay dos valores de x (2 y –2) que vayan a parar al mismo Y_0 (7). Esto se puede ver en el gráfico



Es decir, la ecuación: $x^2 + 3 = Y_0$ tiene solución para todos los $Y_0 \geq 3$. ¿Será única la solución? No. Siempre tendré dos soluciones. El único caso donde tengo una sola solución es para x=0 (ahí la función vale 3). Ahora piensen: $F(x) = x^2 + 3$ ¿cuándo tendrá solución la ecuación $f(x)=Y_0$? Y bueno, hago $F(x)=Y_0$ y me fijo qué pasa:

$$X^2 + 3 = Y_0 \Rightarrow x^2 = Y_0 - 3$$

$$\Rightarrow \quad x = \sqrt{y_0 - 3}$$

Lo que se tiene que cumplir es que $Y_0 - 3$ sea mayor que cero, entonces:

$$Y_0 - 3 \geq 0 \Rightarrow \underline{Y_0 \geq 3}$$

La ecuación $F(x)=Y_0$ tendrá solución siempre que Y_0 sea mayor o igual que tres. La imagen de la función será $[3; +\infty)$. Lo importante de entender es esto: ¿ qué hacía la función F(x)? Yo le daba un x y ella me daba un Y.

Ahora... ¿qué hace la función $x = \sqrt{y - 3}$ Exactamente lo contrario. Yo le doy un valor de Y, y ella me da un x.

A esto apunta todo este asunto de las funciones inversas. ¿lo ven, chicos?.

EJERCICIO: **Dada la función $F(x)= (x-1)^2 + 2$ que va de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, decir si:**

a) ¿es inyectiva?
b) ¿es suryectiva?
c) Calcular la imagen.

Despejo x de Y= $(x-1)^2 + 2$. Me queda: $y - 2 = (x - 1)^2$

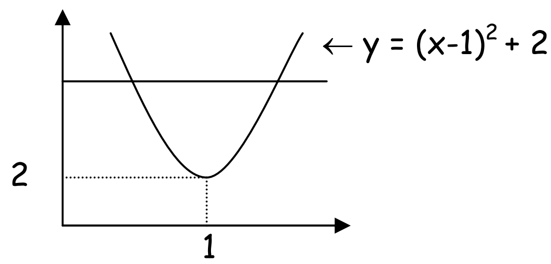
$$\Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{y-2} \qquad \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{y-2}$$

Me queda entonces: $x = 1 \pm \sqrt{y-2}$

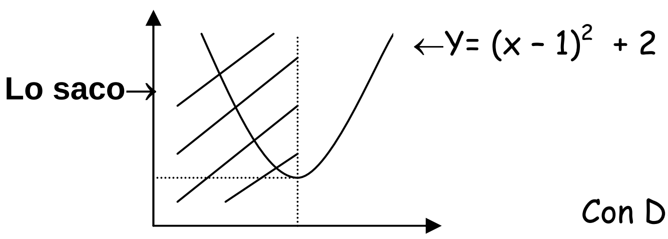
¿Cuál será la imagen de la función?. Tenemos que lograr que la raíz no me de negativa, entonces:

$$\sqrt{y-2} \geq 0 \Rightarrow y-2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{Y \geq 2}$$

Entonces la imagen de la función será **Imf = [2; +∞)**. Eso también se ve si grafico la función original que era $F(x) = (x-1)^2 + 2$. Es una parábola. Ustedes ya saben eso. ¿ El vértice está en dónde ? Rta: En (1 ; 2).



Ahora, ¿será suryectiva la función?. No. La imagen son todos los reales mayores o iguales que 2 y el codominio son todos los reales. La imagen no coincide con el codominio y la función no es suryectiva.
¿Es inyectiva?. No, tampoco. Fíjense que si trazo una recta horizontal ella me corta la función en dos puntos ⇒ no es inyectiva.
¿Tiene inversa? No. No es biyectiva, así que no tiene inversa.
Ahora quiero que vean algo. Vamos a hacer que la función **tenga** inversa. Fíjense: Para hacer eso tendría que cambiar un poco la función. Es decir, elimino la parte que me hace que la función no sea inyectiva. La cosa queda así:

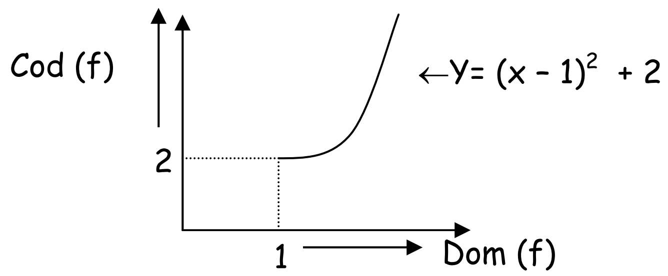


Con Dom F = $\mathbb{R} \geq 1$

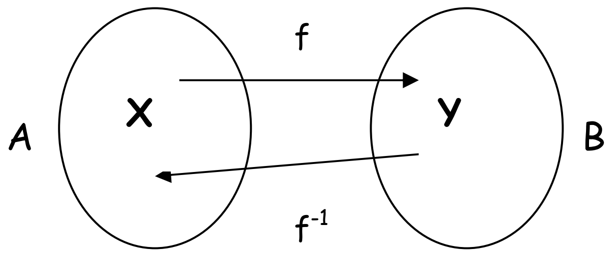
Es decir, restringí el dominio para que la rama izquierda no exista. La función ya es inyectiva. Ahora tengo que hacer que sea suryectiva. ¿ Cómo hago ? Piensen. Lo que tengo que hacer es restringir también el codominio. Digo:

Cod f = [2, +∞)

Ahora el codominio coincide con la imagen y la función es suryectiva.
Entonces la función esta:



Va a ser biyectiva. ¿Tendrá inversa? Y sí. Justamente sí. Para eso hice todo esto de restringir dominio y codominio. Chicos, una cosa. Para hablar de la función inversa de F la ponemos así: $\mathbf{F^{-1}}$. Ahora, ojo. Esto no quiere decir "hago la cuenta 1/F". Nada que ver. Por favor, no me hagan horrores en los parciales. Cuando les piden: "Hallar F^{-1}" están queriendo decir que busquen la función inversa. Nada más. El asunto de poner que la inversa de F es F^{-1} es sólo una manera de escribirlo. F^{-1} es sólo una notación para expresar: "función inversa de F". Es decir, lo que tengo es esto:



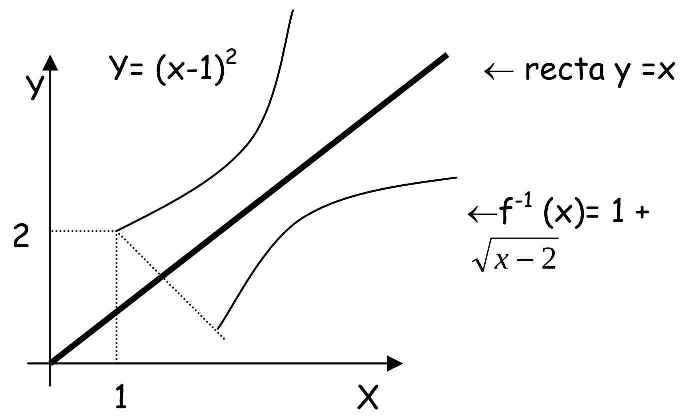
La función va del dominio **A** al codominio **B**. La inversa va al revés, del conjunto **B** al conjunto **A.**

Volvamos al ejercicio. Me habían dado la función $F(x)= (x-1)^2 + 2$. Llegué a la conclusión que restringiendo el dominio y el codominio, podía encontrar la inversa que era: $F(y)= 1 + \sqrt{y-2}$

Ahora vean esto. F(y) es F^{-1} ¿ s i? Bien. ¿ Cómo hago para graficarla ?. ¿ Le doy valores a Y y saco los de X? No. Primero lo que tengo que hacer es reemplazar la Y por la X para poder graficarla. Tenía: $F(y)= 1 + \sqrt{y-2}$

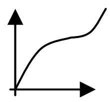
Cambiando la Y por la X me queda: $F(x)= 1 + \sqrt{x-2}$

Ahora si, ya la puedo graficar. Tengo que darle valores a x y saco los de F(x). Noten una cosa. La función **no** me quedó $1 \pm \sqrt{x-2}$. Me quedó $1 \mathbf{+} \sqrt{x-2}$ .Eso es por la restricción que hice del dominio al principio. Entonces, voy dando valores y me queda esto:

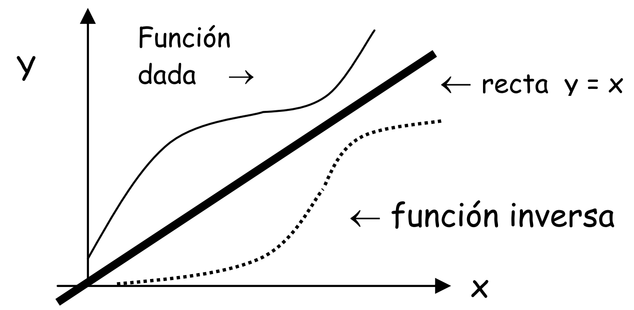


Lo que quiero que vean es que el gráfico de la función inversa es simétrico al gráfico de la función dada con respecto a la recta Y=X. Esto **siempre** es así. Es como si la función F^{-1} fuera la F pero reflejada en un espejo que sería la recta Y = X. Esto no lo olviden. Por favor. Repito: El gráfico de la función inversa es siempre **<u>simétrico</u>** al de la función dada respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, es decir la recta Y=X.

Por ejemplo, si me dicen que una función cualquiera tiene esta forma:



Yo sé que la función inversa será algo así:



En los parciales **siempre** pedimos que calculen funciones inversas y que las grafiquen. Por lo tanto, estudien esto bien. ¿Hay dudas? ¿Entienden? ¿ Voy demasiado rápido ?

Bueno, vamos a ver otro ejemplo.

Hallar la función inversa de $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$ **(si es posible). El dominio de f=ℝ–{ 1 }. El codominio son todos los reales.**

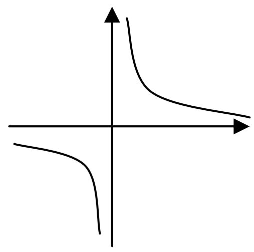
Bueno, lo que voy a hacer es igual que antes. Tengo que despejar x. Entonces:

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 2 \;\Rightarrow \mathbf{Y\text{-}2} = \frac{1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(x-1).(y-2) = 1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x - 1} = \frac{1}{y-2} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{X = 1} + \frac{1}{y-2}$$

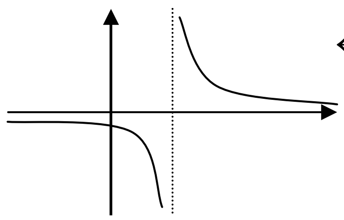
¿Cuál es la imagen de f ? Bueno, según lo que despejé, Im f = ℝ - { 2 }. Ahora, ¿ Es suryectiva ? Y...no. Porque el codominio eran todos los reales y la imagen son todos los reales menos el elemento 2. Por un elemento la imagen no coincide con el codominio y la función no es suryectiva. ¿Qué tengo que hacer para que si lo sea ? Bien, restringir el codominio. Digo que con el codominio Cod f= ℝ-{2} la función F(x) es suryectiva. Vamos ver ahora si la función es inyectiva. Bueno, hay que hacer el gráfico de F y ver qué pasa cuando trazo rectas horizontales. Miren.

El gráfico de y = $\frac{1}{x}$ era así:



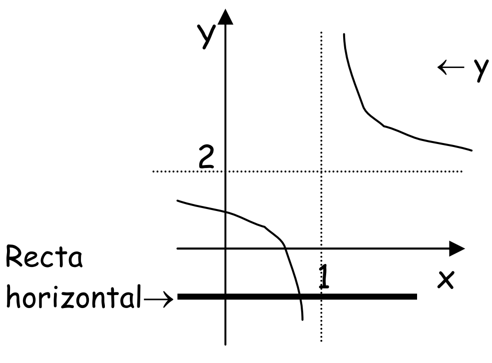
← Y = 1/x

¿ Cómo será ahora el de F(x-1), es decir Y= 1/(x-1) ?. Bueno, tiene que quedar toda la función corrida para allá → en 1.



←y= $\frac{1}{x-1}$

¿Y cómo será el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x-1} + 2$? Y bueno, ahora tengo que correr este último gráfico que hice así: ↑ en dos. El gráfico de la función queda así:

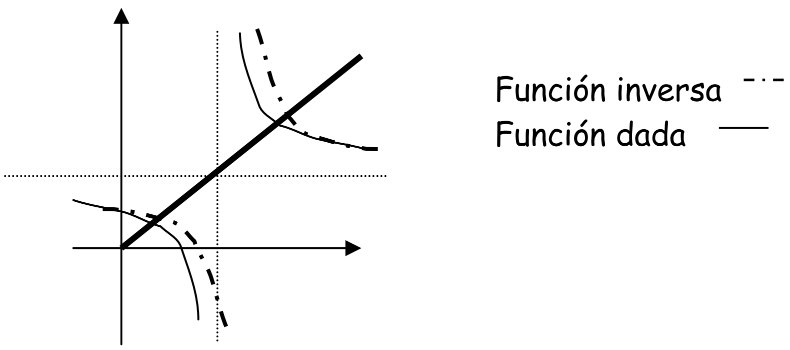


¿Qué pasa si trazo rectas horizontales ? Bueno, éstas cortan a la función <u>siempre en un sólo punto</u>. Quiere decir que la función dada <u>es</u> inyectiva. Fíjense que la recta Y = 2 <u>nunca</u> corta a la función. Bueno, eso no importa. Lo que importa, es que si la recta corta a la función, la corte en <u>un solo punto</u>. No importa que haya una recta que no la corte en ningún punto.

Conclusión, con la restricción del codominio, la función dada es suryectiva. Aparte la función así como está es inyectiva. Por lo tanto, con la restricción del codominio la función es biyectiva y tendrá inversa. Ahora viene la pregunta:
¿Cuál es la inversa? Y bueno, es la función que a cada Y le hace corresponder un x, es decir, es lo que tenía antes. A ver. ¿qué fue lo que hice al principio? Había despejado la x. Bueno, esa es la función inversa. Entonces:

$$\mathbf{X = 1 +} \frac{1}{y-2} \text{ ES LA FUNCIÓN INVERSA !}$$

¿ Cómo es el gráfico de la función inversa ? Y bueno, para graficarla puedo aplicar la regla que dice que la función inversa tiene que ser simétrica respecto de la recta Y = X. Es decir que el gráfico me va a dar así:



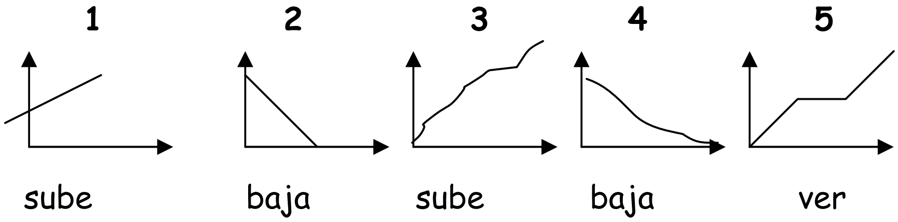
Atención: ¿puedo graficarla dando valores y haciendo una tabla? Sí, claro. En la función f(y) = 1 + [1 / (y – 2)] reemplazo la y por la x. Esto lo hago sólo para poder graficar. No se olviden. Me queda:

$$\boxed{Y = 1 + \frac{1}{x-2}}$$

Ahora si me quiero tomar el trabajo de darle valores a x y sacar los de F(x), lo puedo hacer. Es un poco largo, pero lo puedo hacer. Con esto podría verificar si el gráfico de la función inversa me da simétrico respecto de la recta y = x.
Otra cosa mas que quiero que vean es la siguiente: Tengo una función F. Hallo la inversa F^{-1}. La función F era biyectiva, ¿ sí ? Y la F^{-1} ¿ Cómo será ?
Claro, también biyectiva. Es decir que F^{-1} también tendrá inversa. Pregunta:
¿ Cuál será la función inversa de la función inversa ? Respuesta: la función dada.

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES (MONÓTONAS)

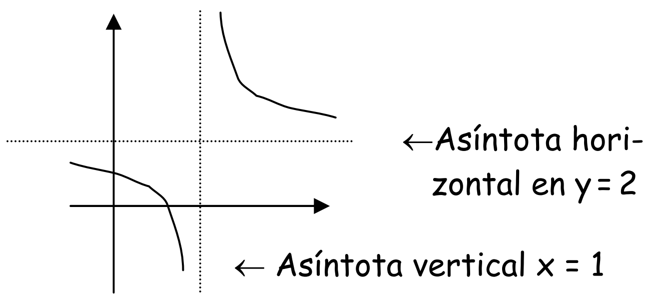
Cuando una función crece todo el tiempo o decrece todo el tiempo digo que es una función <u>MONÓTONA</u>. Es como si fuera una función "aburrida". Todo el tiempo hace lo mismo: o crece o decrece. Miren estos ejemplos:



<u>FUNCIONES ESTRICTAMENTE CRECIENTES O DECRECIENTES.</u>
Son funciones que no paran de crecer o no paran de decrecer. En los gráficos de arriba, todas las funciones son estrictamente crecientes o decrecientes salvo el número 5. E gráfico número 5 me muestra una función que no es estrictamente monótona. Eso pasa porque hay un momento en donde la función es constante. No crece ni decrece. Para saber si una función es creciente o decreciente lo que hago es mirar el gráfico. Si sube todo el tiempo es creciente. Si baja todo el tiempo es decreciente. Más adelante vamos a ver la manera rigurosa de demostrar que una función es creciente o decreciente.

ASÍNTOTAS

¿ Qué es una asíntota ? Bueno, son rectas a las cuales la función se acerca <u>pero nunca toca</u>. Por ejemplo, si tengo la función $y = \frac{1}{x-1} + 2$, el gráfico da así:



¿Cuáles son sus asíntotas? Bueno, en el gráfico lo veo bien. Son las que marqué. Ahora, dada una función ¿cómo hago para saber si tiene asíntotas ?
Bueno, miren, vamos a ver primero las asíntotas verticales. ¿ Qué pasa cuando me voy acercando al valor x = 1 ? Bueno, si vengo por derecha (← así) la función sube cada vez más y tiende a <u>más infinito (+ ∞).</u>

Si me acerco a x = 1 por la izquierda (→ así) la función tiende a <u>menos infinito</u>. (-∞).

Es decir, acercándome a x = 1 la función tiende a tomar valores muy grandes. Estos valores tienden a infinito. De un lado es + ∞ y del otro - ∞. Esta es la condición para que haya asíntota vertical. Anoten:

ASÍNTOTA VERTICAL:

> Una función tiene asíntota vertical en un punto x = a cuando acercándome al punto a la función tiende a +∞ o a -∞.

Para decir esto lo vamos a poner con la siguiente notación usamos la palabra límite que significa "ir acercándose al punto". Por ejemplo, digo que:

$$\mathrm{Lim}_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$$

> ESTO SE LEE: el límite de F(x) cuando x tiende a 1 por derecha es + infinito

y

$$\mathrm{Lim}_{x\to 1^-} F(x) = -\infty$$

> ESTO SE LEE: el límite de F(x) cuando x tiende a 1 por derecha es - infinito.

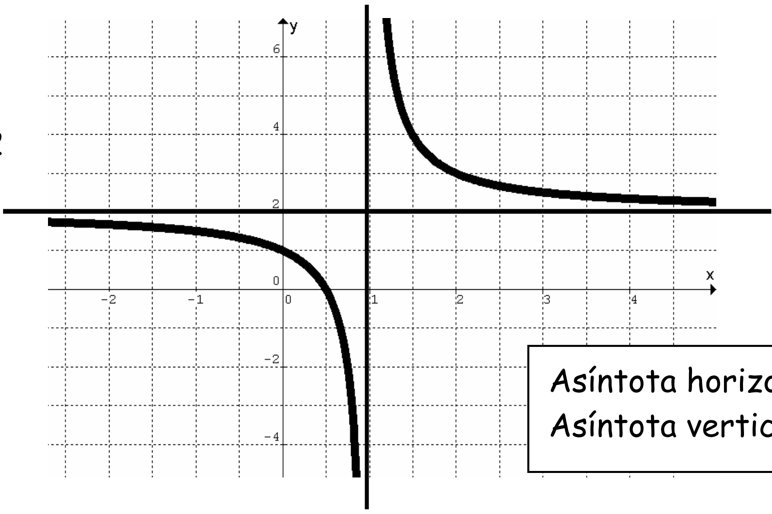
El poner 1^+ o 1^- es una notación para indicar que me voy acercando por derecha o por izquierda. Vamos a poner esto en forma matemática. Fíjense. Digo que:

UNA FUNCIÓN TIENE ASÍNTOTA VERTICAL EN x = a SÍ:

$$\mathrm{Lim}_{x\to a^+} F(x) = \pm\infty \quad \text{o} \quad \mathrm{Lim}_{x\to a^-} F(x) = \pm\infty$$

Ojo, el "o" no es excluyente. Puede pasar una de las condiciones o las dos a la vez. Vamos ahora a las asíntotas horizontales. Acá pasa lo mismo. Cuando me daban $y = \frac{1}{x-1} + 2$, la función tendía a y = 2 cuando x tendía a infinito o a menos infinito.

$y = \frac{1}{x-1} + 2$



> Asíntota horizontal en y = 2.
> Asíntota vertical en x = 1

ASÍNTOTA HORIZONTAL

> La función tendrá una asíntota horizontal cuando tienda a tomar un valor constante al tomar x valores tendientes a infinito o a menos infinito

Puedo escribir esto en forma matemática usando el concepto de límite:

UNA FUNCIÓN TENDRÁ ASÍNTOTA HORIZONTAL
EN Y = b CUANDO SE CUMPLA QUE:

$$\text{Lim}_{x\to+\infty} F(x) = b \quad \text{o} \quad \text{Lim}_{x\to-\infty} F(x) = b$$

Ojo, el número b no puede ser infinito. Tiene que ser un valor constante como 1, 2, 500, 1.000,000 o algo por el estilo. Vamos a un ejemplo:

EJERCICIO: **Hallar las asíntotas para la función** $f(x) = \dfrac{3x+1}{x(x-1)}$

Lo que tengo que hacer primero es fijarme cuál es el dominio. El dominio serán todos los valores que NO hagan que se anule el denominador.

Dom F(x)= $\mathbb{R}$ - { 0 ; 1 }

Ahora, siempre los lugares donde se anula el denominador son **posibles** candidatos a lugares donde puede haber asíntotas. Lo que hago entonces es tomar el límite de la función para x tendiente a cero y para x tendiendo a uno. Si me da infinito o menos infinito, tendré una asíntota vertical en esos puntos.
¿Cómo hago para tomar el límite ? Bueno, voy dando valores con la calculadora y voy viendo qué pasa. Miren:

Me acerco a cero →

X	F(x)
0,1	- 14
0,01	- 104
0,001	-1004

$f(x) = \dfrac{3x+1}{x(x-1)}$

¿Qué veo? Veo que a medida que me acerco a cero por derecha, la función se acerca a -∞. Puedo poner entonces que:

$$\text{Lim}_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$$

¿ Es suficiente esto para decir que la función tiene una asíntota vertical en x = 0 ? Rta: SI, es suficiente. Después veremos qué pasa cuando me acerco a cero por la izquierda. Pero por ahora, la función tiene asíntota vertical en x = 0,

Bueno, entonces investiguemos qué pasa con la función cuando me acerco a 0^-.
Voy dando valores con la calculadora, igual que antes:

La función toma valores cada vez más grandes

x	F(x)
-0,1	6
-0,01	96
-0,001	996

Veo que la función tiende todo el tiempo a más infinito. Quiere decir que del lado izquierdo la función también tiene una asíntota vertical.
Vamos ahora a X = 1 ¿qué pasa ahí ? Bueno, tendamos a acercarnos a 1 por izquierda y por derecha. Veamos qué pasa. Agarro la calculadora y hago miles de cuentas:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x(x-1)}$$

Por izquierda

x	F(x)
0,9	- 41
0,99	- 401
0,999	- 4001
0,9999	-40001

x	F(x)
1.1	39
1.01	399
1.001	3999
1.0001	39999

← Por derecha

¿ Qué veo ? Veo que la función tiende a +∞ por derecha y a -∞ por izquierda.
Puedo poner entonces que:

$$\mathrm{Lim}_{x\to 1^+} F(x) = +\infty \quad y \quad \mathrm{Lim}_{x\to 1^-} F(x) = -\infty$$

Bien. Con esto demuestro que la función tiene asíntotas verticales en x = 1.
Vamos ahora a las asíntotas horizontales. ¿ Qué tenía que hacer ? Tenía que hacer tender a la función a +∞ y a -∞ y ver qué pasaba ¿ sí ? Bueno, hago eso.
Otra vez agarro la calculadora y empiezo a darle valores cada vez más grandes.

$$f(x) = \frac{3x+1}{x(x-1)}$$

x	F(x)
10	0,3
100	0,03
1000	3×10^{-3}
10000	3×10^{-4}

x	F(x)
-10	-0,26
-100	-0,029
-1000	-3×10^{-3}
-10000	-3×10^{-4}

¿Qué veo? Veo que $\mathrm{Lim}_{x\to +\infty} F(x) = 0$ y $\mathrm{Lim}_{x\to -\infty} F(x) = 0$

¿Qué comprobé, entonces? Comprobé que la función tiene asíntotas horizontal en Y = 0. Esto pasa porque la función toma un valor constante cuando $x \to \pm \infty$. Ese valor constante es Y = 0.

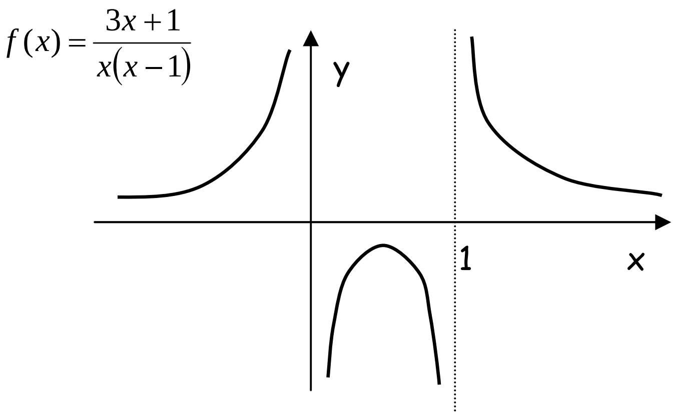
Ahora, quiero que vean para qué sirvió todo este asunto de buscar las asíntotas de una función. La cosa es así: el tener las asíntotas de una función **me ayuda a graficarla.** Es decir, a ustedes les dan una función... Ahora, ¿ Cómo saben qué forma tiene? Habría que dar valores y sería todo un lío. Teniendo las asíntotas es más fácil. Fíjense. Para la función dada sé que tiene asíntotas verticales en x = 0 y x = 1. También sé que tiene una asíntota horizontal en y = 0. Comprobé que los valores que tomaba la función eran:

$$\text{Lim}_{x\to 0^-} F(x) = +\infty \; ; \quad \text{Lim}_{x\to 0^+} F(x) = -\infty$$

$$\text{Lim}_{x\to 1^-} F(x) = -\infty \; ; \quad \text{Lim}_{x\to 1^+} F(x) = +\infty$$

$$\text{Lim}_{x\to -\infty} F(x) = 0 \; ; \quad \text{Lim}_{x\to +\infty} F(x) = 0$$

Eso quiere decir que la función que me dan va a tener esta forma:



No sé exactamente cuál va a ser el gráfico de la función, pero sé que va a tener esta forma. Eso es lo importante.

Vamos a ver otro ejemplo de asíntotas:

HALLAR LAS ASINTOTAS DE LA FUNCIÓN $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$.

Vamos. Fijémonos primero cuál es el dominio de la función ¿por qué busco el dominio? Bueno, porque justamente estoy buscando los puntos problemáticos. Donde se anule el denominador voy a tener **posibles** asíntotas verticales.

El denominador se anula en x = 3 $\Rightarrow$ **Dom F=** $\mathbb{R}$ **- { 3 }**

Muy bien. Ya tengo el dominio. Sé que voy a tener problemas en el punto x = 3.
Voy ahora al numerador. Quiero buscar los ceros de la función. Fíjense:
Tengo $x^2 - 2x - 3$. Si hago la cuadrática, me da:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{X_1 = -1} \\ \mathbf{X_2 = 3} \end{array}\right. \quad \leftarrow \text{Raíces de } x^2 - 2x - 3$$

¿Ahora qué pasa? Pasa que en x = 3 el numerador se hace cero, pero atención, **x-3** también se hace cero en x = 3. Es decir, que en x = 3 la función valdría 0/0. O sea, la función no existe en x = 3. (Por favor piensen bien esto chicos !!) los ceros de F van a ser: **ceros de F= { -1 } (3 NO !)**

Ahora que tengo las raíces del numerador, puedo factorear este polinomio y ponerlo como: (x + 1) (x – 3). La función original que era $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ queda:

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)}$$

Busquemos las asíntotas verticales ¿se acuerdan lo que había que hacer? Había que buscar el límite de la función para x tendiendo a algún número. Si ese límite daba infinito o menos infinito, iba a tener asíntota vertical.
Escrito en forma matemática:

$$\lim_{x \to a} F(x) = \pm \infty \quad \Leftarrow$$

Condición para que haya asíntota vertical

Bueno, empiezo probando con x = 3. A ver. Tomemos primero el límite por izquierda:

$$\lim_{x \to 3^-} F(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x+1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3^-} = (x+1) = 4$$

El límite no me dio infinito ni menos infinito. Quiere decir que por ahora no tengo asíntota vertical en x = 3. Lo que si quiero que vean es lo siguiente:
¿ Por qué simplifiqué el (x-3) con el (x-3) ? ¿Puedo hacer eso? Si Puedo hacerlo x no es igual a 3. Es decir, yo me estoy acercando a x = 3, pero no estoy justo en x = 3. entonces si puedo tachar los paréntesis. Aclaro esto porque si x fuera justo 3, me quedaría la cuenta 0/0 y ahí la simplificación no se podría hacer.

¿Queda claro esto, che? Pregunten si no entienden, chicos. Veo caras que... Bueno, sigo. Pruebo ahora por derecha. Tomo el $\lim_{x \to 3^+} f(x)$. Veamos:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{(x+1)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}$$

$$\mathbf{\lim_{x \to 3^+} (x + 1) = 4}$$

Otra vez el límite no me dio infinito. Quiere decir que la función no va a tener asíntota vertical en x = 3. ¿Hay algún otro punto en donde se anule el denominador ? Rta: NO. No hay ningún otro. Entonces puedo decir que la función dada NO tiene asíntotas verticales.
Voy a buscar ahora las asíntotas horizontales ¿se acuerdan lo que había que hacer?

Había que buscar los límites para x tendiendo a ∞ y a -∞. Si alguno de esos límites daba un número que no fuera ∞ o -∞ iba a tener asíntota horizontal. Bien, empecemos. Hago tender primero x a + ∞:

$$\text{Lim}_{x\to+\infty} F(x) = \text{Lim}_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} = +\infty$$

¿Cómo hice para saber que el límite da infinito? Muy simple. Le fui dando valores con la calculadora. Si le doy a x valores muy grandes, la función toma valores muy grandes. Prueben. Agarren la calculadora y prueben. Bueno, ahora me fijo qué pasa para $x\to-\infty$

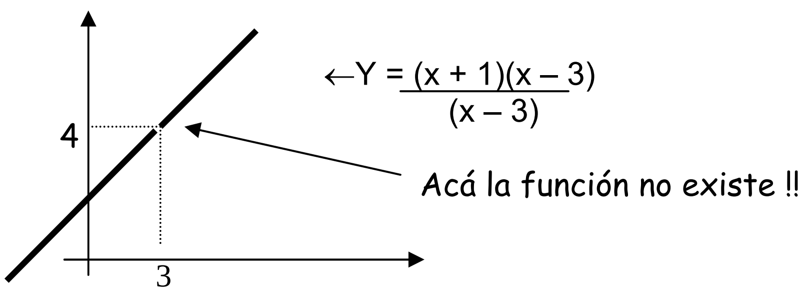
$$\text{Lim}_{x\to-\infty} F(x) = \text{Lim}_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 3} = +\infty$$

Otra vez el límite no me dio un número. Significa que la función NO va a tener asíntotas horizontales.

Una cosa más quiero que vean. En la función $f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)}$ puedo simplificar siempre (x – 3) con (x – 3) salvo justamente para x = 3. de manera que puedo poner a la función que me dan como:

F(x)= x + 1 para cualquier x salvo x = 3

¿Puedo hacer esto? Sí, claro que puedo. Es decir que la F que me dan es en realidad la ecuación de una recta. Esto vale para todo $x \neq 3$. ¿Y en 3 qué pasa?
Y bueno, en 3 la función NO EXISTE.
¿A qué voy? Voy a que traten de darse cuenta de que el gráfico de la función va a ser el gráfico de la recta y = x + 1 salvo para el punto x = 3 (ahí la función no va a existir) Es decir que la representación de f es:



¿Hago otro ejemplo de esto, quieren?

EJERCICIO: **Hallar las asíntotas verticales y horizontales (si existen) de la función** $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 3}{3x(x-3)}$

Busco el dominio de la función. Lo de abajo se me anula para x = 0 y para x = 3. esos serán posibles puntos de asíntotas verticales. Entonces:

Dom F=$\mathbb{R}$ - { 0 ; 3 }

Busco los ceros de F. El polinomio de arriba - x^2 + 2x + 3 se anula en x_1 = -1 y x_2 = 3. (eso lo saco de la cuadrática). Entonces:

Ceros de F= {-1} (3 NO)

Igual que antes. Aclaro que 3 NO es cero de F porque ahí se me anulan numerador y denominador. La función NO EXISTE en x = 3 (la cuenta me daría 0/0). Busco ahora asíntotas verticales. Los puntos posibles serán x = 0 y x = 3. Empiezo con cero por la derecha. Como ya saben, hay que ir dándole valores con la calculadora.

$$\text{Lim}_{x\to 0^+} f(x) = \text{Lim}_{x\to 0^+} \frac{\left(-x^2+2x+3\right)}{3x(x-3)} =$$

$$\text{Lim}_{x\to 0^+} \frac{-(x+1)\cancel{(x-3)}}{3x\cancel{(x-3)}} =$$

$$\text{Lim}_{x\to 0^+} \frac{-(x+1)}{3x} = -\infty$$

El límite me dio – infinito. Quiere decir que F tiene asíntota vertical en x = 0, Aclaro que de ahora en adelante voy a trabajar con la función F(x)= -(x + 1)/3x Esta función vale para todo x≠ 3. Vamos al límite tendiendo a cero por la izquierda.

$$\text{Lim}_{x\to 0^-} f(x) = \text{Lim}_{x\to 0^-} \frac{-(x+1)}{3x} = +\infty$$

⇒ También hay asíntota vertical en x = 0 del lado izquierdo. Probemos ahora con x = 3 por izquierda y por derecha:

$$\text{Lim}_{x\to 3^-} \frac{-(x+1)}{3x} = \frac{-(3+1)}{3\times 3} = -\frac{4}{9}$$

$$\text{Lim}_{x\to 3^+} \frac{-(x+1)}{3x} = \frac{-(3+1)}{3\times 3} = -\frac{4}{9}$$

Los límites NO me dieron ∞. La función NO tiene asíntota vertical en x = 3.

Vamos a las asíntotas horizontales. Tomo el límite para x→+∞. Voy dando valores grandes con la calculadora:

$$\text{Lim}_{x\to +\infty} f(x) = \text{Lim}_{x\to +\infty} \frac{-(x+1)}{3x} = -\frac{1}{3} \quad \text{HAY ASÍNTOTA}$$

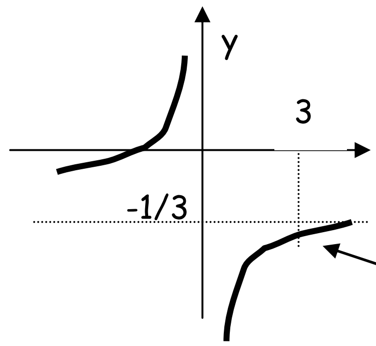
Tomo ahora el límite para x tendiendo a menos infinito. Probemos dando valores grandes negativos.

$$\text{Lim}_{x\to-\infty} \frac{-x^2+2x+3}{3x(x-3)} = -\frac{1}{3} \qquad \text{HAY ASÍNTOTA}$$

Igual que antes. Tengo dos polinomios de igual grado, de manera que el límite para x tendiendo a infinito o a menos infinito va a dar un número. ¿Hay asíntota horizontal? Si, hay. La asíntota es Y= -1/3. El gráfico de la función va a dar así:

$$f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{3x(x-3)}$$

Y= -1/3 asíntota →



En x=3 no existe.

Esto es todo sobre el tema asíntotas.

<u>ASINTOTAS</u> - <u>EJERCICIOS SACADOS DE PARCIALES</u>

MATEMATICA PRIMER PARCIAL TEMA 3

APELLIDO: [redacted] ...... NOMBRES: Fernanda .... D.N.I.: ....

1	2	3	4	NOTA
B	B	B	B	10 (DIEZ)

INSCRIPTO EN : SEDE: .... DIAS: ....

HORARIO: .... AULA: 1..

CORRECTOR: Andrea

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta

3. Sea $f(x) = \frac{8x-7}{kx-4}$. Calcular k para que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Para el valor de k encontrado, calcular todas las asíntotas de f justificando con los límites correspondientes.

La función que nos dan es: f(x) = (8 x – 7) / (k x - 4). Nos preguntan cuanto tiene que valer k para que: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Hagamos el truquito de dividir numerador y denominador por x para resolver este límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8\frac{x}{x} - \frac{7}{x}}{k\frac{x}{x} - \frac{4}{x}} \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{8 - \frac{7}{x}}{k - \frac{4}{x}}$$

Cuando x → +∞ tanto 7/x como 4/x se van a cero, esto queda así: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8-\frac{7}{x}}{k-\frac{4}{x}} = \dfrac{8}{k}$

Nos dicen que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Entonces ⇒ 8/k = 2. Llegamos a que:

$$\boxed{k = 4}$$

Reemplacemos este valor de k en f(x): $f(x) = \dfrac{8x-7}{4x-4}$

Calculemos las asíntotas verticales y horizontales. Los candidatos a asíntotas verticales son los puntos que no están en el dominio. En este caso, x = 1, porque es el valor de x donde se anula el denominador. Entonces, calculamos el límite de la función en esos puntos.

$$\lim_{x\to 1} f = \lim_{x\to 1} \frac{8x-7}{4x-4} = \infty \quad \Rightarrow$$ x = 1 es una asíntota vertical

Las asíntotas horizontales son más fáciles de calcular. Todo lo que hay que hacer es calcular el límite de f(x) en el infinito. Si nos da un número, es una A.H.:

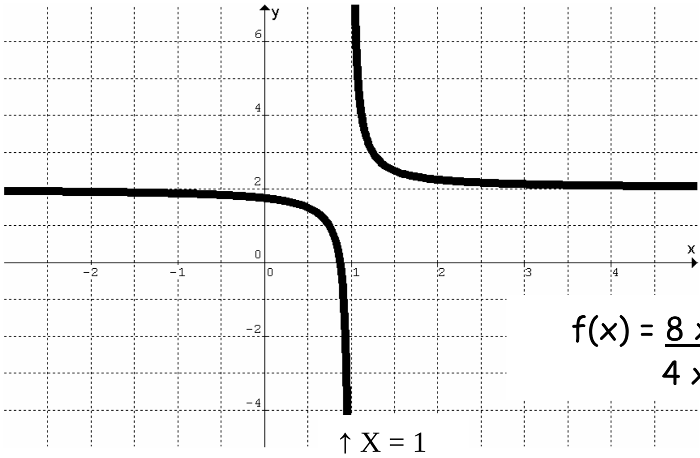
$$\lim_{x\to\infty} f = \lim_{x\to\infty} \frac{8x-7}{4x-4}$$

Como el límite queda indeterminado debido a la división, entonces divido por x tanto en el numerador como en el denominador.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{8x-7}{4x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{8-\frac{7}{x}}{4-\frac{4}{x}} = 2 \Rightarrow$$ y = 2 es asíntota horizontal.

Rta: ⇒ y = 2 es asíntota horizontal ⇒ x = 1 es una asíntota vertical. Hagamos un dibujito:

Y = 2 →



$f(x) = \dfrac{8x-7}{4x-4}$

↑ X = 1

ASIMOV

L MATEMATICA PRIMER PARCIAL TEMA 4

APELLIDO: ....NOMBRES: .............................D.N.I: ....

1	2	3	4	NOTA
X	M	B⁻	B⁻	4 (cuatro)

INSCRIPTO EN : SEDE: CIUDAD. DIAS: MIERC/VIERN

HORARIO: 20-23. AULA: 319.

CORRECTOR: Evangelina.

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta

3) Sea $f(x) = \dfrac{bx - 14}{2x - 3}$. Hallar el valor de $b \in \mathbb{R}$ para el cual $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 4$.

Para el valor de b encontrado, calcular $f^{-1}(x)$.

Calculamos el límite en el infinito. Veamos:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{bx-14}{2x-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(b-14/x)}{x(2-3/x)} = \frac{b}{2}$$

Nos dicen que este límite vale 4. Entonces tenemos:

$$\frac{b}{2} = 4 \rightarrow b = 4 \times 2$$

$$\boxed{b = 8}$$

Para calcular $f^{-1}(x)$ despejamos la x de la fórmula de la función original:

$$f(x) = y = \frac{8x-14}{2x-3}$$

$$y(2x - 3) = 8x - 14 \rightarrow 2xy - 8x = 3y - 14$$

$$\rightarrow x(2y - 8) = 3y - 14$$

$$x = \frac{3y-14}{2y-8} \rightarrow \text{cambiamos y por x y x por } f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{3x-14}{2x-8}$$

M MATEMATICA PRIMER PARCIAL TEMA 6

APELLIDO:.......................NOMBRES:..........................D.N.I:....................

INSCRIPTO EN: SEDE:............DIAS:..........
HORARIO:........AULA:..........

CORRECTOR: ....

En cada ejercicio escriba los razonamientos que justifican la respuesta

3. Sean f(x)= -x-2 y g(x)= $\frac{3x^2}{-x^2+4}$ y $h = g \circ f$. Hallar las ecuaciones de todas las asíntotas de h, mediante el cálculo de los límites correspondientes.

$f(x) = -x-2$ $\qquad g(x) = \frac{3x^2}{-x^2+4}$

Calculamos la composición: h = g(f(x))

$$h(x) = \frac{3(-x-2)^2}{-(-x-2)^2+4} \rightarrow h(x) = \frac{3x^2+12x+12}{-x^2-4x}$$

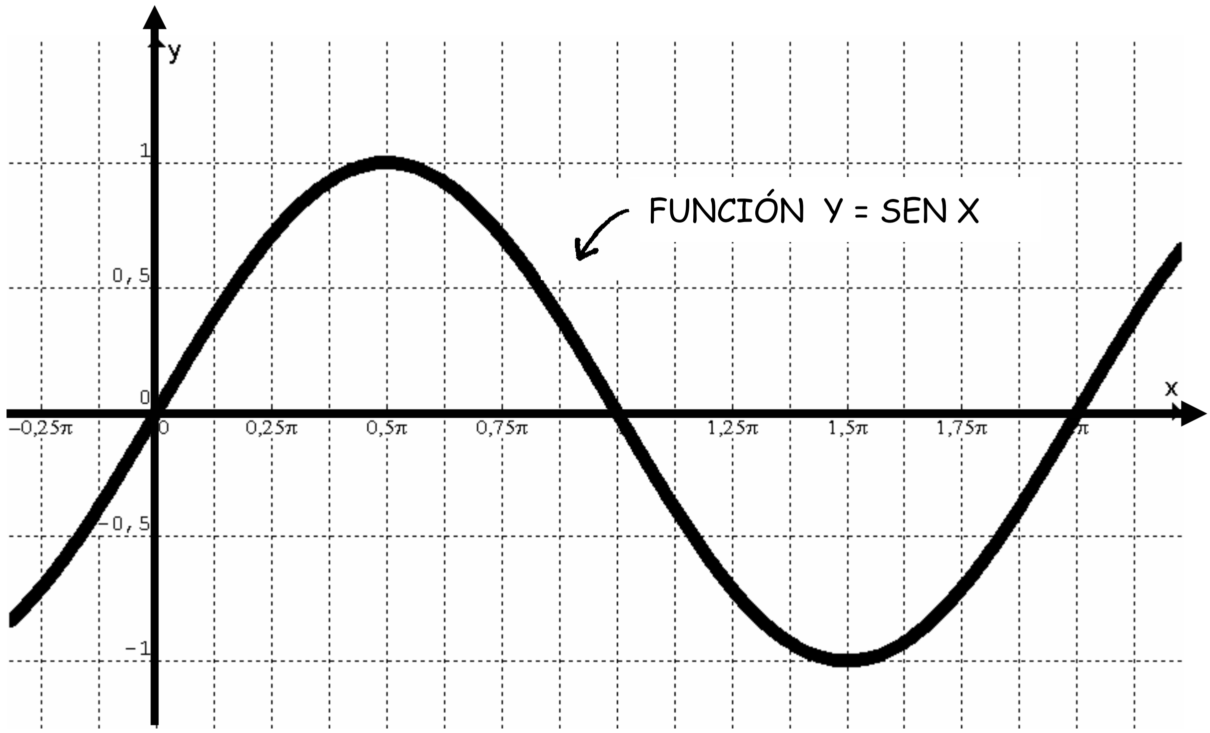
A.H.: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3x^2+12x+12}{-x^2-4x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2(3+12/x+12/x^2)}{x^2(-1-4/x)} = \frac{3}{-1} = -3$

A.V. Hay que ver en qué puntos la función tiende a infinito. Esto va a pasar en los bordes del dominio.
Los puntos que no pertenecen al dominio son los que hacen 0 al denominador: x = 0 y x = -4. Si calculamos los límites, nos dan infinito $\rightarrow$ son A.V.

Rta: Las asíntotas son y = -3 (A.H.) x = 0 y x = -4 (A.V.)

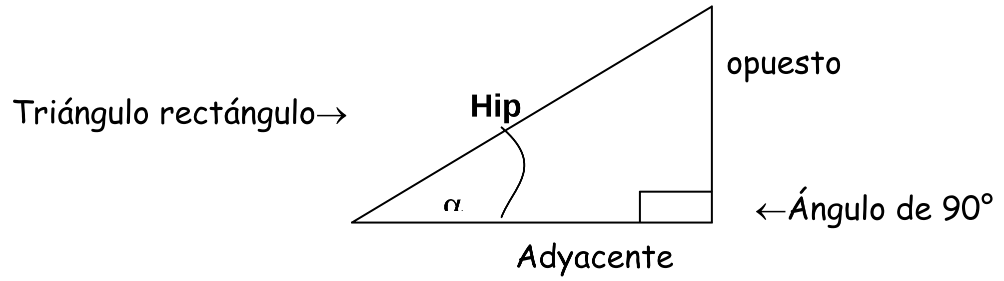
FIN ASINTOTAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

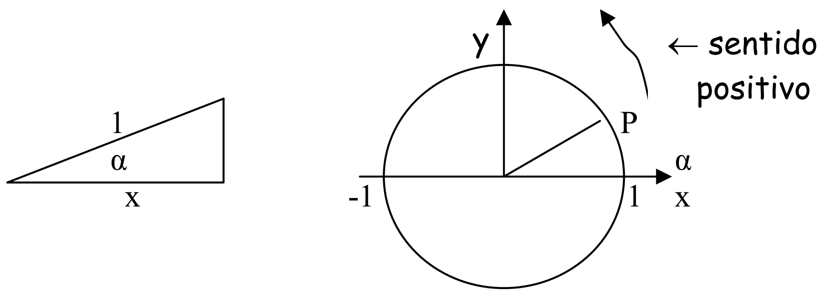
Se definen de la siguiente manera. Supongan que me dan un triángulo rectángulo, es decir que tiene 90°.



Tomo un ángulo α. Para ese ángulo:

$$\text{Sen } \alpha = \frac{\textbf{opuesto}}{\textbf{Hip}} \qquad \text{Cos } \alpha = \frac{\textbf{adyacente}}{\textbf{Hip}}$$ ← **funciones trigonométricas**

Ahora vamos a ver otra definición: supongamos que me dan una circunferencia de radio 1.

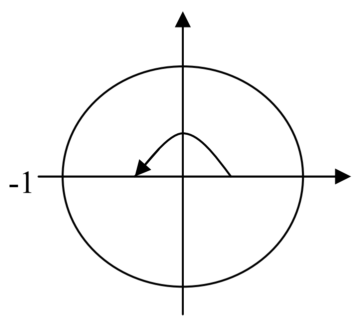


El punto P tiene coordenadas x e y. Como el radio de la circunferencia es 1, la hipotenusa vale 1. Entonces el sen α y el cos α quedan así:

$$\text{Sen } \alpha = y/1 \quad \Rightarrow \text{sen } \alpha = y$$

$$\text{Cos } \alpha = x/1 \quad \Rightarrow \text{cos } \alpha = x$$

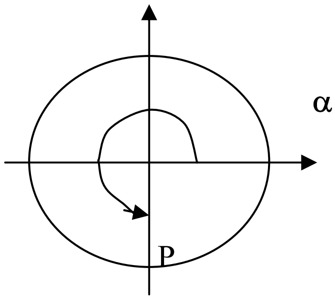
Esta segunda definición me permite trabajar con ángulos mayores que 90°.
Por ejemplo, si el ángulo es de 180°, las coordenadas de P son x = - 1 , y = 0 .



Mirando el dibujo veo que, como x = cos α e y = sen α :

Sen 180° = 0, Cos 180° = -1

Vamos a hacerlo ahora, por ejemplo, para 270°. Para 270° el punto P queda ubicado así:



α = **270°**

Las coordenadas de P van a ser: x = 0, y = - 1, entonces:

Sen 270° = -1, Cos 270° = 0

Si hago esto para todos los puntos que están en el primer, segundo, tercer y cuarto cuadrante, tengo:

<u>1° cuadrante</u>: sen α= **+**, cos α= **+**
<u>2° cuadrante</u>: senα = **+**, cos α = **-**
<u>3° cuadrante</u>: sen α= **-**, cos α = **-**
<u>4° cuadrante</u>: sen α= **-**, cos α = **+**

Esto lo puedo resumir en este cuadrito:

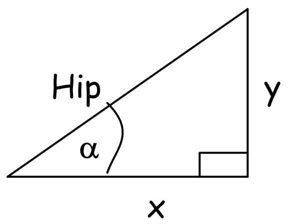
Cos α = - **Sen α = +**	**Cos α = +** **Sen α = +**
Sen α = - Cos α = -	Sen α = - Cos α = +

A la circunferencia de radio 1 se la llama <u>circunferencia trigonométrica</u>.
Otra cosa que tienen que recordar es el teorema de Pitágoras que dice que:

<u>Teorema de Pitágoras:</u>

La suma de los cuadrados de los catetos
es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Es decir:

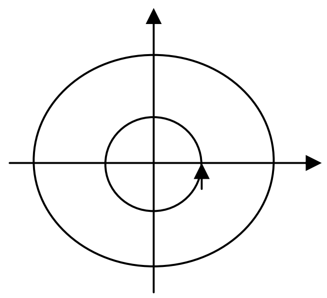


$Hip^2 = x^2 + y^2$

Como en la circunferencia trigonométrica la hipotenusa vale 1, me queda: $X^2 + Y^2 = 1$. Ahora, como $x = \cos\alpha$ e $Y = \text{sen}\,\alpha$, reemplazando:

$$(\cos\alpha)^2 + (\text{sen}\,\alpha)^2 = 1$$

A esto se lo llama identidad pitagórica o algo así. Otra cosa: ustedes saben que los ángulos se miden también en radianes. Para calcular un ángulo en radianes hacemos lo siguiente: la longitud de la circunferencia es $2\pi r$. Acá el radio vale 1 ($r = 1$), de manera que la longitud total de la circunferencia es $\underline{2\pi}$. Entonces:



← todo este ángulo vale 2π radianes.

La equivalencia es 2π radianes = 360° ¿Qué pasa si quiero saber cuánto vale un ángulo cualquiera? Bueno, parto de la equivalencia 2π radianes igual a 360° y hago regla de tres simple. Por ejemplo, si $\alpha = 180°$:

$$360° \_\_\_\_\_ 2\pi \text{ rad}$$
$$180° \_\_\_\_\_ x(\text{Rad.})$$

$$x_{(\text{Rad.})} = 180°\ 2\pi/360°$$
$$x = \pi \text{ Rad.}$$

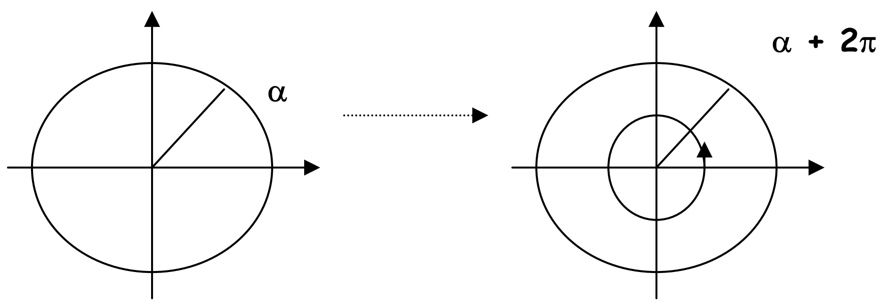
Si hago esto para varios ángulos, puedo construir esta tablita:

α en grados	α en radianes
0 °	0
30 °	$\pi/6$
45 °	$\pi/4$
60 °	$\pi/3$
90 °	$\pi/2$
180 °	π
270 °	$3\pi/2$
360 °	2π

Convendría que recuerden estos valores. Los van a tener que usar para hacer estos ejercicios. ¿Alguna pregunta sobre esto, chicos ?
Bueno. Vamos a ver ahora cómo se grafican las funciones trigonométricas. Es decir, cómo se representan y qué forma tienen. ¿ Cómo ? ¿ La clase que viene ? Bueno, está bien. La clase que viene.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS. REPRESENTACIÓN.

Quiero que ahora vean esto. ¿ Qué pasa si tengo un ángulo α y le sumo una vuelta ? (2π rad). Bueno, el ángulo va a ser el mismo. Fíjense:



Entonces, Como el ángulo es el mismo, el seno y el coseno van a valer lo mismo. Es decir:

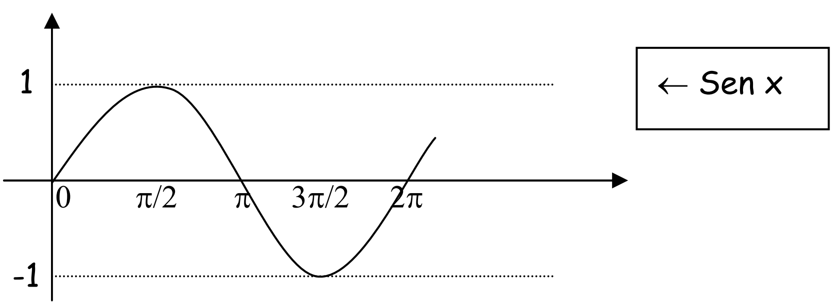
$$\text{Sen}\,(\alpha + 2\pi) = \text{Sen}\,\alpha$$

$$\text{Cos}\,(\alpha + 2\pi) = \text{Cos}\,\alpha$$

Por esto se dice que las funciones trigonométricas son periódicas de período 2π. Quiere decir, si le sumo 2π (360°), van a valer lo mismo. Algunos valores del seno y el coseno de α que se tienen que acordar son los siguientes:

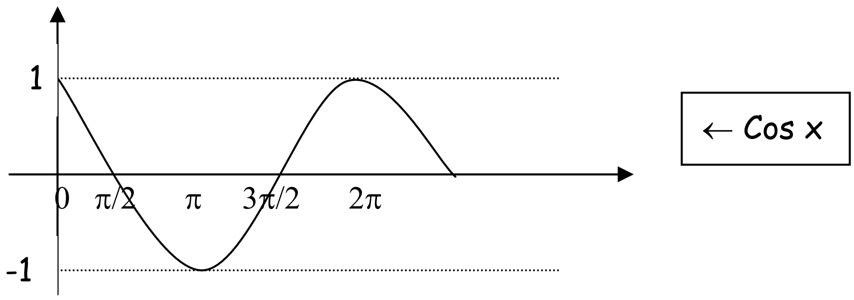
	0 (0°)	$\pi/6$ (30°)	$\pi/4$ (45°)	$\pi/3$ 60	$\pi/2$ (90°)
Sen α	0	½	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
Cos α	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0

Vamos a graficar las funciones trigonométricas. Tomo las funciones F(x) = sen x y G(x) = cos x. Usando la tablita de recién o la calculadora voy dando valores a <u>x</u> y saco los de sen x. Eso da así:



Fíjense que la función se repite a partir de 2π. También vean que el dominio van a ser todos los reales, pero la imagen va a ser siempre Im (sen x) = [-1, 1].

Vamos ahora a las función Cos x. La voy graficando dándole valores a x:



Lo que tienen que ver acá es que la función cos x es la función seno pero corrida para allá ← en $\pi/2$.

Hagamos un ejercicio.

Me dicen: **Sabiendo que cos $\pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular el sen $\pi/6$.**

Bueno, uso la identidad: $(\text{sen}\,\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$

en este caso: $(\text{sen}\,\pi/6)^2 + (\cos\pi/6)^2 = 1$

Reemplazando Cos ($\pi/6$) por $\sqrt{3/2}$:

$$(\text{sen}\,\pi/6)^2 + (\sqrt{3/2}\;)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\,\pi/6 + 3/4 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2\,\pi/6 = 1 - 3/4$$

$$\Rightarrow \text{sen}^2\,\pi/6 = \tfrac{1}{4}$$

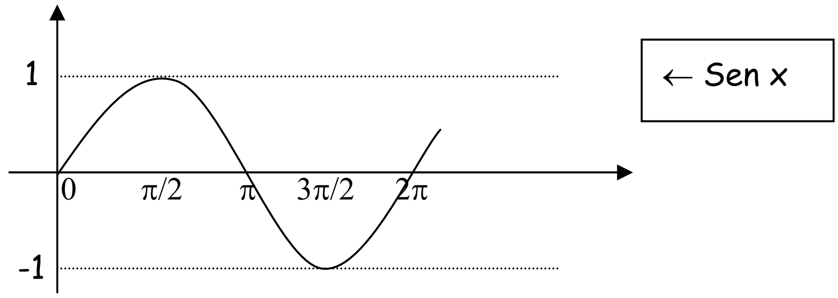
$$\Rightarrow \boldsymbol{\text{sen}\,\pi/6 = \pm\, 1/2}$$

Ahora, acá hay que tener cuidado ¿ Me quedo con la solución + ó - ?. Bueno, sé que $\pi/6$ es un ángulo que está en el primer cuadrante, de manera que el seno debe dar positivo. Entonces la solución va a ser:

$$\textbf{Sen}\ \pi/6 = \frac{1}{2}$$

Vamos a volver ahora a los gráficos del sen x y del cos x. Analicemos Dominio e Imagen:

Dom f= $\mathbb{R}$
Im f= [-1,1]



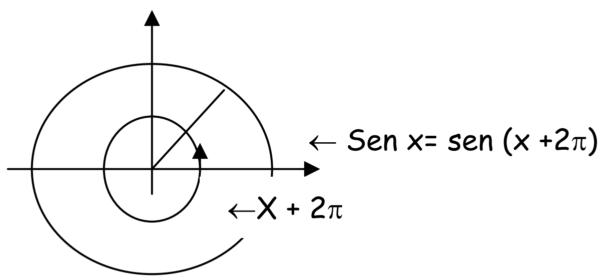
La función se repite a intervalos de 2π. Por lo tanto el período es 2π. La amplitud es la altura de la función. En este caso la amplitud es 1.

FUNCIÓN SEN X

¿Dónde tendrá los ceros la función seno de equis ?
Bueno, sen x = 0 para $x = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ o también en $x = -\pi, -2\pi$, etc.
Entonces puedo decir que la función sen x tiene ceros en los puntos:

$x = k\pi\ (k \ni \mathbb{Z})$ ← **ceros del sen x**.

La función seno toma su valor máximo en $x=\pi/2$ o $x= \pi/2 + 2\pi$ o $x= \pi/2 + 4\pi$, etc.
Fíjense que el ángulo es el mismo si yo le sumo 360° (2π rad).



Vamos a poner en forma genérica los lugares donde el sen x toma su valor máximo (que es 1).

$X = \pi/2 + 2k\pi$ ← **lugares donde el sen x vale 1.**

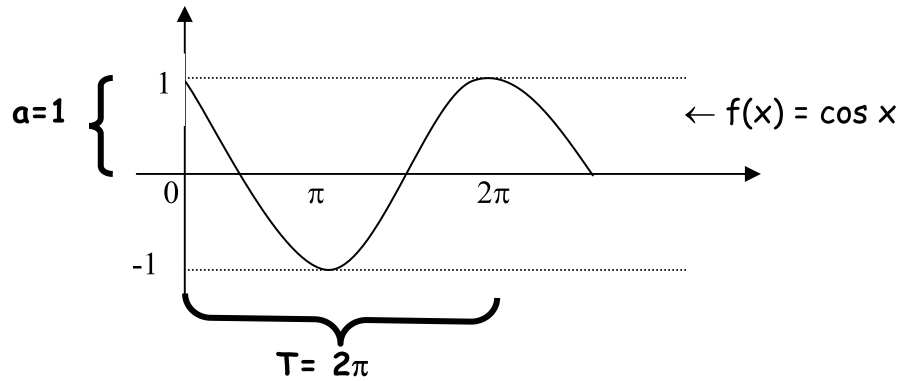
El número k pertenece a los números enteros ($\mathbb{Z}$). Eso quiere decir que k podrá también ser negativo. Es decir, k = - 2, - 1, 0, 1, 2, etc..
¿ Cuándo el sen x vale – 1 ? Bueno. Veamos. Eso pasa en $x = 3\pi/2, 3\pi/2\ , 2\pi, 3\pi/2\ , 4\pi$, etc.. También pasa lo mismo del lado negativo. Sen x será – 1 en:

$x = 3\pi/2 + 2k\pi\ (k \ni \mathbb{Z})$ ← **lugares donde el sen x vale –1.**

Para entender bien esto tienen que hacer el grafiquito de la función. Ahí se ve bien.
Vamos a hacer el mismo análisis pero para el cos x.

FUNCIÓN COS X

¿ Cómo era el gráfico ?. Era igual al del sen x pero empezando en 1. (o lo que es lo mismo, era la función sen x pero corrida así ← en $\pi/2$). Dibujemos :



Mirando el gráfico veo que es una función periódica de período 2π y amplitud 1. La función es simétrica respecto del eje vertical.
Busquemos los ceros de la función cos x. Miren el dibujo. La función vale cero en $\pi/2$, $\pi/2 + \pi$, $\pi/2 + 2\pi$. Lo mismo pasa del lado negativo. Tendré ceros en $-\pi/2$, $-\pi/2 - \pi$, $-\pi/2 - 2\pi$, etc.. Entonces:

$x= \pi/2 + k\pi \ (k \ni \mathbb{Z})$ ← **ceros del cos x.**

¿Cuándo vale uno la función? Miren la gráfica y piensen. Eso pasa en $x = 0$, $x = 2\pi$, $x= 4\pi$ o también en $x = -2\pi$, $x= - 4\pi$, etc.. Escribiendo en forma compacta esto:

$x = 2k\pi$ ← **lugares donde cos x vale 1.**

La función valdrá –1 en π, 3π, 5π, $-\pi$, -3π, etc. Esto escrito en forma compacta queda:

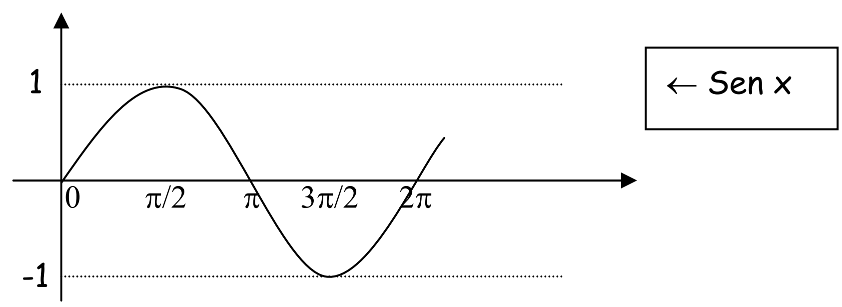
$X= \pi + 2k\pi \ (k \ni \mathbb{Z})$ ← **lugares donde cos x vale –1.**

Vamos a ver un ejercicio.

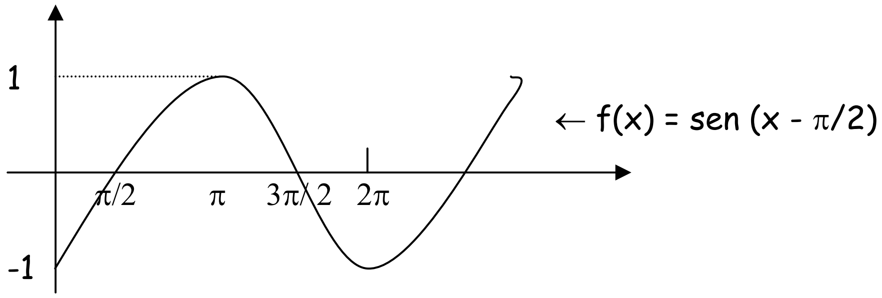
EJERCICIO

A partir de los gráficos de sen x y cos x, graficar la función sen $(x - \pi/2)$.

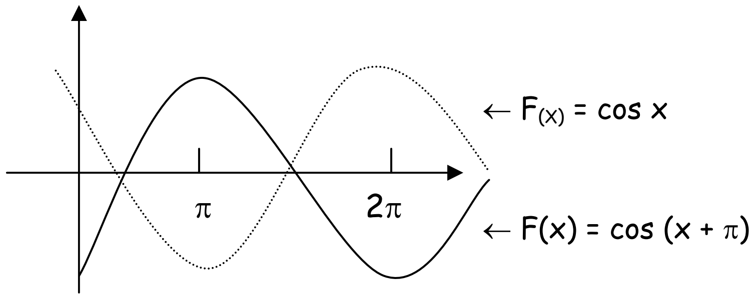
Fíjense. Dibujo primero la función sen x. Eso ya lo sabemos hacer:



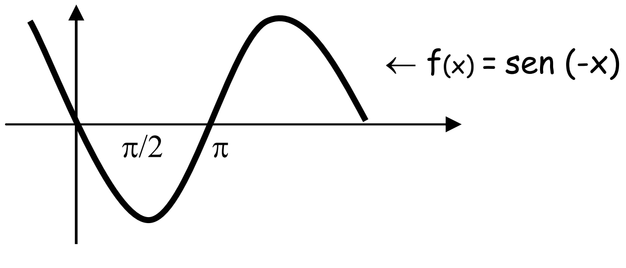
¿ Cómo hago para graficar sen (x- π/2) ?. Bueno, hay que acordarse de que si me dan el gráfico de una función f(x), el gráfico de la función f(x –a) será el mismo gráfico pero todo corrido para allá $\rightarrow$ en a. Esto mismo pasa con la función sen (x - π/2). El gráfico será el mismo pero corrido para allá $\rightarrow$ en π/2.
Lo dibujo:



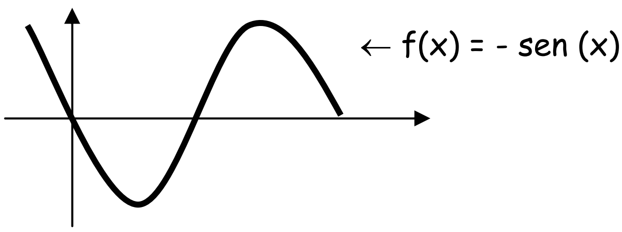
Grafiquemos ahora cos (x + π). El gráfico será el de la función cos x pero corrido para allá $\leftarrow$ en π. Eso da así:



Grafiquemos ahora f(x) = sen (-x). Ahora hay que acordarse de que si me dan el gráfico de una función f(x), el gráfico de la función f(-x) será el mismo gráfico pero simétrico respecto del eje vertical. Es decir, la función se refleja en el eje y. La representación queda así:



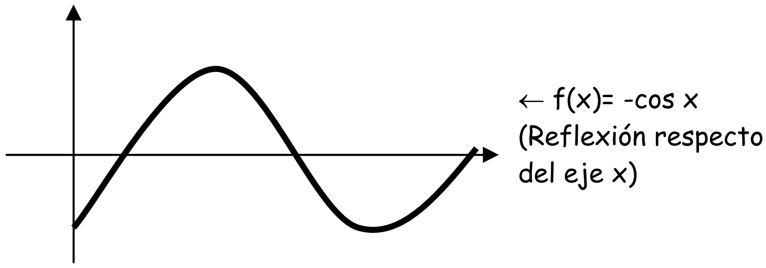
Grafiquemos f(x)= - sen x. Ahora la función se ve reflejada sobre el eje x.

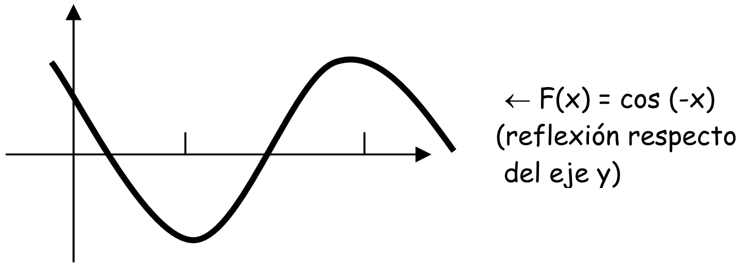


Acá quiero que vean una cosa. La representación de las funciones sen (- x) y – sen x resultó ser la misma. Esto es importante que lo recuerden.

Sen (-x)= - Sen x.

Vamos a hacer lo mismo con la función coseno. Grafiquemos cos (-x) y – cos x.

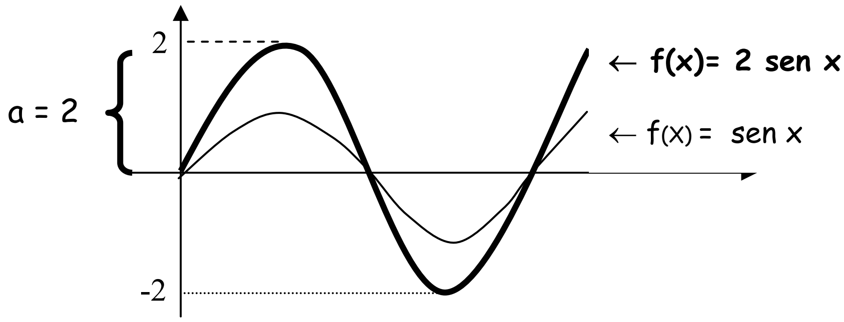




Fíjense que la función cos (-x) me dio igual que cos x. Eso también es importante. Aprendanselo: Cos (-x) = Cos x

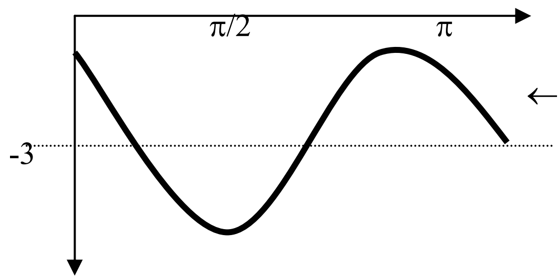
---

Grafiquemos ahora esta otra función: f(x) = 2 sen x. ¿Qué diferencia tengo con sen x? Bueno, lo que pasa ahora es que los valores máximos que antes eran 1 y – 1 ahora serán 2 y – 2. Es decir, ¿ qué cambió ? Cambió la amplitud. La función se estiró. Se alargó en sentido vertical. El gráfico queda así:



<u>EJEMPLO:</u> **Graficar f(x)= cos x – 3.**

El –3 lo que hace es bajarme la función en tres para abajo. Entonces me queda el mismo dibujito pero bajado en tres.



Es decir, cambió la imagen de la función. **Im (cos x – 3) = [-2, -4].**

Resumiendo todas estas posibilidades:

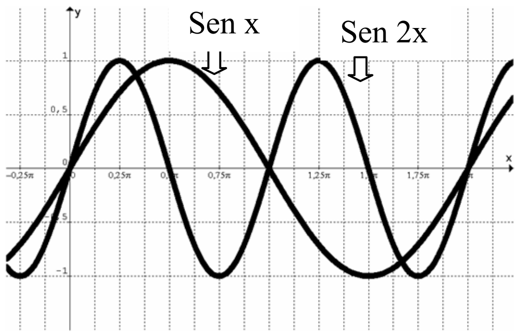
Sen (x + c) ← cambia la posición de los máximos y mínimos.

a Sen x ← cambia la amplitud y la imagen en el factor a.

Sen x + b ← sube o baja la función en b.

Esto mismo pasa para la función cos x.

Si me dan ahora la función sen (2x), el gráfico me queda así: ⇨



Es decir, el factor 2 <u>dentro</u> me comprimió toda la función en este sentido → ←. Lo que pasó acá es que cambió el **período** de la función. La conclusión es que si tengo una función que es sen (bx) o cos (bx), el período de estas funciones será:

$\boxed{T = 2\,\pi/\,b}$ ← Período para las funciones de la forma sen (b x) o cos (b x)

FUNCIÓN ARCOSENO

Es una función tal que uno mete el valor del seno del ángulo y ella da el ángulo. Es decir:

Sen x: [ℝ] → [-1,1] ← tomo este intervalo para que sea biyectiva.

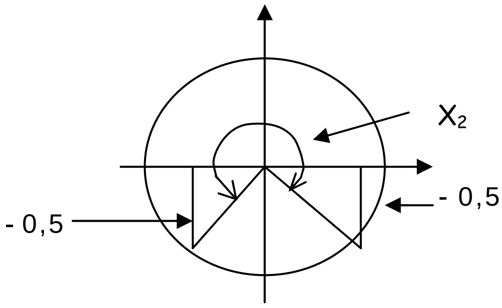
Arc sen x: [-1,1] → [-π/2, π/2]

Por ejemplo, si me dicen que tengo un ángulo tal que su seno vale –1/2, quiere decir que ese ángulo vale –30°. ¿ Cómo calculé eso ?

Rta: Bueno, preguntándoselo a la calculadora. Pongo:

$\boxed{-}$ $\boxed{0}$ $\boxed{.}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{SEN}}$ $\boxed{=}$

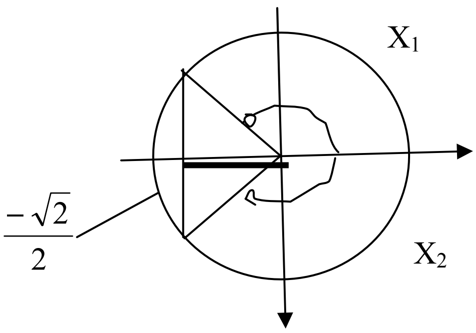
Piénselo así: tomemos la circunferencia trigonométrica.



El ángulo que obtuve es el valor x_1 ($x_1 = -30° = -\pi/6$). Ahora, ojo !. El otro ángulo que marqué con x_2 también cumple lo pedido. Quiere decir que las soluciones de la ecuación sen x = 0,5 son: $\mathbf{x_1} = -\pi/6$ y $\mathbf{x_2} = 7\pi/6$ (210°)

OTRO EJEMPLO: **Calcular x tal que Cos x = 2.**

Bueno, acá no hay solución. No existe ángulo tal que su coseno valga 2. El Coseno de un ángulo y el seno de un ángulo van siempre entre –1 y 1. Para hacer este tipo de ejercicio siempre tienen que dibujar la circunferencia trigonométrica y marcar los ángulos que correspondan. Me piden hallar x tal que Cos x = $-\sqrt{2}/2$ hago esto:



Para x_1 y x_2 cos x= $-\sqrt{2}/2$

Las respuestas van a ser $x_1 = 135°$ ($3\pi/4$) y $x_2 = -135°$ ($5\pi/4$). Pregunto:
¿ Podría expresar el ángulo de –135° como 225° ? Sí, claro. Es lo mismo.
¿ Qué hace la calculadora ? Ella me da un único valor que está en el 1° o 4° cuadrante. Si quiero el otro valor lo tengo que sacar yo con el dibujito.
Creo que se entiende no ?. Bueno, vamos a ver esto otro.

REPRESENTACIÓN DEL ARCO SENO Y ARCO COSENO

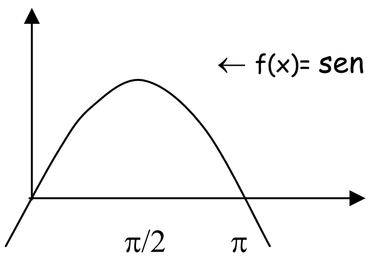
Chicos, qué era el arco seno ? Era la función inversa del seno ¿ si ? Se acuerdan?

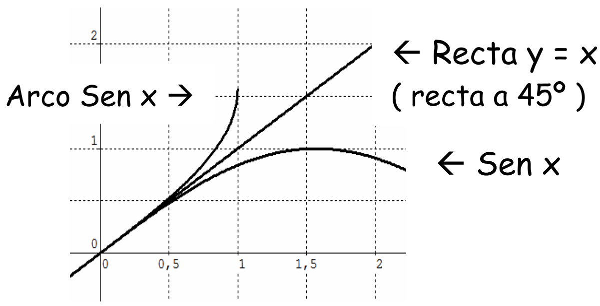
Bueno, vamos a graficarla para ver qué forma tiene. Ahora, una cosa. Esto ya se los dije pero es importante. Cuando se habla de la inversa de una función, no quiere decir que haya que hacer " 1 sobre la función".
A ver si me entienden. Si les piden graficar la función inversa del seno, tienen que graficar el arco seno, NO " 1 / sen x " ¿ estamos ?. Es decir:

Si F(x)= sen x

F^{-1}(x)= Arco sen x (y no 1/sen x)

Bueno, ¿cómo hago? Claro, tengo que trazarla bisectriz del 1° cuadrante (que es la recta y = x) ¿ y ahora ? Bien, por simetría respecto a esta recta, voy trazando la función inversa. Es decir:

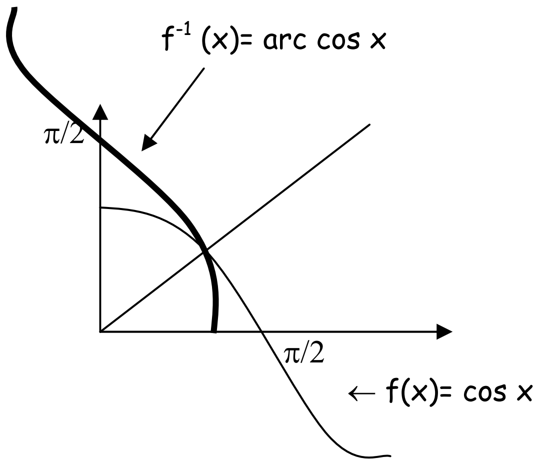




En realidad el gráfico del arco seno va de – 1 a 1. En esa zona la función es biyectiva.

El arco sen x va del [-1,1] → [-π/2, π/2]

Para graficar el arco cos, hago lo mismo. Trazo la recta y = x y razono por simetría. Si piensan un poco van a ver que les da así:



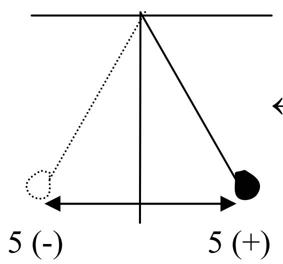
Che, ¿ Qué pasa ? ¿ Por qué charlan ? ¿ Qué es lo que no entienden ? Miren, tienen que estudiar y hacer los ejercicios de la guía. Con escuchar lo que yo digo no

alcanza. Vienen acá, copian y después no hacen nada. Entonces, cuál es, loco ? Tienen que ES-TU-DI-AR !! Y si no entienden, pregunten.
¿Cuál ejercicio? ¿ El del péndulo ? ¿ Qué péndulo ? Ah, sí ! El ejercicio del péndulo que estaba en la guia del año pasado. Vamos a hacer ese, dicto:

EJERCICIO: **Un péndulo oscila de acuerdo a la ecuación $S(t)= 5$ sen $4\pi t$ (S es la amplitud de la oscilación). Se pide:**

a) **representar la función S(t).**
b) **Calcular S para t=10 seg y para t=0.4 seg.**
c) **Calcular el período.**
d) **¿cuándo la separación s es máxima?**

Bueno, el problema acá es que es medio difícil de entender el enunciado. Tienen que saber algo de física. Explico. Lo que pasa es lo siguiente:



← este es el péndulo que oscila

← esta es la amplitud de la oscilación

El péndulo va de un lado al otro. La posición de la pesa respecto de la vertical es la distancia S. El problema dice que la posición S viene dada por la expresión:

$$S(t) = 5 \text{ sen } 4\pi t$$

Ustedes no tienen porqué saber de dónde salió esa ecuación. Ellos dicen que viene dada por esa función y listo. S(la elongación) depende del tiempo siguiendo la función:

$$\mathbf{S(t)= 5 \text{ sen } 4\pi t} \quad (t \text{ en seg ; } S \text{ en cm})$$

Eso es todo. Ahora, representamos esta ecuación. Ustedes no piensen que es un problema de péndulo. Sólo tienen que representar la función $S(t) = 5$ sen $4\pi t$. Veamos. La amplitud de la función será el valor máximo que tome. Ese valor es a = 5. ¿Por qué? Bueno, porque el valor máximo que puede tomar el sen $4\pi t$ es 1. (el seno va siempre de –1 a 1). Habrá algún valor del tiempo que haga que el valor de sen $4\pi t$ valga 1. Busquemos ese valor: se tiene que cumplir que sen $4\pi t = 1$, sí ? Entonces:

$$\text{Sen } 4\pi t = 1 \;\Rightarrow\; 4\pi t = 90°$$

Lo igualé a 90° porque sé que el seno de 90° es 1. ahora, ojo. Tengo que poner 90° en radianes. Noventa grados equivalen a $\pi/2$ radianes, o sea:

$$4\pi t = \pi/2 \Rightarrow 4t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbf{t_{(S=\ smax)} = 1/8\ seg}$$

Conclusión: el péndulo alcanza la máxima separación de la vertical para t = 1/8 seg. ¿ Lo ven ? En realidad habrá instantes posteriores donde la función vuelva a tomar su valor máximo. Ya saben que el seno es una función periódica.

También podría haber calculado la separación máxima pero <u>para el otro lado</u>. Es decir, para allá ←. Ahí el seno tendría que valer –1, es decir, el ángulo tendría que ser 270° (3π/2)

¿ cómo es la pregunta ? ¿ Cuánto vale ? ¿ Cuánto vale <u>qué</u> ? Ah, la separación ! Bueno, en el primer caso la separación será de 5 cm y en el 2do es de – 5 cm. Esas serán las amplitudes máximas de oscilación (que ocurrirán a los 1/8 y 3/8 seg., hagan la cuenta). ¿ Hasta acá está bien ? ¿ Voy rápido ?

Bueno, sigamos ¿ Cuánto vale <u>S</u> para t= 10 seg. ? Lo único que tengo que hacer es reemplazar <u>t</u> por 10 seg. y calcular <u>S</u>. Veamos.

$$S_{(10\ seg.)} = 5\ cm.\ Sen\ (4\ \pi\ 10\ ) \quad \leftarrow t = 10\ seg.$$

$$S_{(10\ seg.)} = 5\ cm \times Sen\ 40\pi \Rightarrow$$

$$S_{(10\ seg.)} = 5\ cm\ Sen\ 20\ [2\pi]$$

$$\Rightarrow \mathbf{S_{(10\ seg)} = 0}$$

Significa, a los 10 segundos el péndulo estará pasando exactamente por la vertical. El resultado es razonable. 20 por 2π significa: "la posición del péndulo después de 20 oscilaciones completas a partir del momento en que salió". Eso significa que debe estar en el mismo lugar de donde salió. ¿ Y para S = 0,4 seg, qué pasa ? Bueno, probemos:

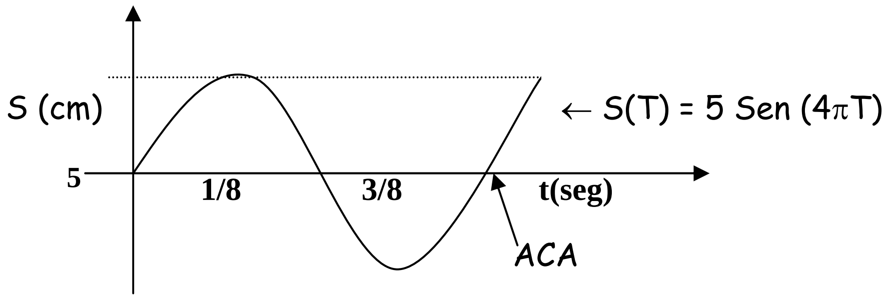
$$S_{(0.4\ s)} = 5\ cm\ sen\ 4\pi\ 0.4 \quad \leftarrow t = 0.4\ s$$

$$\Rightarrow S_{(0.4\ s)} = 5\ cm\ sen\ 1.6\ \pi$$

$$\Rightarrow S_{(0.4\ s)} = 5\ cm\ (-0.951)$$

$$\Rightarrow \mathbf{S_{(0.4\ s)} = -4{,}75\ cm}$$

Esto significa que la posición de la pesa será de 4.75 cm pero para allá ←. Bueno, representemos ahora la función. Sé que tengo un bicho senoidal cuya amplitud es 5. También sé que S es máxima para t = 1/8 y 3/8 de segundo. Entonces el asunto debe dar algo así:



¿Qué era lo último que preguntaba el ejercicio? Ah, el período. Bueno, eso se ve en el dibujo. ¿ El período qué es ? Es el intervalo a partir del cual la función se repite otra vez con la misma forma. ¿Cuándo pasa eso?
Miren el dibujo. Eso pasa después que la función corta por 2da vez al eje t. Si piensan un poco, verán que ese tiempo es t = 4/8 seg = 1/2 seg. Por lo tanto:

T= 0,5 seg. ← **período.**

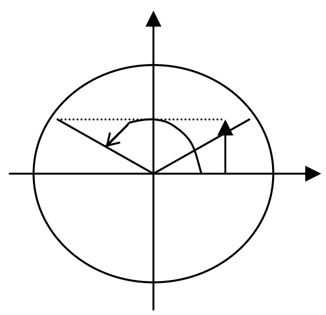
No se asusten con problemas como este. Lean el enunciado, eso es todo.
¿Qué si los tomamos? Si, a veces tomamos cosas por el estilo.

Che, se pueden callar ? Gracias. Les voy a dictar otro tipo de ejercicio que a veces tomamos. Anoten:

Hallar todos los x que pertenecen a [0,2π] tales que sen x= ½ y cos x= $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Fíjense. Acá me están pidiendo 2 cosas. Por un lado los x tales que se cumpla que el seno de x valga 0.5 y por otro lado los x tales que cos x sea 0.866. Lo que hay que buscar son las soluciones de la 1° ecuación y las de la 2^{da} ecuación. La solución común
a ambas va a ser el resultado pedido.
Ahora, es lo mismo pedir soluciones de sen x = 0,5 que soluciones de arc sen 0,5 ?
NO, no es lo mismo por lo siguiente. Miren el dibujo:

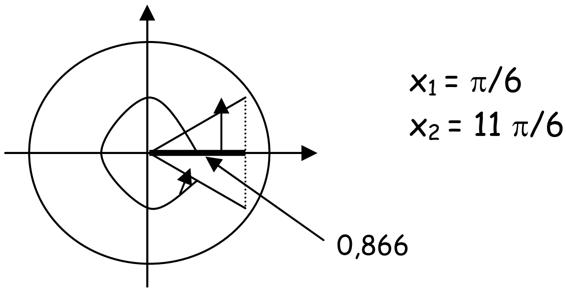
Las soluciones de Sen x= 0,5 son **DOS**



$x_1 = \pi/6$
$x_2 = 5\pi/6$

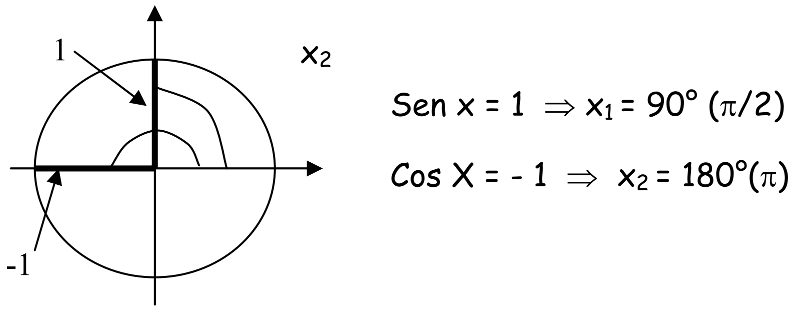
En cambio la solución de arc sen 0,5 me da π/6. Es decir, una sola solución .
¿ entienden? Esto pasa porque para que la función arco sen x sea biyectiva tiene que ir entre –1 y 1 ¿ Se acuerdan ? Entonces las 2 soluciones de la ecuación

sen x = 1/2 son $x_1 = \pi/6$ y $x_2 = 5\pi/6$. Para cos x = $\sqrt{(3/2)}$ pasa lo mismo.
Hago el dibujo y miro.



Entonces, ¿ qué soluciones coinciden ? Solamente $x = \pi/6$. ¿Es la única solución ? Si, es la única. Fíjense que seno y coseno son positivas solo en el 1er cuadrante, quiere decir que la solución va a estar ahí.
¿ Puedo sumarle 2 Kπ a la solución ?
Rta: NO, no puedo porque me dicen que trabaje entre 0 y 2π.

Hagamos este: **Hallar los x tales que se cumpla que sen x = 1 y cos x = -1.**
¿ Qué pasa acá ? Primero, el dibujito.



Entonces cuál es la solución ? Y bueno, no hay solución ! ¿ Por qué no hay ? Porque no hay coincidencia. X_1 es 90° y x_2 es 180°. De esto se tendrían que haber dado cuenta antes !! ¿ Por qué ? Porque siempre se tiene que cumplir que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x$ sea igual a 1. ¿ y eso se cumple en este caso ? <u>NO</u>. Fíjense que no. Tengo:

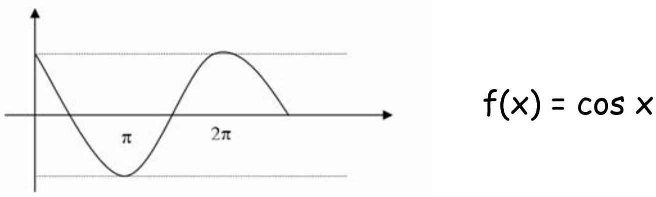
$$(\text{sen } x)^2 + (\cos x)^2 = (1)^2 + (-1)^2 = 2\ !$$

$\Rightarrow$ **no hay ángulo x que cumpla !**

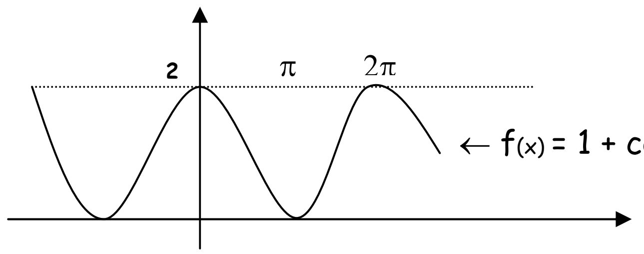
Hagamos otro:

Graficar la función F(x) = 1 + cos x en [0, 5π]

Bueno, este es fácil. Ustedes conocen la gráfica de cos x, ¿ si ? Da así:

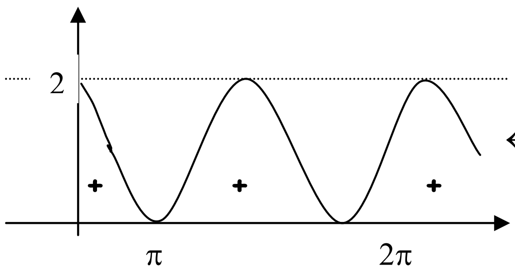


¿ Y si le sumo 1 a la función cómo da ? Y bueno, tiene que quedar toda la función subida para arriba en 1. Es decir que da así:



¿ Qué cambió? A ver. ¿ Cambió la amplitud ? No, la amplitud sigue siendo 1.
¿ Cambió el período ? No, el período sigue siendo 2π. ¿Cuáles son los conjuntos de positividad y negatividad?. Bueno, busquemos primero los lugares donde **la función se hace <u>cero</u>**. Miren el dibujo. Eso pasa **en π, 3π y 5π.**

¿Y los conjuntos C^+ y C^- ? Bueno, C^- <u>NO HAY</u>. La función no es negativa en ningún momento. Es toda positiva salvo en los lugares donde vale cero. Entonces queda así:



¿ Podría haber hallado los ceros analíticamente ? Sí se puede. Tendría que haber planteado la ecuación 1 + cos x = 0, es decir, cos x = - 1. ¿ Qué resultado me da esto ? Me da lo mismo: C_0= { π, 3π, 5π }

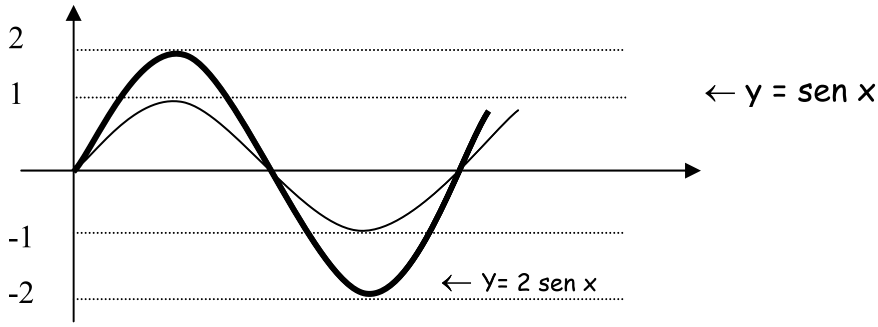
Analicemos este otro ejercicio:

Graficar F(x) = 2 sen (x – π/3) entre [0 y 5 π]. Indicar los ceros y los conjuntos de positividad y negatividad.

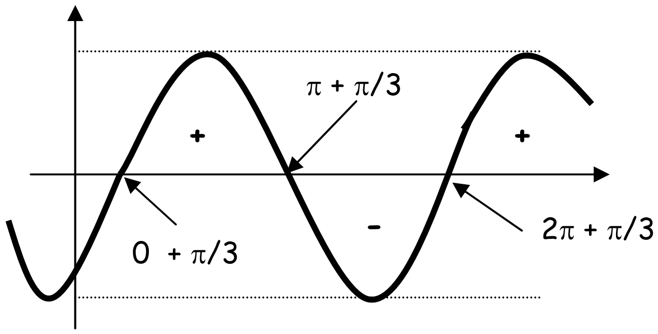
Bueno, acá hay que acordarse lo siguiente: si me dan una función que tiene la forma y = a sen (bx + c), entonces:

Amplitud = a
Período = 2π/b
Corrimiento = c

La amplitud es 2, el período es 2π/1 = 2π y el corrimiento es 60° (π/3) así →



Ahora falta agregarle a este gráfico un corrimiento de $\pi/3$ para allá $\rightarrow$.
Entonces:



Los conjuntos de positividad y negatividad quedan así:

$$\boldsymbol{C_0 = \text{ceros de } f = \{\pi/3;\ 4\pi/3;\ 7\pi/3\}}$$

$$\boldsymbol{C^+ = \{\ (\pi/3,\ 4\pi/3) \cup (7\pi/3,\ 10\pi/3)\}}$$

$$\boldsymbol{C^- = \{(0,\ \pi/3) \cup (4\pi/3,\ 7\pi/3)}$$

Bueno, un último ejemplo. ¿ Qué pasa si me piden hallar los ceros y los conjuntos de positividad y negatividad de una función como $\cos^2 x - \cos x$? Supongamos el intervalo $[0, 3\pi]$.
Acá hay algo que no vimos. Ustedes no saben graficar la función $\cos^2 x$. Entonces este ejercicio habrá que resolverlo analíticamente. Lo que hago es esto:

Tengo $f(x) = \cos^2 x - \cos x$. Saco cos x factor común. Me queda:

$$F(x) = \cos x\ (\cos x - 1)$$

Si quiero buscar los ceros de esta función lo que tengo que hacer es igualar todo a cero. Entonces:

$$F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\ x\ (\cos x - 1) = 0$$

Ahora tengo 2 posibilidades:

$$\mathbf{Cos\ x = 0} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{(cos\ x - 1) = 0}$$

Los x que cumplan cualquiera de las dos condiciones serán los ceros de la función.

Entonces: $\quad$ Cos x = 0 $\Rightarrow$ x = $\pi/2$ o x = $3\pi/2$ o x = $\pi/2 + 2\pi$

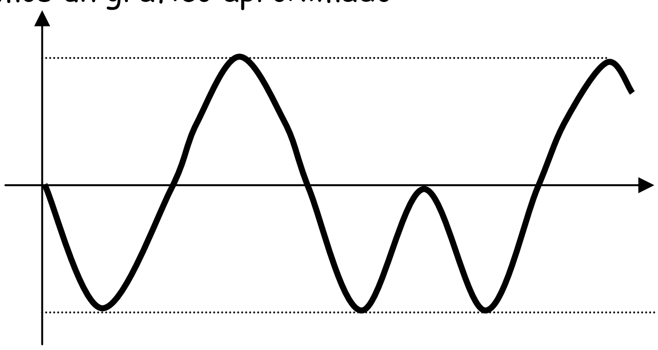
$$(\cos x - 1) = 0 \;\Rightarrow\; \cos x = 1$$

$$\Rightarrow \mathbf{x = 0} \quad \text{o} \quad \mathbf{x = 0 + 2\pi}$$

Puedo hacer la siguiente tablita:

$(0, \pi/2)$	**-**
$(\pi/2, 3\pi/2)$	**+**
$(3\pi/2, 2\pi)$	**-**
$(2\pi, 5\pi/2)$	**-**
$(5\pi/2, 3\pi)$	**+**

Hagamos un gráfico aproximado :



← Cómo es la forma exacta de la función no lo sé, pero el gráfico se debe parecer a esto.

Antes de pasar al tema siguiente, déjenme darles la definición de tangente que tienen que saberla. Se define función **tangente** de un ángulo α como: tg α = y/x o también: tg α = sen α/cos α. Nosotros no vamos a usar la tangente, pero por las dudas ténganlo. Ah ! Y también les dejo otras definiciones que tampoco vamos a usar, pero tenganlas anotadas

Cosec x = 1/ sen x, $\quad$ sec x = 1/cos x, $\quad$ cotg x = 1/ tg x.

Y también recuerden esta fórmula: $Sen^2\,x + Cos^2\,x = 1$

Vamos ahora a resolver unos ejercicos que fueron tomados en parciales. En el examen el ejercicio de trigonométricas suele ser el último (Nro 4)

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS - EJERCICIOS DE PARCIALES

4. Sea $f(x) = 5\cos(2x) + 1$. Determinar todos los $x \in [0;2\pi]$ que verifican $f(x) = -4$.

Tenemos la función f(x) = 5 cos (2x) + 1. Nos piden calcular los x para los que se cumple que f(x) = - 4.

$$5\cos(2x) + 1 = -4 \Rightarrow 5\cos(2x) = -5$$

$$\cos(2x) = -1$$

Llamemos z = 2 x

$$\Rightarrow \cos(z) = -1$$

De lo que conocemos de funciones trigonométricas esto ocurre cuando:

$$z = (2k + 1)\pi$$

$$2x = (2k + 1)\pi$$

$$2x = (2k + 1)\pi$$

$$\Rightarrow x = (2k + 1)\pi/2$$

Rta: f(x) = - 4 cuando x = (2k + 1) π/2

---

4) Sea $f(x) = 4\text{sen}(2x) - 3$. Determinar todos los $x \in [-\pi;\pi]$ tales que $f(x) = -1$.

Queremos ver cuándo se cumple que f(x) = - 1. Entonces planteamos:

$$4\,\text{sen}(2x) - 3 = -1 \quad \rightarrow \quad 4\,\text{sen}(2x) = -1 + 3 = 2$$

$$\text{sen}(2x) = {}^{2}/_{4} = {}^{1}/_{2}$$

¿ El seno de qué angulo vale $^{1}/_{2}$? Si lo hacemos con la calculadora, nos da π/6. Esto está bien, pero hay otro resultado que no aparece en la calculadora: 5π/6. Si querés, para ayudarte podés hacer la circunferencia trigonométrica. Entonces:

$$2x = {}^{1}/_{6}\,\pi + 2k\pi \quad \text{ó} \quad 2x = {}^{5}/_{6}\,\pi + 2k\pi$$
$$x = {}^{1}/_{12}\,\pi + k\pi \quad \text{ó} \quad x = {}^{5}/_{12}\,\pi + k\pi$$

Probamos dándole valores enteros a k.

- Si k = 0 → $x = {}^{1}/_{12}\,\pi$ ó $x = {}^{5}/_{12}\,\pi$ → son soluciones válidas
- Si k = 1 → $x = {}^{13}/_{12}\,\pi$ ó $x = {}^{17}/_{12}\,\pi$ → no pertenecen a (-π , π)
- Si k = -1 → $x = -{}^{11}/_{12}\,\pi$ ó $x = -{}^{7}/_{12}\,\pi$ → son soluciones válidas

Entonces, las soluciones válidas son: $^{11}/_{12}\,\pi$; $^{5}/_{12}\,\pi$; $-^{11}/_{12}\,\pi$; $-^{7}/_{12}\,\pi$

---

4. Hallar los ceros de la función $f(x)=2sen(x+\frac{\pi}{4})+1$ que pertenecen al intervalo $[0;2\pi]$.

Nos dan $f(x) = 2 \,.\, sen\,(x + \pi/4) + 1$. Tenemos que encontrar los ceros de esta función. Eso no es otra cosa que los valores de x para los que $f(x) = 0$. O sea hay que resolver esta ecuación:

$$f(x) = 2 \,.\, sen(x + \pi/4) + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad sen\,(x + \pi/4) = -\tfrac{1}{2}$$

¿ Cómo se resuelve esto ? Bueno, esta ecuación tiene infinitas soluciones, porque las funciones trigonométricas como el seno son periódicas, o sea que cada tanto se repiten. En este caso el período es 2π, o sea que si encontramos una solución y le sumamos 2π también es solución.
Tal vez te estás preguntando de donde saqué que el período es 2π. Bueno, en general el período de sen (A.x + B) se calcular como $2\pi/A$. Como en este caso $A = 1 \Rightarrow$ el período es 2π.

Ahora que sabemos cuánto es el período y podemos encontrar todas las soluciones sumando 2π a las que ya tenemos. Resolvamos esto en algún período que sea fácil, por ejemplo entre 0 y 2 pi (o sea entre 0 y 360°).

Ahora, ¿ El seno de qué ángulo vale $-\frac{1}{2}$? Hay dos: $sen\,(7\pi/6) = sen\,(11\,\pi/6) = -\frac{1}{2}$.
O sea que

$$x + \pi/4 = 7\pi/6 \quad \Rightarrow \quad x = 11\,\pi\,/\,12$$

$$x + \pi/4 = 11\pi/6 \quad \Rightarrow \quad x = 19\,\pi\,/\,12$$

Y listo, ahora con estas dos soluciones, podemos encontrar todas sumando múltiplos de 2π.

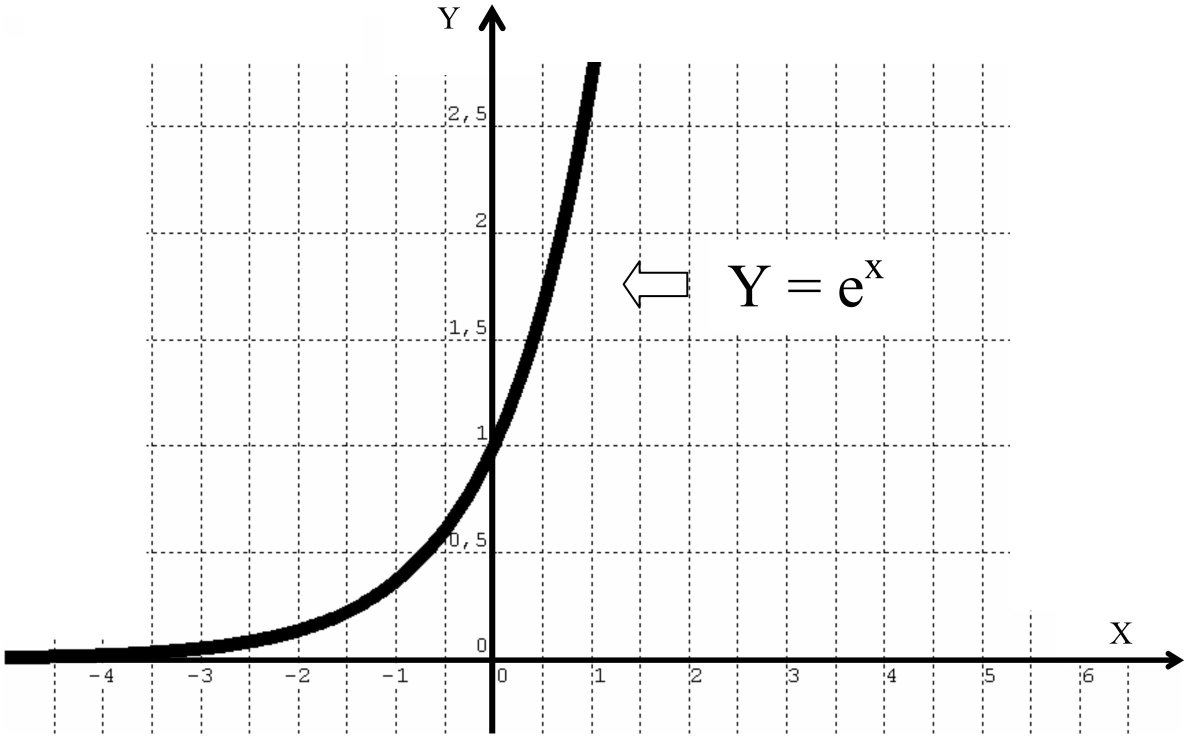
$$x = \{\ ...- 13\,\pi/12\ ;\ - 5\,\pi/12\ ;\ 11\,\pi/12\ ;\ 19\,\pi/12\ ;\ 35\,\pi/12\ ;\ 43\,\pi/12\ ;\ ...\ \}$$

Pero sólo nos piden las soluciones tales que $x \in [0,2\pi]$. Bueno, si nos fijamos, las únicas dos que están en ese intervalo son:

$$\mathbf{x = 11\,\pi\,/\,12 \quad ; \quad x = 19\,\pi\,/\,12}$$

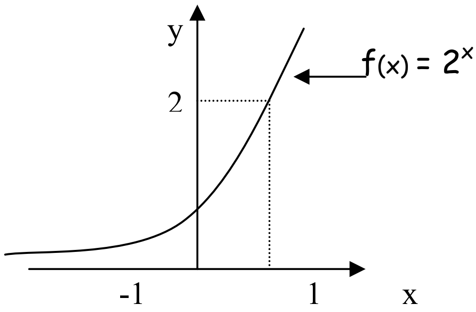
FIN FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

FUNCIONES EXPONENCIALES

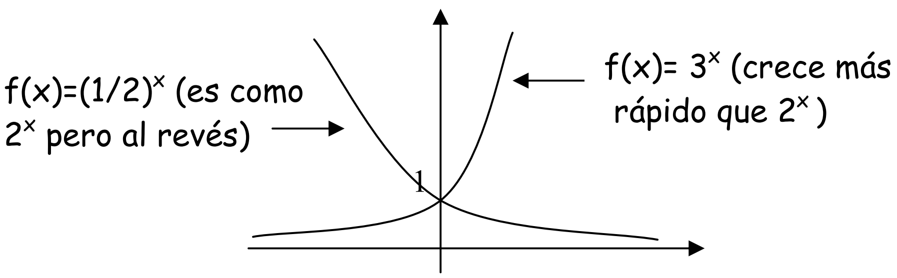


FUNCIONES EXPONENCIALES

Quiero que grafiquen la siguiente función: $f(x) = 2^x$. Pregunto: ¿ Es función ? Piensen. A ver ?, sí, es función. Den valores y grafiquen.



Grafiquemos ahora otras parecidas. Por ejemplo $(1/2)^x$ y 3^x:

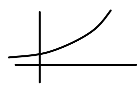


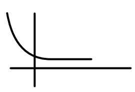
El dominio de este tipo de funciones son los reales y la imagen es $\mathbb{R} > 0$, es decir Im f = $(0, +\infty)$. Anoten entonces: Llamamos funciones exponenciales a las funciones que tienen la forma:

$$\boxed{F(x) = a^x}$$ ← FUNCIÓN EXPONENCIAL

Al número a se lo llama base y es positivo. Lo tomamos siempre positivo por que si tuviera que elevar a la ½ (es decir, sacar raíz cuadrada) NO podría hacerlo para valores negativos de a. (por ejemplo, $\sqrt{-2}$ NO EXISTE).

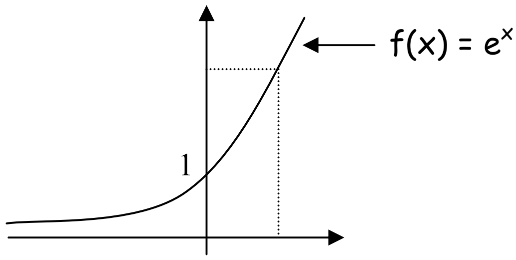
Suponemos también que $a \neq 1$ porque sino siempre me daría 1 ($1^3 = 1$; $1^4 = 1$; etc).

Fíjense que cuando la base a es mayor que 1, la curva da así 
Es decir, será siempre creciente.

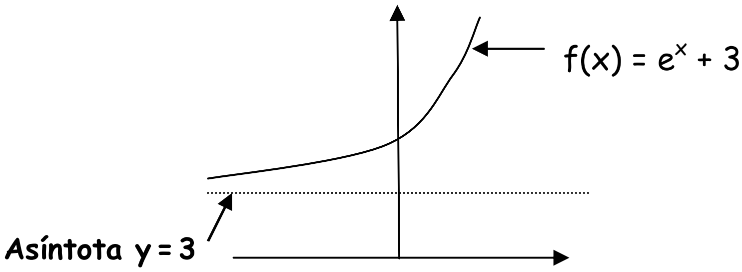
Si $a < 1$, la curva da al revés,  es decir, todo el tiempo es decreciente.

A su vez, cuanto más grande sea a, más rápido crecerá o decrecerá la función.
A veces van a ver que aparece la función e^x. El número e es un número irracional vale 2,7182..... etcétera.

No es importante que se acuerden cuánto vale e con 7 decimales. Es importante que sepan que entre 2 y 3, de manera que el gráfico de e^x va a dar así:

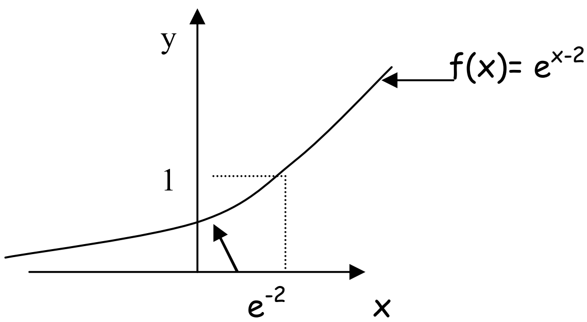


Vamos A graficar algunas funciones exponenciales, aplicando las cosas que ya vimos. A ver. Hagamos por ejemplo $f(x)= 3 + e^x$.



El dominio son todos los reales y la imagen serán los reales mayores que 3.
Es decir que Im f = $(3 , +\infty)$.
Piensen: ¿Es biyectiva esta función ? ¿ Es o no es ? Si, es biyectiva.

Grafiquemos ahora e^{x-2}. Eso queda $e^x\ e^{-2}$. ¿ Qué pasa ? e^{-2} es un número, de manera que es como si tuviera la función ke^x. Da así:



No corta en 1 porque el número e^{-2} ($e^{-2} = 1/e^2$) vale 0,36... Las funciones exponenciales tienen siempre la forma a^x. Todas las funciones exponenciales de este tipo cortan al eje vertical en 1. Eso es por que a^0 siempre es 1. A ver esto:
¿ Qué les parece ? ¿ Son biyectivas las funciones exponenciales ? Bueno, así como están, no. Tengo que redefinir el codominio. Es decir, para poder tener la inversa de una función exponencial voy a tener que tomarla de $\mathbb{R} \to \mathbb{R} > 0$

FUNCIÓN LOGARITMO

¿ La función exponencial qué hace ? Supongamos que tengo 2^x. Yo le doy el exponente y ella me da el resultado. Lo que estoy buscando es una función tal que si yo le doy el resultado, ella me de el exponente. Esta función inversa se llama

LOGARITMO.

La función logaritmo va de $\mathbb{R} > 0 \rightarrow \mathbb{R}$. Es decir, para 2^x tengo lo siguiente:

$$\text{Si } 2 = 2^x \Rightarrow x = 1$$

$$\text{Si } 4 = 2^x \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Si } 1/8 = 2^x \Rightarrow x = -3.$$

Entonces, mis incógnitas son los exponentes. La función inversa de 2^x será $\log_2 x$. (se lee: logaritmo en base dos de x).

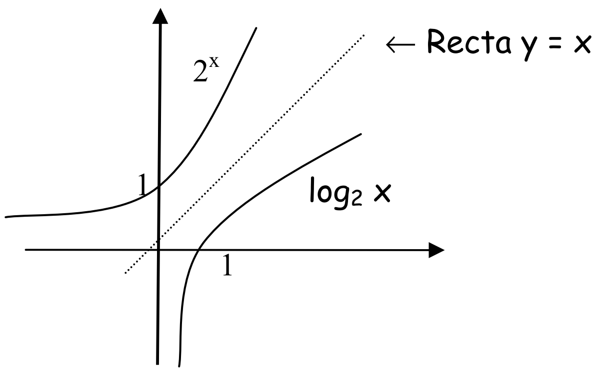
$$F(x) = 2^x \rightarrow F^{-1}(x) = \log_2 x$$

$$\text{Con } \mathbf{f^{-1}(x)}\text{:}\ \mathbb{R} > \mathbf{0} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Fíjense que sólo puedo sacar logaritmo de números positivos. Eso pasa porque el dominio de la función logaritmo son sólo los reales positivos. Es decir, no puedo hacer la cuenta $\log_2(-3)$. (Por ejemplo). Eso es razonable. ¿ A qué número tengo que elevar el 2 para que me de –3 ? Claro, no existe.

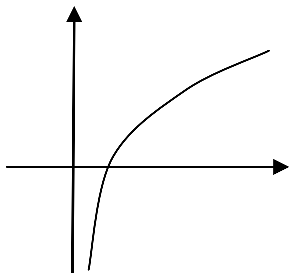
Grafiquemos ahora la función logaritmo. Sabemos que es la inversa de la exponencial.

¿ sí?. Eso quiere decir que será simétrica respecto de la recta y = x. Hagámoslo.



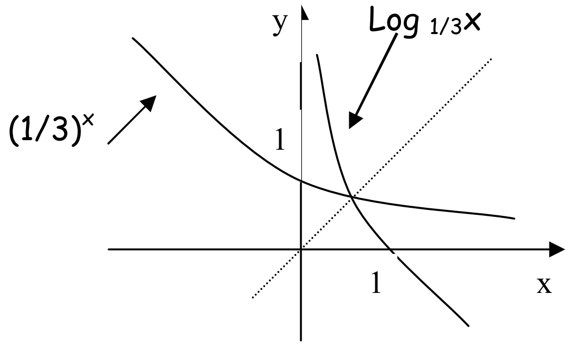
Quiero que vean que el eje vertical es una asíntota de la función logaritmo.

Todas las funciones logaritmo en donde la base a sea mayor que 1 van a dar así:



← representación de la función $\log_a x$ con base $a > 1$

¿ Qué pasa ahora si la base a es menor que 1 ? Bueno, va a dar al revés.
¿ Cómo eran las exponenciales cuya base a era menor que 1 ? Grafiquemos una exponencial con $a < 1$ y grafiquemos la función inversa.



En el parcial solemos tomar 4 ejercicios. Dos de esos suelen ser muy - muy parecidos a los de la guía. También a veces tomamos problemas. Miren los problemas que hay en la guía.

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Ahora quiero que vean algunas propiedades del logaritmo: Supongamos que me piden calcular el $\log_a (a^x)$ ¿ Cuánto me va a dar esto?
Bueno, piénsenlo. Tengo que elevar a a la x para obtener a^x. Eso es razonable, por que en realidad estoy componiendo un función con su inversa. Al componer $f(x)$ con $f^{-1}(x)$ siempre obtengo x. Es decir:

$$\log_a (a^x) = x$$

También hay otra propiedad que quiero que vean:

$$a^{(\log_a x)} = x$$

Esto sépanlo. No hace falta ver ahora la demostración. Hay algunos ejercicios de la guía en los que se aplica esto. Vamos a ver qué pasa con el producto y la división. Si tengo dos números x e y se cumple que:

$$\text{Log}_a (x.y) = \log_a (x) + \log_a (y)$$

$$\mathbf{Log_a\,(x/y) = log_a\,(x) - log_a\,(y)}$$

Vamos a la potenciación: Si me dan x elevado a la r y tomo logaritmo, me queda:

$$\mathbf{Log_a\,(x^r) = r.log_a\,x}$$

Por ejemplo:

$$Log_a(2.3) = Log_a(2) + Log_a(3)$$

$$Log_a(2/3) = Log_a(2) - Log_a(3)$$

$$Log_a(2^3) = 3.\,Log_a(2)$$

LOGARITMO NATURAL O NEPERIANO (ln)

La calculadora trabaja en base 10 o en base e. Los logaritmos en base e se llaman logaritmos naturales o neperianos. e era ese número 2,7182....

¿se acuerdan?. Vamos a ver cómo se cambia de base. Les voy a dar la fórmula:

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$ ← Fórmula para el cambio de base

Por ejemplo. Supongamos que queremos calcular el $\log_2 3$ con la calculadora. Para eso hago la cuenta:

$$\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} = 1.58...$$

Eso quiere decir que si elevo 2 a la 1,58... voy a obtener 3. Usando la calculadora que trabaja con logaritmos en base 10 puedo conocer el logaritmo en base 2 de 3. Una cosa. Cada vez que usamos logaritmo en base 10 no ponemos la base. Es decir, no se pone $\log_{10} 2$. Se pone log 2. Ya se sobreentiende que es en base 10. Cuando use logaritmos en base e uso la abreviatura ln (logaritmo natural).

Ahora quiero que vean algunos ejemplos:

EJERCICIO: **Calcular los siguientes logaritmos.**

1) $\log_3(\log_3(1/27))$.

Hago: $\log_3(\log_3(1/27)) = \log_3(\log_3 1 - \log_3 27)$

Para hacer esto apliqué logaritmo de un cociente. Me queda:

$= \log_3(0 - 3) = \log_3(-3) =$ NO EXISTE !

No existe por que no existen los logaritmos de números negativos.

2) $Log_2 (log_3\ 3^5)$

$$Log_2 (log_3\ 3^5) = log_2 (\ 5\ log_3\ 3\ )=$$

$$log_2\ 5 = log\ 5/log\ 2 = 2,32$$

3) $4^{(\ log_2 9\ )}$

$$4^{(\ log_2 9\ )} = (2^2)^{\ log_2 9} = 2^{2\ log_2 9} = 2^{\ log_2 (\ 81\ )} = 81.$$

Acá apliqué la propiedad que decía que $\mathbf{a^{(\ log_a x\ )} = x}$.

Ahora ¿ podría haber resuelto esto haciendo cuentas con la calculadora ? Si, como poder podría. Pero nosotros preferimos que lo hagan aplicando las propiedades.

4) $log_\pi\ 1$

¿Y este cómo se hace? Hay que pensar un poco. Bueno, a qué número tengo que elevar a π para que me de 1? Y claro, a la cero. Cualquier número elevado a la cero me da uno. Entonces:

$$log_\pi\ 1 = 0$$

Vamos a hacer algunos ejercicios de funciones exponenciales y logarítmicas

<u>EJEMPLO</u>:

El capital depositado en un banco aumenta de acuerdo con la siguiente función $A_{(x)} = P.\ e^{rx}$

P es el capital puesto inicialmente. r es el interés anual, x es el tiempo transcurrido y A(x) es el dinero que uno recibe después de ese tiempo.

a) Supongamos que me dice que deposito $ 100 al 4 % anual y quiero saber cuánta plata después de dos años. Entonces tengo que hacer esta cuenta:

$$A_{(\ 2\ años)} = 100\ .\ e^{0.04.2} = 108,32$$

$\Rightarrow A_{(2\ años)} = \$\ 108,32$ $\leftarrow$ **dinero que uno recibe después de dos años**.

b) Me piden qué plata inicial tendría que depositar para tener $ 100 después de 2 años (también suponiendo r = 4/100). Entonces:

$$100 = P\ .e^{0.04.2}$$

$$\Rightarrow\ 100\ = P.\ 1,08$$

$\Rightarrow\ P\ = 92,31$ $\leftarrow$**dinero que hay que depositar inicialmente**

c) Ahora piensen esto. Supongamos que me piden calcular cuánto tiempo tiene que pasar para que el monto inicial se triplique. Acá hay que usar logaritmos.

Fíjense. Planteo esto: si inicialmente deposito un capital P, después tantos años tendré un capital de 3 P.

No hace falta trabajar con cifras como $ 100 y $ 300. Yo pongo P y 3 P. Entonces:

$$3\ P = P.\ e^{rx}$$

$$\Rightarrow 3 = e^{0,04\ x}$$

¿Qué hago ahora? ¿Cómo despejo x?. Y bueno, justamente. Me piden que calcule el exponente. ¿Cómo se hace eso? Rta.: con la función logaritmo.
Fíjense. Tomo logaritmo a ambos lados de la igualdad:

$$\text{Ln } 3 = \ln e^{0,04\ .x}$$

$$\Rightarrow \ln 3 = 0,04\ .\ x.\ \ln e$$

$$\Rightarrow \ln 3 = 0,04\ .\ x\ \ 1$$

$$\Rightarrow x = \ln 3/0,04$$

$\Rightarrow$ **x = 27,46 años** $\leftarrow$ **Tiempo que hay que depositar la plata para que el capital se triplique**

FUNCIONES EXPONENCIALES - EJERCICIOS DE PARCIALES

4. Sea $f(x) = -2 + e^{x-3}$. Calcular $f^{-1}(x)$, Dom f^{-1} e Im f^{-1}

$f(x) = -2 + e^{x-3}$. Para calcular la inversa, despejamos la x

$$f(x) = y = -2 + e^{x-3}$$

$$e^{x-3} = y + 2$$

$$\rightarrow \quad x - 3 = \ln (y + 2)$$

$$x = \ln (y + 2) + 3 \quad \rightarrow \text{ cambiamos y por x y x por } f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) = 3 + \ln (x + 2)$$

Es una función logarítmica. Entonces, para calcular el dominio y la imagen hay que tener en cuenta un par de cosas:

- Dominio: el logaritmo se puede aplicar solamente a números positivos:

$x + 2 > 0 \rightarrow x > -2 \quad \rightarrow$ **Dominio $f^{-1}(x) = (-2\ ;\ +\infty)$**

- Imagen: Como toda función logarítmica, su imagen es todos los reales.
Imagen $f^{-1}(x) = R = (-\infty\ ;\ +\infty)$

---

4. Sea $f(x)=2-\ln(3x+5)$. Hallar el dominio de f y calcular $f^{-1}(x)$.

Tenemos la función f(x) = 2 – ln (3x + 5). Para calcular el dominio hay que ver para qué valores de x esta cuenta se puede hacer y para cuáles no. El problema en este caso es que no se puede calcular el logarítmo cuando (3x + 5) < 0. Tenemos que pedir que todo esto sea positivo

$$(3x + 5) > 0 \Rightarrow x > -5/3.$$

El **Dominio de f(x)** es el intervalo **(-5/3 ; +∞)**

Ahora bien, tenemos que calcular la función inversa de f(x) o sea, haciendo uso de la notación $f^{-1}(x)$.

$$y = f(x) = 2 - \ln(3x + 5)$$

Despejando x en función de y:

$$y = 2 - \ln(3x + 5)$$

$$\Rightarrow y - 2 = -\ln(3x + 5)$$

$$\Rightarrow -y + 2 = \ln(3x + 5)$$

$$\Rightarrow e^{(-y+2)} = 3x + 5$$

Finalmente llegamos a que:

$$\Rightarrow 1/3\,[\,e^{(-y+2)} - 5\,] = x$$

Por lo tanto,

$$f^{-1}(y) = 1/3\,[\,e^{(-y+2)} - 5\,]$$

Expresando f^{-1} en función de x:

$$f^{-1}(x) = 1/3\,[\,e^{(-x+2)} - 5\,]$$

4.- Sean $f(x) = 7x + 3$; $g(x) = \ln(x)$ y $h(x) = g \circ f(x)$. Hallar dominio, ceros y conjuntos de positividad y de negatividad de la función h.

Tenemos $f(x)=7x+3$ y $g(x)=\ln x$. Calcular $g \circ f$ (x) equivale a calcular g(f(x)).

Esto es: $g(f(x)) = g(7x+3) = \ln(7x+3) = h(x)$

El dominio de la función h(x) se obtiene considerando que el argumento del logaritmo debe ser estrictamente mayor a cero: $7x+3>0$

$$\Rightarrow \quad x > -\frac{3}{7}.$$

Luego tenemos: $Domh\left(x\right)=\left(-\frac{3}{7},+\infty\right)$

- Ahora buscamos los ceros de h(x) :

$h\left(x\right)=\ln\left(7x+3\right)=0$ $\Rightarrow$ Tomo la exponencial a ambos lados porque se trata de una función creciente: $e^{\ln\left(7x+3\right)}=e^{0}$

Entonces tenemos: $7x+3=1$ $\Rightarrow$ $x=-\frac{2}{7}$

- Ahora vemos los intervalos de positividad:

$h\left(x\right)=\ln\left(7x+3\right)>0$ $\Rightarrow$ volviendo a tomar exponencial a ambos lados, llegamos a

$$7x+3>1 \quad \Rightarrow \quad x>-\frac{2}{7}$$

- Para el conjunto de negatividad:

$$h\left(x\right)=\ln\left(7x+3\right)<0 \quad \Rightarrow \quad 7x+3<1 \quad \Rightarrow \quad x<-\frac{2}{7}$$

Conclusión:

$Domh\left(x\right)=\left(-\frac{3}{7},+\infty\right)$

Ceros de h (x): $x=-\frac{2}{7}$

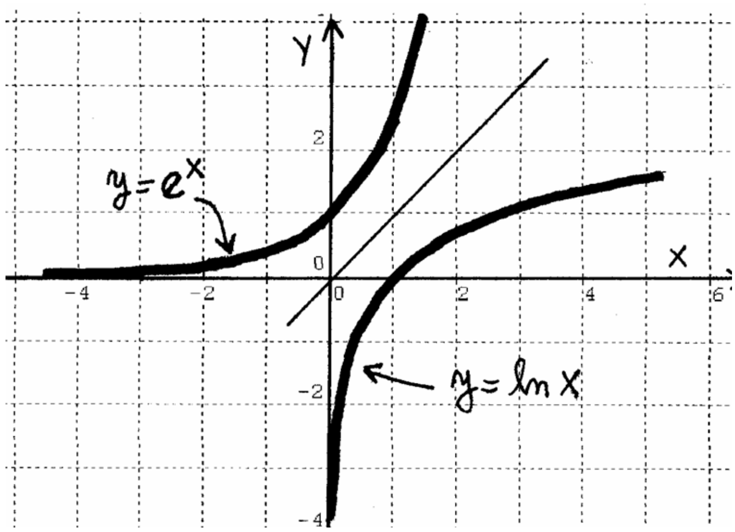
Intervalo de positividad: $\left(-\frac{2}{7},+\infty\right)$

Intervalo de negatividad: $\left(-\frac{3}{7},-\frac{2}{7}\right)$

FIN FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARITMICAS

¿ Ves algo en este libro que no está bien explicado ?
¿ Encontraste algún error ?
¿ La notación que usé yo no es la que usa la cátedra ?
Mandame un mail y lo corrijo.

www.asimov.com.ar



Podés bajar temas viejos de parciales y finales de www.asimov.com.ar

ÍNDICE

MATEMÁTICA CERO

FUNCIONES

FUNCIONES CUADRÁTICAS

CONTINUIDAD - POLINOMIOS

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

FUNCIÓN INVERSA - ASINTOTAS

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

OTROS APUNTES ASIMOV

*** EJERCICIOS RESUELTOS DE LA GUIA**
Son los ejercicios de la guía resueltos y explicados.

*** PARCIALES RESUELTOS**
Son exámenes que fueron tomados el año pasado. Todos los ejercicios están explicados También hay parciales resueltos de años anteriores.

*** FINALES RESUELTOS**
Son exámenes que fueron tomados el año pasado. También hay finales resueltos de años anteriores. Todos los ejercicios están resueltos

*** OTROS LIBROS DE ASIMOV:**

*** QUÍMICA PARA EL CBC**

*** FISICA PARA EL CBC**

*** BIOFISICA PARA EL CBC**

Tienen lo que se da en clase pero hablado en castellano.