UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 3 - Semestre Otoño 2017

1. Decimos que un vértice v en un grafo G es *crítico*, si sacar a v de G (junto con todos los arcos que llegan a tal nodo) genera más de una componente conexa (es decir, el grafo deja de ser conexo).

   Demuestre que todo grafo simple y conexo contiene al menos dos vértices que no son críticos.

   Hint: Para el caso inductivo, suponga que G tiene un nodo crítico; es decir, al ser sacado del grafo genera al menos dos componentes conexas G_1 y G_2. Por HI ambos G_1 y G_2 tienen dos vértices que no son críticos. Asuma que tales vértices corresponden a u_1, u_2 en G_1 y $w_1, w_2 \in G_2$. Demuestre que existen $i, j \in \{1, 2\}$ tal que ni v_i ni w_j es crítico.

   Solución: El caso base consiste de un solo arco, y por tanto es trivial. Considere ahora un grafo G simple y conexo con n vértices, para $n > 2$. Si G no tiene nodo crítico no hay nada que demostrar. Asuma entonces que hay un nodo crítico v. Es decir, al sacar a v del grafo se generan al menos dos componentes conexas G_1 y G_2. Por HI ambos G_1 y G_2 tienen dos vértices que no son críticos. Asuma que tales vértices corresponden a u_1, u_2 en G_1 y $w_1, w_2 \in G_2$. Suponga que u_1 es crítico para G. Dado que u_1 no es crítico para G_1 eso solo puede significar que u_1 es el único nodo en G_1 que está unido a v. Luego, u_2 no es crítico para G (ya que G_2 está unido a $G_1 \setminus \{u_2\}$) por medio de v). El mismo análisis permite demostrar que v_1 o v_2 no es crítico. Concluimos que G tiene al menos dos vértices que no son críticos.

2. Suponga que $G = (V, E)$ es un grafo simple y conexo, y $w : E \to \mathbb{N}$ es una función que asigna pesos a los arcos de G. Asuma que $e \in E$ es un arco que toca un vértice $v \in V$, y que el peso de e no supera el peso de ningún otro arco que toca a v. Demuestre que existe un árbol cobertor mínimo de G que contiene a e.

   Solución: Sea G' el arco que se obtiene de G al sacar el arco e. Si G' no es conexo, necesariamente todo árbol cobertor de G debe contener a e. Asuma entonces que G' es conexo. Luego G' tiene un árbol cobertor T. Por tanto, $T \cup \{e\}$ contiene un ciclo que pasa por e. Este ciclo debe contener dos arcos distintos que tocan a v (el arco e y otro más, digamos e'). Sea $H = (T \cup \{e\}) \setminus \{e'\}$. Este grafo es conexo, pasa por todo vértice de G, y tiene $(|V| - 1)$ arcos (ya que T tiene tal cantidad de arcos). Concluimos que H es un árbol cobertor. El costo de tal árbol es menor o igual al costo de T (ya que $w(e) \leq w(e')$ por definición). Es decir, existe árbol cobertor mínimo de G que contiene a e.

3. Sea $a_1, \ldots, a_n$ una permutación generada uniformemente al azar de los números $\{1, \ldots, n\}$. Una *inversión* en $a_1, \ldots, a_n$ es un par (i, j) tal que $1 \leq i < j \leq n$ y $a_i > a_j$. ¿Cuál es el número esperado de inversiones en tales permutaciones?

   Solución: Sea X la variable aleatoria que denota el número de inversiones. Para cada $1 \leq i < j \leq n$ sea X_{ij} la variable indicatoria que vale 1 sii el par (i, j) es una inversión. Entonces:

   $$X = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_{ij} \qquad \text{y} \qquad E(X) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_{ij}).$$

Además:

$$E(X_{ij}) \,=\, Pr(X_{ij} = 1) \,=\, \frac{1}{2}.$$

Se sigue que $E(X) = \frac{n(n-1)}{4}$.