Resumen Grafos

Matemáticas Discretas
Profesor: Gonzalo Navarro
Auxiliares: Antonio Lizama & Pablo Muñoz

Definición 1. *Un **grafo** G es un par (V, E), donde V es un conjunto no vacío de **vértices** o **nodos**, y $E \subseteq V \times V$ es el conjunto de **arcos** o **aristas**.*

Definición 2. *Un grafo $G = (V, E)$ se dice **simple** si cada arco $e \in E$ conecta dos nodos diferentes y no existen arcos que conecten el mismo par de nodos.*

Definición 3. *Un **multigrafo** $G = (V, E)$ es un grafo simple, pero donde $E \subseteq V \times V \times \mathbb{N}$. Un multigrafo con loops (ie, $\exists(v, v) \in E$) se denomina seudografo.*

Definición 4. *Un **grafo dirigido simple** es un grafo simple que no satisface $(u, v) \in E \Rightarrow (v, u) \in E$, para todo $(u, v) \in V \times V$, es decir, los arcos tienen dirección asociada.*

Terminología

- Los nodos $u, v \in V$ son **adyacentes** si $\exists e \in E;\ e = (u, v)$.
- Un arco $e \in E$ es **incidente** a $u \in V$ si conecta a u con algún $v \in V$.
- El **grado** de un nodo $v \in V$ (denotado $d_G(v)$) es el número de arcos incidentes a u (los loops contribuyen 2).
- Un nodo $v \in V$ se dice aislado si $d_G(v) = 0$, y está pendiendo si $d_G(v) = 1$.

Teorema 1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido. Entonces*

$$2|E| = \sum_{vinV} d_G(v)$$

Definición 5. *Un **clique** de n vértices $v_1, ..., v_n$, denotado por K_n, es el grafo que contiene un arco por cada par de nodos v_i, v_j, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$.*

Definición 6. *Un **ciclo** de n vértices $v_1, ..., v_n$, denotado por C_n, tiene como arcos a los pares: $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$*

Definición 7. *La **rueda** W_n se obtiene desde C_n agregando un nuevo vértice y uniendo este nuevo vértice a cada uno de los n vértices de C_n.*

Definición 8. *Un grafo $G = (V, E)$ se dice **bipartito**, si V puede ser particionado en dos conjuntos V_1, V_2 tal que $E \subseteq V_1 \times V_2$.*

Definición 9. *Un **subgrafo** de $G = (V, E)$ es un grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq V' \times V'$.*

Definición 10. *Dos grafos simples $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ se dicen **isomorfos** si existe una biyección $f : V \to V'$ tal que para todo $v_1, v_2 \in V$:*

$$(v_1, v_2) \in E \Leftrightarrow (f(v_1), f(v_2)) \in E'$$

Definición 11. *El* ***complemento*** *de un grafo simple* $G = (V, E)$ *es el grafo* $\bar{G} = (V, \bar{E})$*, tal que* $(v_1, v_2) \in \bar{E} \Leftrightarrow (v_1, v_2) \notin E$*. Un grafo es* ***complementario*** *si* G *es isomorfo a* $\bar{G}$*.*

Definición 12. *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo no dirigido. Un* ***camino*** *de largo* n *entre los nodos* u *y* v *es una secuencia* $e_1 e_2 ... e_n$ *tal que existen nodos* $x_0, x_1, ..., x_n$ *que satisfacen:*

- $x_0 = u$ *y* $x_n = v$
- *Para cada* $1 \leq i \leq n,\ e_i = (x_{i-1}, x_i)$.

Se dice que el camino es un ***circuito*** *si* $u = v$*. Es* ***simple*** *si todos los* e_i *son distintos.*

Definición 13. *Un grafo no dirigido es* ***conexo*** *si existe un camino entre cada par de nodos distintos del grafo.*
Un subgrafo conexo maximal se llama ***componente conexa****.*

Definición 14. *Sea* G *un grafo. Un circuito de* G *se dice* ***euleriano*** *si es simple y pasa a través de cada arco de* G*. Un paseo de* G *se dice* ***euleriano*** *si es simple y pasa a través de cada arco de* G*.*

Definición 15. *Sea* G *un grafo. Un circuito de* G *se dice* ***hamiltoneano*** *si es simple y pasa a por cada nodo de* G *exactamente una vez. Un camino hamiltoneano se define de manera análoga.*

Definición 16. *Un grafo* G *es* ***planar*** *si puede ser dibujado en el plano sin que sus arcos se intersecten.*
La representación planar de un grafo divido al plano en regiones, incluyendo una infinita (la exterior).

Teorema 2. *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo simple conexo y planar. Sea* r *el número de regiones en una representación planar de* G*. Luego,*

$$r = |E| - |V| + 2$$

Corolario 1. *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo simple conexo y planar. Entonces, si* $|V| \geq 3$ *se tiene* $|E| \leq 3|V| - 6$*.*

Corolario 2. *Sea* $G = (V, E)$ *un grafo simple conexo y planar. Entonces,* G *tiene un vértice de grado a lo más 5.*

Teorema 3. *Un grafo simple no es planar si y sólo si contiene a* $K_{3,3}$ *ó a* K_5 *como menor.*

Definición 17. *Una* ***subdivisión elemental*** *de un grafo* G *se obtiene al reemplazar un arco* (u, v) *en* G *por dos arcos* (u, w) *y* (w, v)*, donde* w *es un nodo nuevo.*

Definición 18. *Un grafo* H *es* ***menor*** *de* G*, denotado* $H \preceq G$*, si se obtiene de* G *mediante una secuencia de subdivisiones elementales.*

Definición 19. *Una* ***coloración*** *de un grafo simple* G *es una función* $c : V \to \{1, 2, ...\}$*, de manera que* $c(u) \neq c(v)\ \forall (u, v) \in E$*.*
El ***número cromático*** *de un grafo simple* G*, denotado* $\chi(G)$*, es el menor número de colores que se necesitan para colorear* G*.*

Teorema 4. *Sea* G *un grafo simple, conexo y planar. Entonces* $\chi(G) \leq 4$*.*

Definición 20. *Un **árbol** es un grafo conxexo no dirigido acíclico.*
*Un **bosque** es un grafo no dirigido acíclico.*

Terminología de árboles Sea T un árbol de raíz v.

- El **padre** de un nodo u tal que $u \neq v$, es el nodo u' tal que existe un arco dirigido desde u' a u en T. También se dice que u es un **hijo** de u'.
- Dos nodos son **hermanos** si tienen el mismo padre.
- Los **ancestros** de u son todos los nodos $u' \neq u$ en el camino desde u hasta v. Los **descendientes** de u son todos los vértices que tienen a u como ancestro.
- Una **hoja** es un nodo sin hijos (ie, tienen grado 1). Los nodos que no son hojas se llaman **internos**.
- Un **subárbol** de T con raíz u es el subgrafo de T inducido por u y todos sus descendientes.

Definición 21. *Un árbol es m-ario, $m \geq 1$, si cada nodo interno tiene a lo más m hijos. Se dice que el árbol es m-ario completo si cada nodo interno tiene exactamente m hijos.*

Definición 22. *La **altura** de un árbol T con raíz v es el máximo largo de un camino simple desde v a una de las hojas de T.*

Teorema 5. *Hay a lo más m^h hojas en un árbol m-ario de altura h.*

Definición 23. *Sea G un grafo simple. Un **árbol generador (spanning tree)** de G es un subgrafo de G que es un árbol contiene a todo nodo de G.*