

### Guía 3: Relaciones

1. Demuestre o refute la siguiente afirmación: “Si  $R$  es una relación simétrica y transitiva entonces también es refleja”.
2. Dé un ejemplo de relaciones que sean
  - a) simétrica y refleja pero no transitiva.
  - b) refleja y transitiva pero no simétrica.
  - c) simétrica y transitiva pero no refleja.
3.  $\phi$  es una relación (ya que es subconjunto de cualquier conjunto). ¿Qué propiedades cumple  $\phi$  como relación?  
(Ayuda: Sin pérdida de generalidad, puede suponer que  $\phi$  es una relación sobre un conjunto finito)
4. Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos.
  - a) ¿Cuántas relaciones reflejas se pueden crear con elementos de  $A$ ?
  - b) ¿Cuántas relaciones simétricas se pueden crear con elementos de  $A$ ?
  - c) ¿Cuántas relaciones antisimétricas se pueden crear con elementos de  $A$ ?
5. Sea  $A$  un conjunto con  $n$  elementos y  $R$  una relación antisimétrica sobre  $A$ .
  - a) ¿Cuál es la máxima cantidad de pares ordenados que puede contener  $R$ ?
  - b) ¿Cuántas relaciones antisimétricas distintas sobre  $A$  tienen exactamente esa cantidad de pares?
6. Para cada una de las siguientes relaciones determine si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva, demostrando o dando un contraejemplo en cada caso.
  - a)  $R_{//}$  sobre el conjunto de todas las rectas de  $\mathbb{R}^2$ , tales que la recta  $l_1$  está relacionada con la recta  $l_2$  si y sólo si  $l_1$  es paralela a  $l_2$  ( $l_1 R_{//} l_2 \Leftrightarrow l_1 // l_2$ ).
  - b)  $R_{\perp}$  sobre el conjunto de todas las rectas de  $\mathbb{R}^2$ , tales que la recta  $l_1$  está relacionada con la recta  $l_2$  si y sólo si  $l_1$  es perpendicular a  $l_2$  ( $l_1 R_{\perp} l_2 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$ ).
  - c)  $R$  sobre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tal que  $(a, b)R(c, d)$  si y sólo si  $a \leq c$ . (Note que en este último caso la relación  $R$  es subconjunto de  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ .)
  - d)  $R$  sobre  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  tal que  $(a, b)R(c, d)$  si y sólo si ocurre que  $a < b$ , o que  $a = b$  y  $c \leq d$ .
7. ¿Qué puede decir de la relación  $R_{//} \circ R_{\perp}$  (la composición de las relaciones  $R_{//}$  y  $R_{\perp}$  definidas en el ejercicio anterior), qué propiedades cumple, cómo se compara con  $R_{//}$  y con  $R_{\perp}$ , etc.?
8. Sea  $f : A \rightarrow B$  una función cualquiera de  $A$  en  $B$ . Sea  $R$  una relación sobre  $A$  tal que  $xRy$  si y sólo si  $f(x) = f(y)$ . Demuestre que  $R$  es refleja, simétrica y transitiva.
9. Demuestre o refute (de un contraejemplo) cada una de las siguiente afirmaciones. En cada caso  $R_1$  y  $R_2$  son relaciones sobre un conjunto  $A$  cualquiera.
  - a) Si  $R_1$  y  $R_2$  son simétricas entonces  $R_1 \cap R_2$  es simétrica.
  - b) Si  $R_1$  y  $R_2$  son reflejas entonces  $R_1 \cup R_2$  es refleja.
  - c) Si  $R_1$  y  $R_2$  son transitivas entonces  $R_1 \cap R_2$  es transitiva.
  - d) Si  $R_1$  y  $R_2$  son transitivas entonces  $R_1 \circ R_2$  es transitiva.