UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 5 - Semestre Primavera 2009

1. Sean a y b dos enteros positivos. Escribimos $a \mid b$ si a divide a b, es decir, si existe entero positivo k tal que $ka = b$.

   a) Sea p un primo y a, b enteros positivos. Demuestre que si $p \mid (ab)$ entonces $p \mid a$ o $p \mid b$.

   b) Asuma que a y b son enteros positivos y que $a \mid b$. También, asuma que p es un primo tal que $p \mid b$ pero no es el caso que $p \mid a$. Demuestre que $p \mid (b/a)$.

   c) Concluya que si p es un primo y $0 < k < p$, entonces $p \mid \binom{p}{k}$.

   Solución: La solución está dada por partes:

   a) Si $p \mid (ab)$ entonces p aparece en la factorización prima de ab. Luego, p aparece en la factorización prima de a o en la de b. Concluimos que $p \mid a$ o $p \mid b$.

   b) Sabemos que $p \mid a(b/a)$. Dado que p no divide a a, por (a) concluimos que $p \mid (a/b)$.

   c) Sabemos que $\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdots (p-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdots 1}$. Luego, p divide al numerador de esta expresión, pero por (a) no divide al denominador (pues no divide a ninguno de los factores en el denominador). Concluimos por (b) que $p \mid \binom{p}{k}$.

2. Sea G un grafo simple. Un conjunto de vértices de G es *independiente* si no hay dos vértices en el conjunto que sean adyacentes. Denotamos por $I(G)$ el máximo número de vértices en un conjunto independiente de vértices de G

   Demuestre que para todo grafo de simple $G = (V, E)$ se necesitan a lo más $|V| - I(G) + 1$ colores para colorear G.

   Solución: Tome un conjunto independiente de vértices en G de tamaño $I(G)$. Coloree todos esos vértices con el mismo color, digamos azul. Luego, cada uno de los restantes $V - I(G)$ vértices coloréelo con un color distinto, que no sea azul. Esta es una coloración del grafo con a lo más $V - I(G) + 1$ colores.

3. Un árbol $T = (V, E)$ con n vértices (i.e. $|V| = n$) se dice que es *gracioso*, si los elementos en V pueden ser etiquetados con enteros en el conjunto $\{1, \ldots, n\}$ de tal forma que los valores absolutos de las diferencias de las etiquetas de vértices adyacentes son todos diferentes.

   Un árbol T es un *gusano* si contiene un camino simple tal que cada vértice de T está contenido en este camino o es adyacente a un vértice en este camino.

   Demuestre que todo árbol que es un gusano es también gracioso.

Solución: Sea T un gusano, y sea $v_1 v_2 \cdots v_n$ ($n \geq 1$) un camino simple en T tal que cada vértice en T está contenido en este camino o es adyacente a un vértice a este camino. Demostraremos que T es gracioso.

Primero etiquetamos a v_1 con 1. Luego enumeramos a todos los vértices de T que son adyacentes a v_1, de tal forma que v_2 aparezca en primer lugar. Finalmente etiquetamos a todos los vértices enumerados en el paso anterior, de tal forma que el i-esimo vértice en esa enumeración reciba el valor $n - i + 1$. En particular, v_2 es etiquetado con el valor n, pues es el primer elemento de la enumeración.

A continuación enumeramos a todos los vértices adyacentes a v_2, de tal forma que v_3 aparezca en primer lugar. Etiquetamos entonces a todos los vértices enumerados en el paso anterior, de tal forma que el i-esimo vértice en esa enumeración reciba el valor $i + 1$. En particular, v_3 recibe el valor 2.

Continuamos luego recursivamente de este modo hasta etiquetar a todos los nodos con un valor distinto.

Es fácil ver entonces que los valores absolutos de las diferencias de las etiquetas de vértices adyacentes son todos diferentes.