UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

**Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101**
**Control 5 - Semestre Primavera 2010**

1. Recuerde que el Teorema de Euler para grafos planares establece lo siguiente. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, conexo y planar. Asuma que $R$ es el número de regiones en una representación planar de $G$. Entonces se cumple que $R = |E| - |V| + 2$.

   Utilizando el Teorema de Euler para grafos planares demuestre que si $G = (V, E)$ es un grafo coneoxo, simple y planar, tal que $|V| \geq 3$, entonces $|E| \leq 3|V| - 6$.

   **Solución:** Corolario 1 , Capítulo 9.7 del libro.

2. Utilizando el resultado anterior, demuestre que todo grafo planar puede ser coloreado utilizando tan solo 5 colores.

   **Solución:** Es posible demostrar utilizando lo anterior que todo grafo simple y planar tiene un vértice de grado a lo más 5 (Corolario 2, Capítulo 9.7 del libro). Después se sigue una demostración por inducción y la siguiente idea en:

   `http://www.cim.mcgill.ca/~wahab/graphtheory/cgwebpage/5color.html`

3. Sea $p$ un primo y $a$ un entero en el intervalo $[1, p-1]$. Considere cada uno de los números

   $$a, 2a, 3a, \ldots, (p-1)a.$$

   Divida cada uno de estos números por $p$, y asuma que $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_{p-1}$ son los residuos resultantes (i.e. $0 \leq r_i < p$, para cada $1 \leq i \leq p-1$). Demuestre que cada entero entre 1 y $p-1$ ocurre exactamente una vez entre estos residuos.

   **Solución:** Primero que nada, note que no puede ser el caso que $r_i = r_j$, para $i \neq j$. De otra forma, $(i-j) \cdot a$ es divisible por $p$, pero ni $(i-j)$ ni $a$ es divisible por $p$. Además, ningún $r_i$ es 0. De otra forma $i \cdot a$ sería divisible por $p$, pero ni $i$ ni $a$ es divisible por $p$. Por tanto, cada $r_i$ está en el intervalo $[1, p-1]$ y no hay dos $r_i$'s iguales.