UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 4

1. La *secuencia de grados* de un grafo simple G es la secuencia de los grados de sus nodos en orden no creciente.

   Asuma que $d_1, d_2, \ldots, d_n$ es la secuencia de los grados de un grafo simple. Demuestre que existe un grafo simple G con vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ que satisface lo siguiente:

   - Para cada vértice v_i, $i \in [1, n]$, el grado de v_i en G es d_i; y
   - v_1 es adyacente a $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$.

   Solución: Primero renombre los vértices de G de tal forma que v_i tenga grado d_i. Si v_1 está unido a $v_2, v_3, \ldots, v_{d_1+1}$ no hay nada más que hacer. Si esto no es así, sea $j \neq 2$ el menor j tal que v_1 es adyacente a v_j. Entonces construya G' desde G removiendo el arco (v_1, v_j) y agregando el arco (v_1, v_2). Note que el grado de v_1 en G' es d_1. El problema es que el grado de v_2 en G' es $d_2 + 1$ y el de v_j es $d_j - 1$. Esto se puede remediar puesto que debe existir v' tal que $v' \neq v_1$ y $v' \neq v_3$ tal que existe arco de v_2 a v' en G' pero no de v_j a v'. Esto porque $d_2 \geq d_j$ (demúestrelo). Construimos ahora G'' removiendo el arco (v_2, v') y agregando (v_j, v'). El grado de v_2 en G'' es d_2 y el de v_j es d_j. Luego continuamos este proceso iterativamente.

2. El *complemento* de un grafo simple $G = (V, E)$ se define como el grafo $G_{\text{comp}} = (V, E_{\text{comp}})$ tal que para todo par $(v_1, v_2) \in V \times V$ se tiene que:

   $$(v_1, v_2) \in E_{\text{comp}} \;\Leftrightarrow\; (v_1, v_2) \notin E \text{ y } v_1 \neq v_2.$$

   Es decir G_{comp} no contiene loops y es también un grafo simple.

   Decimos que un grafo simple es *autocomplementario* si G es isomorfo con G_{comp}. Demuestre que para todo grafo simple G se tiene que si G es autocomplementario y tiene n vértices, $n \geq 1$, entonces n es de la forma $4m$ ó $4m + 1$, para algún $m \geq 0$.

   Solución: Un grafo es autocomplementario si la cantidad de arcos X que tiene es igual a la de su complemento. Como su complemento es simple tiene $\binom{n}{2} - X$ arcos. Luego, $X = \binom{n}{2} - X$ implica $X = (n(n-1))/4$. Analizando los casos es posible ver que n debe ser de la forma $4m$ ó $4m + 1$, para algún $m \geq 0$.

3. Demuestre o refute la siguiente conjetura:

   Conjetura: En todo grafo simple existen al menos dos nodos con el mismo grado.

   Solución: Asuma por contradicción que existe grafo G con $n \geq 2$ nodos tal que todos los nodos de G tienen grado diferente. Por tanto, los grados de G son $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dado que $n - 1$ es un grado de G, existe nodo en G que está conectado con todos los demás nodos de G. Esto es una contradicción porque sino no habría nodo de grado 0.

4. Demuestre que un grafo $G = (V, E)$ es conexo si y solo si para cada par de subconjuntos no vacíos de vértices U y W tales que $U \cup W = V$ y $U \cap W = \emptyset$, existe una arista en E que une a un vértice de U con un vértice de W.

   Solución: Asuma primero que G es conexo. Sean U y W conjuntos no vacíos de vértices tales que $U \cup W = V$ y $U \cap W = \emptyset$. Sea $u \in U$ y $w \in W$ vértices cualquiera. Dado que G es conexo existe camino de u a w en G. Tal camino debe en algún momento pasar desde un nodo de U a un nodo de W. Esto implica qe el arco existe.

   Para la otra dirección, asuma por contradicción que G no es conexo. Luego, existen al menos dos componentes conexas G_1 y G_2 en G. Defina U como G/G_1 y W como G_1. Claramente, $U \cup W = V$ y $U \cap W = \emptyset$. Además, no existe arista de U a W, lo que es una contradicción.