UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 4 - Semestre Primavera 2009

1. Para este ejercicio necesitamos la siguiente notación:

   - Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ grafos simples. Un *homomorfismo* de G en G' es una función $h : V \to V'$ tal que para cada par $v_1, v_2 \in V \times V$,

   $$(v_1, v_2) \in E \implies (h(v_1), h(v_2)) \in E'.$$

   - Un grafo simple $G = (V, E)$ es *k-partito* ($k \geq 1$) si su conjunto de vértices V puede ser particionado en a lo más k distintos bloques tal que, para cada arco $e = (v, v') \in E$, se tiene que v y v' pertenecen a diferentes bloques de la partición.
   - El grafo completo en k vértices, denotado K_k, es el grafo simple con k vértices que contiene un arco entre cada par de vértices distintos.

   Demuestre que un grafo simple G es k-partito si y solo si existe un homomorfismo de G en K_k ($k \geq 1$).

   Solución: Sea $\{a_1, \ldots, a_k\}$ una enumeración de los vértices de K_k. Asuma primero que G es k-partito. Sea $\{V_1, \ldots, V_l\}$ una partición de V que atestigua que G es k-partito (i.e. $l \leq k$, y si dos vértices en G son adyacentes entonces pertenecen a bloques distintos de la partición). Sea h un mapeo de V en K_k que envía cada vértice $v \in V_j$, $1 \leq j \leq l$, a a_j. Dado que si dos vértices son adyacentes en G entonces deben pertenecer a diferentes bloques de la partición, se cumple que si los vértices v y v' son adyacentes en G entonces $h(v)$ y $h(v')$ son adyacentes en K_k. Concluimos que h es un homomorfismo de G en K_k.

   Asuma, en la otra dirección, que h es un homomorfismo de G en K_k. Sea $V_1, \ldots, V_k$ subconjuntos de V definidos de la siguiente forma: $v \in V_j$ ($1 \leq j \leq k$) si y solo si $h(v) = a_j$. Elimine cada V_i ($1 \leq i \leq k$) tal que V_i es vacío. Sean $U_1, \ldots, U_l$ los conjuntos resultantes, $l \leq k$. Es fácil demostrar que $U_1, \ldots, U_l$ es una partición de V y que vértices que son adyacentes en G pertenecen a diferentes bloques de esta partición (pues vértices adyacentes son mapeados, via h, a diferentes nodos de K_k). Concluimos que G es k-partito.

2. Sea $a_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$. Defina una relación de recurrencia que represente a esta secuencia. Encuentre la forma general de las soluciones de esta relación de recurrencia. Resuelva las constantes con respecto a las condiciones iniciales $a_1 = 1$, $a_2 = 5$ y $a_3 = 14$.

   Solución: La relación de recurrencia es $a_{n+1} = a_n + (n+1)^2$, con $a_0 = 0$.

   La solución general a esta relación de recurrencia es $\{a_n\} = \alpha + n(p_0 n^2 + p_1 n + p_2)$. Resolviendo para las condiciones iniciales dadas se obtiene $\alpha = 0$, $p_0 = 1/3$, $p_1 = 1/2$ y $p_2 = 1/6$.

3. Demuestre que todo grafo simple con n vértices y estrictamente más de $\binom{n-1}{2}$ arcos tiene que ser conexo.

   Hint: Demuestre que si G tiene al menos dos componentes conexas, y una de sus componentes conexas tiene $k < n$ vértices, entonces G tiene a lo más $\binom{n-1}{2}$ arcos.

   Solución: Asuma que G tiene al menos dos componentes conexas, y una de sus componentes conexas tiene $1 \leq k < n$ vértices. Entonces el máximo número de arcos que G puede tener es $p = \binom{n-k}{2} + \binom{k}{2}$ arcos. Demostraremos que $p \leq \binom{n-1}{2}$.

   Para demostrar esto basta demostrar que

$$\binom{n-1}{2} - \binom{k}{2} - \binom{n-k}{2} \geq 0,$$

   lo que es equivalente a demostrar que

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{k(k-1)}{2} - \frac{(n-k)(n-k-1)}{2} \geq 0.$$

   Pero claramente esto es equivalente a demostrar que

$$\frac{n^2}{2} - \frac{3}{2}n + 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2} - \frac{n^2}{2} + kn + \frac{n}{2} - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} \geq 0.$$

   Lo último es equivalente a decir que

$$-n + kn + 1 - k^2 \geq 0.$$

   Ahora, factorizando por n y utilizando suma por la diferencia, lo anterior es equivalente a decir que

$$n(k-1) + (1-k)(1+k) \geq 0.$$

   Pero lo anterior ocurre si y solo si

$$(k-1)(n-1-k) \geq 0.$$

   Pero claramente lo anterior se cumple pues $1 \leq k < n$.