



Auxiliar 11

Martes 20 de Junio, 2017

P1 Sean $a_1, \dots, a_n$ números enteros positivos. Demuestre que existe una subsecuencia de ellos (es decir un subconjunto con índices consecutivos) que tiene suma divisible por n . Para esto considere $b_i = a_1 + \dots + a_i$.

P2 Demuestre que existen infinitos primos p tales que $p + 2$ no es primo.

P3 Considere la función $f(x) = (x \pmod 3, x \pmod 5)$. Note que $f(13) = (1, 3)$. Este hecho nos parece extremadamente curioso por lo tanto vamos a explorar el problema:

- a) Compruebe que $(10u+6v) \pmod 3 = u \pmod 3$ y $(10u+6v) \pmod 5 = v \pmod 5$
- b) Use lo anterior para encontrar todos los números de 2 dígitos $10a + b$ que cumplen $f(10a + b) = (a, b)$. Aproveche que $x \pmod n = [x \pmod{nm}] \pmod n$
- c) Para poder resolver este problema la parte a) fue fundamental pero no vimos claramente de donde salió, ahora para generalizar el problema veamos cómo encontrar ecuaciones de esta forma:

$$ku + lv \pmod{p_1} = u \pmod{p_1} \text{ y } ku + lv \pmod{p_2} = v \pmod{p_2},$$

Para p_1, p_2 primos distintos.

P4 Grafos. Demuestre las siguientes propiedades:

- a) $\chi(G) \geq \omega(G)$
- b) $\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n$
- c) Si $C = x_1, x_2, \dots, x_n, x_1$ es ciclo de tamaño máximo, entonces para todo $v \notin C$, para $j \in \{1, \dots, n-1\}$ se tiene que v no es vecino de x_j o de x_{j+1} .
- d) Sea C como en la parte anterior. Si x_i y x_k son vecinos, entonces para cualquier $v \notin C$ se cumple que v no es vecino de x_{j+1} o no es vecino de x_{k+1} .

$\chi(G)$:= Tamaño del coloreo mínimo de G .

$\alpha(G)$:= Tamaño del independiente máximo de G .

$\omega(G)$:= Tamaño del clique máximo de G .

$\tau(G)$:= Tamaño mínimo de un vertex cover.