UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Examen - Semestre Otoño 2015

1. Lanzamos 50 tiros a un objetivo cuadrado de 70 cms por lado. Todos nuestros tiros dan en el objetivo. Demuestre que existen dos tiros que están a una distancia menor a 15cms.

   Solución: Dividimos al tablero en 49 cuadrados iguales de 10cms por lado. Por principio del palomar, dos de nuestros tiros deben haber caído en el mismo cuadrado. Pero la distancia máxima a la que pueden estar dos tiros en un cuadrado de 10cms por lado es el largo de su diagonal, el que corresponde a 14.1cms aproximadamente.

2. Demuestre que:
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{m} = \binom{n}{m} \cdot 2^{n-m}.$$

   Solución: El lado izquierdo cuenta las posibles formas de elegir un conjunto A de tamaño k desde un conjunto U de tamaño n y luego elegir un conjunto B de tamaño m desde A. El lado derecho cuenta lo mismo pero de distinta forma: Primero elegimos a B (hay $\binom{n}{m}$ formas de hacerlo), y luego a $A - B$ desde U (hay 2^{n-m} formas de hacerlo).

3. Suponga que j_n ($n \geq 1$) cuenta el número de formas en que se puede subir una escalera de n peldaños si se puede avanzar de uno o dos peldaños a la vez. Defina la sucesión $j_1, j_2 \dots$ en términos de la sucesión de Fibonacci $f_1, f_2, \dots$.

   Solución: Es claro que $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, y que $j_{n+1} = j_n + j_{n-1}$. Puede demostrarse entonces fácilmente por inducción que $j_n = f_{n+1}$.

4. Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ números naturales. Demuestre que existe un subconjunto no vacío de estos números cuya suma es divisible por n.

   Hint: Considere todos los b_i de la forma $a_1 + \cdots + a_i$, para $1 \leq i \leq n$. ¿Qué sucede si ninguno de ellos es divisible por n?

   Solución: Si algún b_i es divisible por n entonces la propiedad es cierta. Por el contrario, cada b_i entrega resto $1 \leq r_i \leq n-1$ al ser dividido por n. Por tanto, existen $1 \leq i < j \leq n$ tal que $r_i = r_j$. Esto quiere decir que $b_j - b_i$ es divisible por n. Pero $b_j - b_i$ es precisamente $\sum_{k=i+1}^{j} = a_k$.

5. Sea n un número cuya factorización prima es el producto de tres primos distintos p_1, p_2 y p_3. Demuestre que el número de elementos $1 \leq k \leq n$ que son primos relativos con n es:
$$n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)(1 - 1/p_3).$$

Solución: Los elementos en $\{1, \ldots, n\}$ que no son primos relativos con n son aquellos k que son divisibles por p_1, p_2 o p_3. Por inclusión-exclusión obtenemos que tal número corresponde a:

$$n - n/p_1 - n/p_2 - n/p_3 + n/(p_1 \cdot p_2) + n/(p_1 \cdot p_3) + n/(p_2 \cdot p_3) - n/(p_1 \cdot p_2 \cdot p_3).$$

Factorizando se puede demostrar que esto es precisamente $n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)(1 - 1/p_3)$.

6. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con al menos 11 vértices. Demuestre que G o su complemento $\bar{G}$ no es planar. (Recuerde que $\bar{G} = (V, \bar{E})$, donde $\bar{E} = (V \times V) - E$).

   Solución Asuma que G tiene $n \geq 11$ vértices y que tanto G como $\bar{G}$ son planares. Dado que en los grafos planares se cumple que $e \leq 3v - 6$, tenemos que tanto G como $\bar{G}$ tienen a lo más $3n - 6$ arcos. Es decir, la unión de ambos tiene a lo más $6n - 12$ arcos. Sin embargo, la unión de G y $\bar{G}$ es el clique de n vértices, que tiene $n(n-1)/2$ arcos. Es decir, se debe cumplir que $6n - 12 \geq n(n-1)/2$. Sin embargo, para todo $n \geq 11$ se cumple que $6n - 12 < n(n-1)/2$, lo que es una contradicción.

7. Considere enteros positivos a, b tal que $a > b$. Demuestre que:

   $$2^a - 1 \ (\mathbf{mod}\, 2^b - 1) \ = \ 2^{a \mathbf{mod}\, b} - 1.$$

   Solución: Claramente $2^a - 1 = 2^{a-b}(2^b - 1) + (2^{a-b} - 1)$. Esto quiere decir que $2^a - 1 \ (\mathbf{mod}\, 2^b - 1) = 2^{a-b} - 1 \ (\mathbf{mod}\, 2^b - 1)$. De igual forma, $2^{a-b} - 1 = 2^{a-2b}(2^b - 1) + 2^{a-2b} - 1$. Por tanto, $2^a - 1 \ (\mathbf{mod}\, 2^b - 1) = 2^{a-2b} - 1 \ (\mathbf{mod}\, 2^b - 1)$. Siguiendo iterativamente este proceso obtenemos que si k es el menor entero tal que $a - kb < b$ entonces $2^a - 1 \ (\mathbf{mod}\, 2^b - 1) = 2^{a-kb} - 1 \ (\mathbf{mod}\, 2^b - 1) = 2^{a-kb} - 1$. Pero en tal caso se cumple que $a - kb$ es precisamente $a \, (\mathbf{mod}\, b)$, lo que queríamos demostrar.

8. Sea p, m dos enteros positivos tal que $p > m \geq 2$. Demuestre que la probabilidad de que dos enteros distintos elegidos al azar en el conjunto $\{1, \ldots, p\}$ tengan el mismo valor módulo m es estrictamente menor a $1/m$.

   Solución: Si dividimos a los elementos de $\{1, \ldots, p\}$ según su resto módulo m obtendremos a lo más $\lceil p/m \rceil$ clases de equivalencia. Elijamos un elemento al azar. Por tanto, la probabilidad de que otro elemento elegido al azar tenga el mismo valor que este módulo m es a lo más $(\lceil p/m \rceil - 1)/p$. Pero $\lceil p/m \rceil - 1 \leq p/m - 1$, por lo que nuestra probabilidad es a lo más $(p/m - 1)/p = 1/m - 1/p$. Este último valor es estrictamente menor a $1/m$.