CC3101 — Matemáticas Discretas para Computación

Soluciones Examen

28 de diciembre de 2016

Dispone de 3 horas para resolver el examen.
Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre en cada hoja de respuesta.
Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.
Todos los grafos se consideran simples a menos que se explicite lo contrario.

1. El conjunto de árboles binarios sobre los números naturales, denotado por $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$, se define recursivamente de la siguiente forma:

   - si $k \in \mathbb{N}$ entonces $\mathtt{<}k\mathtt{>} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.
   - si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ y $k \in \mathbb{N}$, entonces $\mathtt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \mathtt{]} \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.

   Cuando un árbol binario T es de la forma $\mathtt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \mathtt{]}$, a k se le llama el *valor de la raíz* de T, a T_1 se le llama *sub-árbol izquierdo* de T y a T_2 *sub-árbol derecho*. Las siguientes preguntas tienen que ver con el conjunto $\mathcal{T}_{\mathbb{N}}$.

   a) Un árbol binario T es un *árbol binario de búsqueda* si el valor de la raíz es mayor o igual que todos los valores en el sub-árbol izquierdo y menor o igual que todos los valores en el sub-árbol derecho. Defina por inducción estructural el conjunto $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ de los árboles binarios de búsqueda. Para su definición puede que necesite otras definiciones intermedias (también definidas por inducción estructural).

   b) Sea $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ el conjunto de los árboles binarios de búsqueda definidos en la pregunta anterior. Defina por inducción estructural la función *Ordenar* : $\mathcal{B}_{\mathbb{N}} \to \mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ que dado un árbol binario de búsqueda T genera una lista de naturales con todos los valores de T ordenados de menor a mayor. Puede usar la operación de concatenación ($\circ$) de listas si lo necesita.

   Solución:

   a) Lo más fácil para esta pregunta es primero definir el máximo (*Max*) y mínimo (*Min*) valor en un árbol binario lo que se puede hacer por inducción estructural de la siguiente forma:

   - $\mathit{Max}(\mathtt{<}k\mathtt{>}) = k,\ \mathit{Max}(\mathtt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \mathtt{]}) = \max\{k, \mathit{Max}(T_1), \mathit{Max}(T_2)\}$
   - $\mathit{Min}(\mathtt{<}k\mathtt{>}) = k,\ \mathit{Min}(\mathtt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \mathtt{]}) = \min\{k, \mathit{Min}(T_1), \mathit{Min}(T_2)\}$

   Con estas dos definiciones es muy simple definir el conjunto $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$ de la siguiente forma:

   - si $k \in \mathbb{N}$ entonces $\mathtt{<}k\mathtt{>} \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$.
   - si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, y $\mathit{Max}(T_1) \leq k \leq \mathit{Min}(T_2)$ entonces $\mathtt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \mathtt{]} \in \mathcal{B}_{\mathbb{N}}$.

   b) La lista se puede construir muy fácilmente a partir de la propiedades de $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$. La definición de la función es la siguiente:

   - $\mathit{Ordenar}(\mathtt{<}k\mathtt{>}) =\rightarrow k$, para $k \in \mathbb{N}$
   - $\mathit{Ordenar}(\mathtt{[}\ k\ T_1\ T_2\ \mathtt{]}) = \mathit{Ordenar}(T_1) \circ (\rightarrow k) \circ \mathit{Ordenar}(T_2)$.

   Puntos: 3 puntos por cada parte. En la parte (a) si se siguió la estrategia descrita es 1.5 puntos por las definiciones auxiliares y 1.5 por la definición de árbol binario de búsqueda. En la parte (b) es un punto por el caso base y dos puntos por el caso inductivo.

2. Considere la clase $\mathcal{C}$ de grafos conexos con exactamente 8 nodos. Suponga que se usa una relación binaria (simétrica) $E(x, y)$ para representar que en un grafo existe una arista entre el nodo x y el nodo y. Escriba fórmulas en lógica de primer orden usando la relación E que expresen cada una de las siguientes propiedades sobre los grafos de la clase $\mathcal{C}$.

   a) El grafo es Euleriano.

   b) El grafo es Hamiltoniano.

   c) El grafo es un árbol.

   En cada caso explique la idea de lo que su fórmula está representando. Puede usar la igualdad (=) en sus fórmulas.

   Solución:

   a) Para chequear que el grafo es Euleraiano, dado que la clase de grafos es conexo y tiene exactamente 8 nodos, basta con chequear que cada vértice tiene exactamente 2, 4, o 6 vecinos (cada uno debe tener una cantidad par de vecinos para ser Euleriano y no pueden tener ni 0 ni 8 vecinos). Para esto usaremos una formula auxiliar $\varphi_k(u)$ que indica que u tiene exactamente k vecinos y que está definida como sigue:

   $$\exists x_1 \cdots \exists x_k \left(\bigwedge_{1 \leq i \leq k} E(u, x_i) \wedge \bigwedge_{1 \leq i,j \leq k, i \neq j} \neg(x_i = x_j) \wedge \left(\exists y (E(u, y) \rightarrow \bigvee_{1 \leq i \leq k} y = x_i \right) \right).$$

   La fórmula dice que hay k nodos vecinos de u, que todos esos nodos son distintos entre si, y que si existiera otro vecino de u entonces sería uno de esos k. Por lo tanto la fórmula exige que u tenga exactamente k vecinos. La fórmula final pedida es entonces

   $$\forall u (\varphi_2(u) \vee \varphi_4(u) \vee \varphi_6(u)).$$

   b) Para expresar que el grafo es Hamiltoniano, simplemente chequeamos la existencia del ciclo en cuestión. Esto es fácil de chequear pues solo hay 8 nodos. La siguiente fórmula hace el trabajo.

   $$\exists x_1 \cdots \exists x_8 \left(E(x_1, x_2) \wedge E(x_2, x_3) \wedge \cdots \wedge E(x_7, x_8) \wedge E(x_8, x_1) \wedge \bigwedge_{1 \leq i,j \leq 8, i \neq j} \neg(x_i = x_j) \right)$$

   c) En este caso, dado que el grafo es conexo y tiene 8 vértices, basta con chequear que el grafo tenga exactamente 7 aristas. Para esto usaremos la fórmula auxiliar $dist(x, y, x', y')$ definida por

   $$\neg\big((x = y' \wedge y = x') \vee (x = x' \wedge y = y')\big)$$

   que dice cuando dos pares (x, y) y (x', y') representan a una arista distinta. Note que la forma de decir que las aristas son distintas es expresando que **no son iguales**. Con esto solo basta decir que tenemos 7 aristas distintas lo que se puede hacer con una fórmula como la siguiente:

   $$\exists x_1 \exists y_1 \cdots \exists x_7 \exists y_7 \left(E(x_1, y_1) \wedge E(x_2, y_2) \wedge \cdots \wedge E(x_7, y_7) \wedge \bigwedge_{1 \leq i,j \leq 7, i \neq j} dist(x_i, y_i, x_j, y_j) \right)$$

   Puntos: 2 puntos por cada parte: 0.5 puntos por la explicación de la idea para expresar la propiedad y 1.5 por hacer correctamente la fórmula (se descuentan por casos borde que falten a criterio del corrector).

3. Considere un tablero de $n \times n$ casillas. Un *camino monótono* en el tablero es una secuencia de movimientos de casilla en casilla, tal que desde una casilla cualquiera el siguiente movimiento siempre lleva a una casilla a la derecha o a una casilla hacia arriba. Es decir en el camino monótono los movimientos son siempre desde una casilla (i, j) a la casilla $(i+1, j)$ (derecha) o a la casilla $(i, j+1)$ (arriba).

   a) Demuestre que la cantidad de caminos monótonos distintos en un tablero desde la casilla $(1, 1)$ hasta la casilla (n, n) es equinumeroso con el conjunto

$$B = \{(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}) \mid a_i \in \{0, 1\} \text{ y } \sum_{i=1}^{2n-2} a_i = n - 1\}.$$

   (Note que B es el conjunto de todas las tuplas de largo $2n-2$ de elementos en $\{0, 1\}$ tales que exactamente la mitad de los elementos son 0's y la otra mitad son 1's.)

   b) Demuestre que la cantidad de caminos monótonos desde la casilla $(1, 1)$ hasta la casilla (n, n) es

$$\binom{2n-2}{n-1}$$

Solución:

a) Considere cualquier camino monótono desde $(1, 1)$ hasta (n, n). Note que en este camino a lo más se puede avanzar $n-1$ veces en la dirección "a la derecha" y a lo más $n-1$ veces en la dirección "hacia arriba" porque de otra forma el camino se saldría del tablero. Más aun, para llegar a (n, n) el camino debe avanzar exactamente $n-1$ veces hacia la derecha y exactamente $n-1$ veces hacia arriba. Esto quiere decir que todo camino monótono da exactamente $(n-1)+(n-1) = 2n-2$ pasos. Tome ahora un camino monótono cualquiera. Podemos hacer la siguiente función inyectiva al conjunto $\{\textit{arriba}, \textit{derecha}\}^{2n-2}$. Sea

$$(1, 1) = (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{2n-3}, y_{2n-3}), (x_{2n-2}, y_{2n-2}) = (n, n)$$

un camino monótono cualquiera. A este camino le asignamos la secuencia

$$(d_1, d_2, \ldots, d_{2n-2})$$

tal que $d_i = \textit{arriba}$ si desde (x_{i-1}, y_{i-1}) se movió hacia arriba para llegar a (x_i, y_i), o $d_i = \textit{derecha}$ si en cambio se movió a la derecha. Note que cada camino monótono distinto genera una secuencia distinta, por lo tanto es una función invectiva. Más aún, note que la secuencia tiene exactamente $n-1$ veces *arriba* y $n-1$ veces *derecha* por lo que es muy fácil asignarle un elemento en B a cada secuencia (asignado, por ejemplo, *arriba* a 1 y *derecha* a 0). Hemos hecho una función invectiva desde los caminos monótonos al conjunto B. Para hacer una función invectiva desde B a los caminos monótonos usamos la misma idea. A cada elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2})$ con $a_i \in \{0, 1\}$ le asignamos una secuencia de elementos en $\{\textit{arriba}, \textit{derecha}\}$ (asignado, por ejemplo, 1 a *arriba* y 0 a *derecha*). Nos queda una secuencia de largo $2n-2$ que tiene exactamente $n-1$ veces *arriba* y $n-1$ veces *derecha*, por lo que le corresponde un único camino monótono desde $(1, 1)$ hasta (n, n). Hemos demostrado que hay una función invectiva desde los caminos monótonos hasta B y una función invectiva de B a los caminos monótonos por lo que los conjuntos son equinumerosos.

b) Esta pregunta resulta simple desde la anterior respuesta. Para contar la cantidad de caminos monótonos basta con contar los elementos en B. Note que a cada elemento de B le podemos asignar un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 2n-2\}$ de tamaño $n-1$ que indica exactamente qué posiciones son 1. De la misma forma a cada subconjunto con esas características le corresponde una única secuencia en B, luego el tamaño de B es exactamente la cantidad de subconjuntos de tamaño $n-1$ que se pueden hacer entre $2n-2$ elementos lo que es

$$\binom{2n-2}{n-1}$$

Puntos: Cada parte tiene 3 puntos. En la parte (a) 2 puntos por la observación de que un camino está capturado por una secuencia de direcciones y que esta secuencia tiene largo $2n-2$. El resto de los puntos por completar los detalles de la biyección. En la parte (b) puntos intermedios a criterio del corrector.

4. Use el método de exponienciación modular rápida para calcular $4^{444}\ \%\ 13$, o sea, calcular el resto de dividir 4^{444} en 13. Explique claramente los pasos que usó. (Ayuda: la representación binaria de 444 es 110111100.)

   Solución: Dado que la representación binaria de 444 es 110111100, sabemos que

   $$444 = 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^7 + 2^8.$$

   Luego

   $$4^{444}\ \%\ 13 = 4^{2^2+2^3+2^4+2^5+2^7+2^8}\ \%\ 13 = 4^{2^2} \times 4^{2^3} \times 4^{2^4} \times 4^{2^5} \times 4^{2^7} \times 4^{2^8}\ \%\ 13$$

   Calcularemos primero $4^{2^i}\ \%\ 13$ para todo i entre 0 y 8 que es suficiente para lo que necesitamos.

   $$\begin{array}{rcrcrcrcr}
4^{2^0}\ \%\ 13 & = & 4^1\ \%\ 13 & = & 4 & & & & \\
4^{2^1}\ \%\ 13 & = & (4^{2^0})^2\ \%\ 13 & = & 4\times 4\ \%\ 13 & = & 16\ \%\ 13 & = & 3 \\
4^{2^2}\ \%\ 13 & = & (4^{2^1})^2\ \%\ 13 & = & 3\times 3\ \%\ 13 & = & 9\ \%\ 13 & = & 9 \\
4^{2^3}\ \%\ 13 & = & (4^{2^2})^2\ \%\ 13 & = & 9\times 9\ \%\ 13 & = & 81\ \%\ 13 & = & 3 \\
4^{2^4}\ \%\ 13 & = & (4^{2^3})^2\ \%\ 13 & = & 3\times 3\ \%\ 13 & = & 9\ \%\ 13 & = & 9 \\
4^{2^5}\ \%\ 13 & = & (4^{2^4})^2\ \%\ 13 & = & 9\times 9\ \%\ 13 & = & 81\ \%\ 13 & = & 3 \\
4^{2^6}\ \%\ 13 & = & (4^{2^5})^2\ \%\ 13 & = & 3\times 3\ \%\ 13 & = & 9\ \%\ 13 & = & 9 \\
4^{2^7}\ \%\ 13 & = & (4^{2^6})^2\ \%\ 13 & = & 9\times 9\ \%\ 13 & = & 81\ \%\ 13 & = & 3 \\
4^{2^8}\ \%\ 13 & = & (4^{2^7})^2\ \%\ 13 & = & 3\times 3\ \%\ 13 & = & 9\ \%\ 13 & = & 9
\end{array}$$

   Ahora podemos calcular lo que necesitamos

   $$\begin{array}{rcl}
4^{444}\ \%\ 13 & = & 4^{2^2+2^3+2^4+2^5+2^7+2^8}\ \%\ 13 \\
 & = & 4^{2^2} \times 4^{2^3} \times 4^{2^4} \times 4^{2^5} \times 4^{2^7} \times 4^{2^8}\ \%\ 13 \\
 & = & 9\times 3\times 9\times 3\times 3\times 9\ \%\ 13 \\
 & = & 9\times 9\times 9\times 9\times 3\ \%\ 13 \\
 & = & ((9\times 9)\ \%\ 13\times (9\times 9)\ \%\ 13\times 3)\ \%\ 13 \\
 & = & 3\times 3\times \times 3\ \%\ 13 \\
 & = & 27\ \%\ 13 \\
 & = & 1
\end{array}$$

   Por lo que $4^{444}\ \%\ 13 = 1$.

   Puntos: 4 puntos por entender cómo aplicar el método (calcular las potencias primero e ir calculando las potencias más grandes a partir de las anteriores). Los 2 puntos restantes son por los cálculos intermedios, descontando puntos a criterio del corrector.