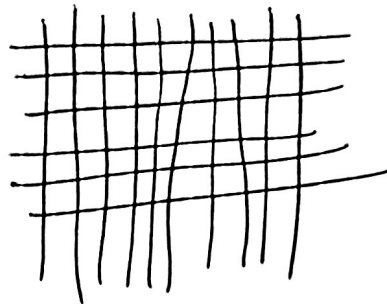


Explicación coordenadas polares

¿Qué son las coordenadas polares?

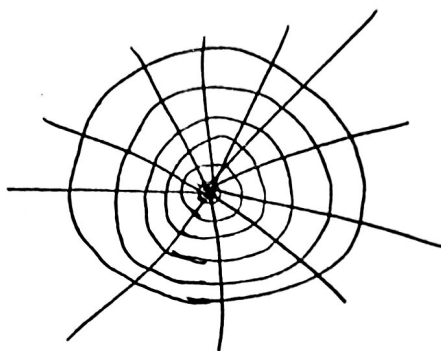
Al igual que las coordenadas cartesianas estas sirven para describir un espacio.

Cartesianas:



(supongamos que son líneas rectas).

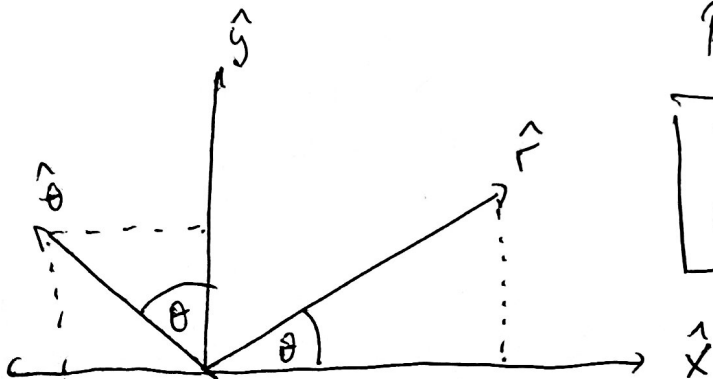
polares:



(supongamos que son circunferencias)

La idea de las polares es describir de forma más simple ciertos tipos de problemas (veremos ejemplos después)

¿Cómo se definen?



Por descomposición de vectores

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \\ \hat{\theta} &= -\hat{x} \sin \theta + \hat{y} \cos \theta.\end{aligned}$$

La intuición que debemos tener al trabajar con estas coordenadas es que ahora la posición de una partícula sola la representaremos con ~~la~~ el vector $\vec{r}$, a diferencia a Cartesianas donde la posición la representamos generalmente como $\vec{r} = A\hat{x} + B\hat{y}$. (polares: $\vec{r} = r\hat{r}$).

(*) deducción de coordenadas polares para velocidad y aceleración.

~~Aunque~~ $\vec{r} = r\hat{r}$ (posición)

Sabemos por definición que $\frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{v}$.

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\hat{r}) = \frac{d}{dt}(r) \cdot \hat{r} + r \frac{d}{dt}(\hat{r}) = \dot{r}\hat{r} + r \frac{d}{dt}(\hat{r})$$

$$= \dot{r}\hat{r} + r \frac{d}{dt}(\hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta). \quad \text{Diremos que } \frac{d}{dt}\hat{x} = 0 = \frac{d}{dt}\hat{y}$$

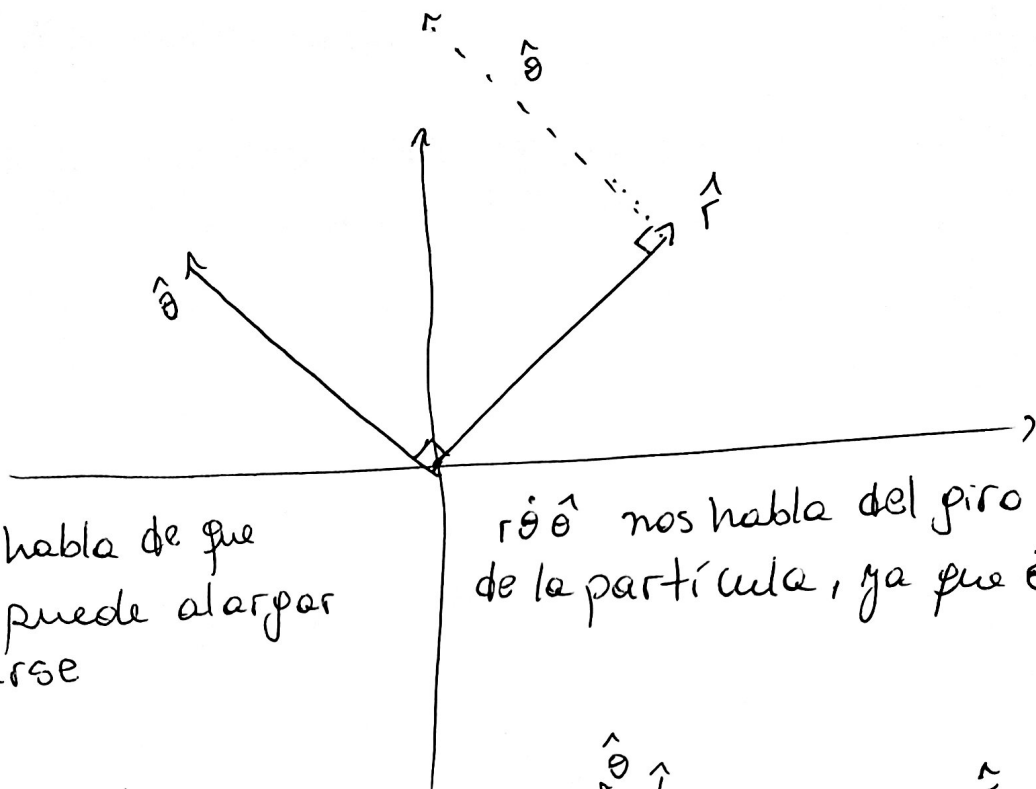
$$= \dot{r}\hat{r} + r \cdot (-\sin\theta \cdot \dot{\theta}\hat{x} + \cos\theta \cdot \dot{\theta}\hat{y})$$

$$= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}(-\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta) ; \quad \text{pero } \hat{\theta} = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}}$$

Analicemos esta expresión; Podemos apreciar que la velocidad tiene componentes en $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$

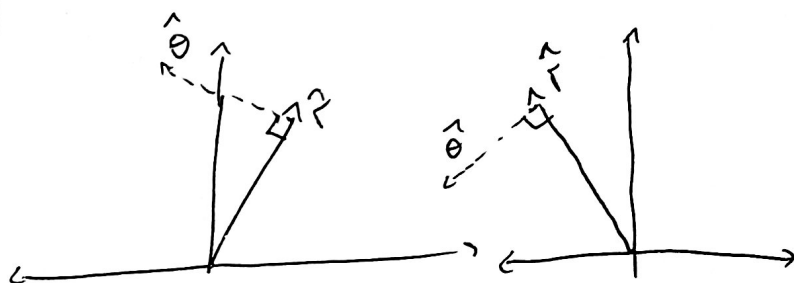
¿Que significa esto?: En $\hat{r}$ vemos que tenemos $\dot{r}$, lo cual tiene sentido ya que la partícula se puede alejar o acercar al origen (teniendo en cuenta que la velocidad es el cambio de posición). En $\hat{\theta}$ tenemos $r\dot{\theta}$ y podemos ver que esto es en realidad ωr , lo cual nos habla de una rapidez angular, y nos hace aún más sentido que esto vaya en $\hat{\theta}$. Veremos una figura.



$\dot{r}\hat{r}$ nos habla de que el vector puede alargarse o acortarse

$r\dot{\theta}\hat{\theta}$ nos habla del giro de la partícula, ya que $\hat{\theta} \perp \hat{r}$.

después de un tiempo t

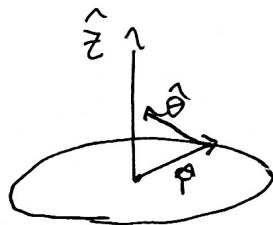


De esta manera, observamos que las coordenadas polares describen de forma completa el movimiento de una partícula.

Se dejará propuesto ver que

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \vec{v} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}.$$

Ya introducidas las coordenadas polares, podemos introducir las coordenadas esféricas añadiendo el eje $\hat{z}$, que añade la noción de altura:



$$\boxed{\hat{z} \perp \hat{\theta} \perp \hat{r}}$$

Analogía entre coordenadas:

La idea es que no encuentren las coordenadas polares como algo distinto a lo que han estado haciendo: sea que en cartesianas la cinemática pueda definirse como:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z} = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

Luego ocupando $\Sigma F = m \cdot a$, vectorialmente se obtiene:

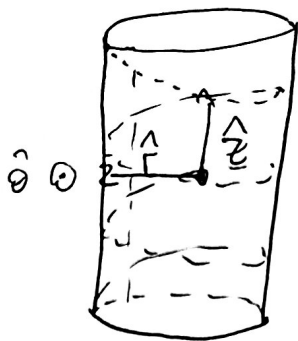
$$\left. \begin{array}{l} \hat{x}) \Sigma F_x = m \cdot a_x \\ \hat{y}) \Sigma F_y = m \cdot a_y \\ \hat{z}) \Sigma F_z = m \cdot a_z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \Sigma F_x = m \cdot \ddot{x} = m \cdot a_x \\ \vdots \\ \Sigma F_z = m \cdot \ddot{z} = m \cdot a_z \end{array}$$

En polares es lo mismo (en este caso cartesianas para tener una tridimensionalidad).

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$$

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \hat{r}) \Sigma F_r = m \cdot a_r = m \cdot (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \hat{\theta}) \Sigma F_\theta = m \cdot a_\theta = m \cdot (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \\ \hat{z}) \Sigma F_z = m \cdot a_z = m \cdot \ddot{z} \end{array} \right\}$$

Ejemplo 1:



Explicación:

Se tiene una partícula que desciende por la pared del cilindro (siempre pegada) de radio 'R'

¿Cómo estudiamos este problema?

Aplicando coordenadas polares:

Cinemática:

$$\vec{r} = R\hat{r} + z\hat{z}$$
$$\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} \quad (\text{notando que } R \text{ es constante} \Rightarrow \dot{R} = 0)$$
$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z}$$

Dinámica: DCL



⊗ quiere decir que la fuerza va hacia adentro

Ec. movimiento:

$$\begin{array}{l|l} \hat{r} & -N = m \cdot (-R\dot{\theta}^2) \\ \hat{\theta} & 0 = R\ddot{\theta} \\ \hat{z} & -mg = m \cdot \ddot{z} \end{array}$$

(*) -N porque $\vec{N}$ va en sentido contrario a $\hat{r}$.

(*) No existen fuerzas en $\hat{\theta}$.

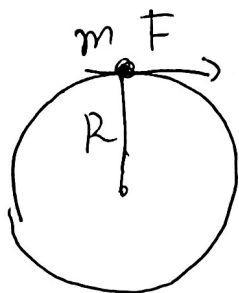
Conclusiones: $N = m \cdot R \cdot \dot{\theta}^2$; $\ddot{\theta} = 0$; $-g = \ddot{z} = az$.

Podemos decir que las ecuaciones de movimiento son independientes de las coordenadas que escojamos.

$$\boxed{N = mR \cdot \omega^2}$$

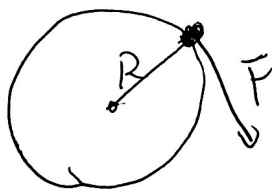
→ $mR\omega^2$ es la fuerza centrípeta y N es la única fuerza que actúa hacia adentro

Ejemplo 2



Tenemos una fuerza que es ejercida sobre una partícula (masa 'm') pegada al carril de radio R y siempre es perpendicular a la posición de la partícula. (No hay gravedad)

t después



La partícula está amarrada al centro.

Cinemática

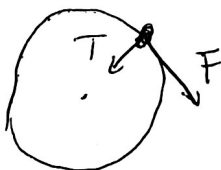
$$\vec{r} = R \cdot \hat{r}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta} \hat{\theta}$$

$$\vec{a} = (-R\dot{\theta}^2)\hat{r} + R\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

Dinámica

DCL



$$\left. \begin{array}{l} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{array} \right\} \begin{array}{l} -T = -mR\dot{\theta}^2 \\ F = mR\ddot{\theta} \end{array} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} T = mR\dot{\theta}^2 \\ F = mR\ddot{\theta} \end{array}}$$