Resumen C3

Relaciones de recurrencia

Una relación de recurrencia el lineal, homogénea y tiene coeficientes enteros si es de la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k}$$

donde $c_1, c_2, ..., c_k$ son números reales y $c_k \neq 0$. La relación es de grado k.

La ecuación característica de esta relación es

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - ... - c_k = 0$$

Para el caso $k = 2$, dadas las soluciones r_1 y r_2, la secuencia $\{a_n\}$ es una solución a la recurrencia anterior si y sólo si

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n$$

En caso de que $r_1 = r_2$ la ecuación anterior es

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 n r_2^n$$

α_1 y α_2 se determinan con los casos base a_0 y a_1

Una relación de recurrencia es no homogénea si es de la forma

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + ... + c_k a_{n-k} + f(n)$$

Toda solución para esta recurrencia tiene la forma $\{a_n^{(p)} + a_n^{(h)}\}$, donde $\{a_n^{(h)}\}$ es solución de la recurrencia homogénea asociada y $\{a_n^{(p)}\}$ es solución particular de la recurrencia.

Para encontrar $\{a_n^{(p)}\}$, asumimos que

$$f(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + ... + b_1 n + b_0) s_n$$

donde $b_0, b_1, ..., b_t$ y s son números reales. Entonces

- Si s no es raíz de la recurrencia asociada

$$\{a_n^{(p)}\} = (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + ... + p_1 n + p_0) s^n$$

- Si s es raíz de la recurrencia asociada con multiplicidad m

$$\{a_n^{(p)}\} = n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + ... + p_1 n + p_0) s^n$$

Teorema Maestro

Sea $T : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función creciente que satisface la relación

$$T(n) = aT(n/b) + cn^d$$

cuando n es divisible por b, y donde $a \geq 1$, $b \geq 2$ y c, d números reales con c positivo y d no negativo. Entonces

$$T(n) = \begin{cases} O(n^d) & \text{si } a < b^d \\ O(n^d \log n) & \text{si } a = b^d \\ O(n^{\log_b a}) & \text{si } a > b^d \end{cases}$$

- *Binary search es* $O(\log n)$
- *Máximo y mínimo es* $O(n^{\log 2}) = O(n)$
- *Merge sort es* $O(n \log n)$

Grafos

Un grafo G está conformado por un conjunto no vacío V de vértices o nodos, y un conjunto E de arcos o aristas, tal que cada $e \in E$ tiene un par $(v_1, v_2) \in V \times V$ asociado. En tal caso, decimos que e conecta v_1 con v_2 o también que $e = (v_1, v_2)$

Un grafo $G = (V, E)$ es simple si:

1. No existen arcos que conecten el mismo par de nodos: *si* e_1, e_2 *conectan a* u *y* v, *entonces* $e_1 = e_2$
2. Cada arco conecta dos nodos diferentes: $(v, v) \notin E$, *para todo* $v \in V$
3. No existe dirección en los arcos: $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E$, *para todo par* $(u, v) \in V \times V$

Un grafo dirigido simple no cumple la tercera condición (cada arco tiene una dirección asociada)

Un grafo G con más de un arco conectando el mismo par de nodos es un multigrafo; formalmente $G = (V, N)$ es un grafo simple, pero donde $E \subseteq V \times V \times \mathbb{N}$, es decir $(u, v, n) \in E$ significa que existen n arcos entre u y v.
Un multigrafo que además no cumple la segunda condición del grafo simple (tiene loops) se denomina seudografo.

Grafos no dirigidos

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido.

- Los nodos $u, v \in V$ son adyacentes si existe un arco $e \in E$ tal que $e = (u, v)$
- Un arco $e \in E$ es incidente a $u \in V$ si conecta a u con algún $v \in V$
- El grado de un nodo $v \in V$ $deg(v)$ es el número de ejes que son incidentes a u, excepto por los loops en v que contribuyen dos veces al grado de v.
- Un nodo $u \in V$ está aislado si $deg(v) = 0$, y está pendiendo si $deg(v) = 1$

Teorema de los saludos

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Entonces:

$$2|E| = \sum_{v \in V} deg(v)$$

Corolario: Todo grafo no dirigido tiene un número par de nodos de grado impar

Grafos dirigidos

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

- Decimos que u es adyacente a v si existe un arco $e = (u, v)$ en E. Equivalentemente, decimos que v es adyacente desde u. Además, u es el nodo inicial de e, y v es el terminal
- El grado de entrada de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo terminal a v. Lo denotamos por $deg^-(v)$. Similarmente, el grado de salida de un nodo v es el número de ejes que tienen como nodo inicial a v. Lo denotamos por $deg^+(v)$

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido. Entonces:

$$\sum_{v \in V} deg^-(v) = \sum_{v \in V} deg^+(v) = |E|$$

Cliques y ciclos

- Un clique K_n es un grafo simple de n nodos y todas las aristas posibles. $|E|_{K_n} = \binom{n}{2}$ aristas
- Un ciclo C_n, $n \geq 3$ es un grafo simple con nodos $v_1, \ldots, v_n$ y aristas $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$. $|E|_{C_n} = n$
- La rueda W_n se obtiene al agregar a un ciclo C_n un nuevo vértice unido a los demás nodos. $|E|_{W_n} = 2n - 2$

Grafos bipartitos

Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito, si V puede ser particionado en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que cada arco del grafo conecta un nodo de V_1 con uno de V_2.
Un grafo simple es bipartito si y solo si es posible asignar uno de dos colores diferentes a cada vértica del grafo, de tal forma que ningún par u, v de vértices adyacentes recibe el mismo color

Un grafo bipartito es completo si existe un arco entre cada par de nodos (u, v) tal que $u \in V_1$ y $v \in V_2$

Subgrafos

Un subgrafo de $G = (V, E)$ es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$; y es propio si $G \neq G'$

Representación de grafos

Para representar un grafo, se puede tener una lista de adyacencia del grafo (donde se listan los nodos que son adyacentes a cada nodo), o la matriz de adyacencia.
Para la lista de adyacencia, se necesita $O(\log V)$ para verificar aristas, y $O(deg^+(v))$ para recorrer vecinos. El espacio dirigido necesita $|E|\log(|V|) + |V|\log(|E|)$ bits.
Para distinguir dos grafos dirigidos se necesitan $\log(\binom{|V|^2}{|E|}) \leq 2|E|\log(|V|/|E|) + O(|E|)$ bits.

Isomorfismo de grafos

Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos simples. Decimos que son isomorfos si existe una biyección $f : V \to V'$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$

$$(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (f(v_1), f(v_2)) \in E'$$

La función f es un isomorfismo entre G y G'

Demostrar que dos grafos son isomorfos es difícil, a veces es más fácil demostrar que dos grafos no son isomorfos. Para eso, basta utilizar una propiedad P que sea preservada por los isomorfismos (n° de vértices, n° de arcos, grados, etc). Tales propiedades se llaman invariantes. Demostramos entonces que un grafo la tiene pero el otro no.

Complemento

El complemento de un grafo simple $G = (V, E)$ es el grafo $\overline{G} = (V, \overline{E})$, tal que $(v_1, v_2) \in \overline{E} \Leftrightarrow (v_1, v_2) \notin E$
Un grafo es complementario si G es isomorfo a $\overline{G}$

Caminos

Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Un camino entre los nodos u y v es una secuencia $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tal que existen nodos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ que satisfacen lo siguiente:

- $x_0 = u$ y $x_n = v$
- para cada $1 \leq i \leq n$, $e_i = (x_{i-1}, x_i)$

En tal caso, decimos que el camino es de largo n. El camino es un circuito si $u = v$. Es simple si todos los e_i's son distintos.

Conecciones en grafos no dirigidos

Un grafo no dirigido es conexo si existe un camino entre cada par de nodos distintos del grafo.

Si un grafo no es conexo, entonces está formado por la unión disjunta de sus componentes conexas.
Sea G un grafo no dirigido, entonces una componente conexa de G es un subgrafo G' de G tal que (1) G' es conexo, y (2) G' no es un subgrafo propio de otro subgrafo conexo de G. Decimos que G' es maximal.

Conectividad en grafos dirigidos

Dado un grafo dirigido $G = (V, E)$, el grafo no dirigido subyacente G' de G se obtiene desde G computando la clausura simétrica de E.

- Un grafo dirigido es fuertemente conexo, si para todo par de vértices v, v' existe un camino dirigido de v a v' y viceversa.
- Un grafo dirigido es débilmente conexo, si para todo par de vértices v, v' existe un camino entre v y v' en el grafo no dirigido subyacente.

En todo grafo simple, todo nodo de grado impar está unido mediante un camino a algún otro nodo de grado impar.

Un grafo simple G es bipartito si y solo si no contiene circuitos de largo impar.

Un grafo conexo de n nodos tiene al menos $n - 1$ aristas.

Algoritmo de Dijkstra

- <u>Entrada</u>: Grafo dirigido $G = (V, E)$, sin loops ni multiarcos; función $\lambda : E \to \mathbb{N}$; y un nodo fuente $v \in V$
- <u>Salida</u>: Costo $\delta(v, u)$ del camino de menor "peso"de v a u para todo $u \in V$
- <u>Idea</u>: Mantener $\delta \subseteq V$ y $d(u) \in (N)$, $\forall u \in V$ tal que :
  1. $d(u)$ es el peso de algún camino que va a u ($\therefore d(u) \geq \delta(v, u)$)
  2. $d(u) = \delta(v, u)$, $\forall u \in S$

Inicialmente: $S := \{v\}$; $d(v) = 0$; $d(u) = \lambda(v, u)$, si existe arco $e = (u, v) \in E$.

<u>Iterativamente</u>

1. Agregue a S un nodo $u \in V \backslash S$ tal que $d(u)$ es mínimo
2. Relaje.ª través de cada arco que sale de u. Si $d(u) + \lambda(u, u') < d(u')$, para arco $(u, u') \in E \Rightarrow d(u') = d(u) + \lambda(u, u')$

Al finalizar $S = V \Rightarrow d(u) = \delta(v, u)$ para todo $u \in V$
Invariante: $d(u) = \delta(u, v)$, para todo $u \in S$