UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 4 - Semestre Primavera 2010

1. La *distancia* entre dos nodos distintos v y v' de un grafo simple $G = (V, E)$ es el largo (número de arcos) del camino más corto en G entre v y v'. El diámetro de G es la máxima distancia existente entre dos nodos distintos.

   Demuestre que si el diámetro de un grafo simple G es ≥ 4, entonces el diámetro de su complemento es ≤ 2.

   Recuerde que el complemento de un grafo simple $G = (V, E)$ es el grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$ tal que para cada par $(v.v')$ de nodos en V se tiene que $(v, v') \in \bar{E}$ si y solo si $(v, v') \notin E$.

   Solución: Asuma, por contradicción, que $\bar{G}$ contiene dos nodos u y v a distancia ≥ 3. Demostraremos que el diámetro de G es a lo más 3.

   Sean s y t dos nodos cualquiera en V. Demostraremos que su distancia en G es a lo más 3. Si $(s, t) \notin \bar{E}$ entonces no hay nada que demostrar pues entonces su distancia en G es 1. Asuma entonces que $(s, t) \notin E$. Consideramos varios casos:

   - (s, u) y (v, t) pertenecen a E. Entonces claramente el camino s, u, v, t tiene largo 3.
   - (s, v) y (u, t) pertenecen a E. Simétrico al anterior.
   - (s, u) y (u, t) pertenecen a E. Entonces hay camino de largo 2.
   - (s, v) y (v, t) pertencen a E. Igual al anterior.
   - $(s, u) \in E$, pero ni (u, t) ni (v, t) pertenecen a E. Luego existe camino u, t, v de largo 3 en $\bar{G}$, lo que es una contradicción.
   - $(s, u) \notin E$. Entonces $(s, v) \in E$, pues sino habría camino s, u, v de largo 2 en $\bar{G}$. Además, por la misma razón, (t, u) o (t, v) pertenecen a E. Esto termina la demostración.

2. *a*) Sea G un grafo simple y conexo con al menos 2 nodos. Demuestre que existe un nodo v en G tal que si se saca a v de G (junto a todos los arcos incidentes a v) el grafo sigue siendo conexo.

   b) Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Demuestre que G contiene un camino cuyo largo es al menos $\min \{\deg(v) \mid v \in V\} - 1$.

   Solución: Tome el camino más largo en el grafo. Para el último nodo v se debe tener que todos sus vecinos están contenidos en el camino. Es posible entonces demostrar que $G \setminus \{v\}$ es conexo. La segunda parte usa la misma idea.

3. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple bipartito. Decimos que $E' \subseteq E$ es un *matrimonio* en G, si no existen dos arcos en E' que sean incidentes al mismo nodo, y para todo vértice $v \in V$ existe un arco en E' que es incidente a él.

Para un nodo v en G, defina $N(v)$ como el conjunto de nodos que son adyacentes a v. Si X es un conjunto de vértices en G, entonces definimos $N(X)$ como $\bigcup_{v \in X} N(v)$.

Sea $G = (V, E)$ un grafo bipartito simple y conexo cuyo conjunto de nodos puede ser particionado en V_1 y V_2 (es decir, todos los arcos en E van desde V_1 a V_2). Demuestre que G contiene un matrimonio si y solo si $|V_1| = |V_2|$ y para cada $X \subseteq V_1$ se tiene que $|X| \leq |N(X)|$.

Solución: Es claro que si G contiene matrimonio entonces $|V_1| = |V_2|$ y para cada $X \subseteq V_1$ se tiene que $|X| \leq |N(X)|$. Aquí demostramos la otra dirección.

Sea $v_1, \ldots, v_n$ una enumeración de los nodos de V_1. Iremos construyendo inductivamente, nodo a nodo, un matrimonio para G. Comenzamos con v_1. Dado que $N(v_1) \geq 1$, debe existir al menos un nodo u_1 en V_2 que es adyacente a v_1. El matrimonio empieza asignándole el nodo u_1 a v_1 (pero note que luego esto puede cambiar).

Para el caso inductivo considere el nodo v_{j+1}, $j < n$. Sabemos que v_{j+1} es adyacente a al menos un nodo en V_2. El problema sería que cada nodo u que es adyacente a v_{j+1} ya hubiera sido asignado por el matrimonio a alguno de los nodos $v_1, \ldots, v_j$. (Si esto no ocurriera, simplemente tomamos un nodo u que es adyacente a v_{j+1}, y no ha sido asignado a v_i ($i \leq j$) por el matrimonio, y se lo asignamos a v_{j+1}).

Sea entonces V_1' el conjunto de nodos en $\{v_1, \ldots, v_j\}$ tales que los nodos que le han sido asignados por el matrimonio pertenecen a $N(v_{j+1})$. Tome el conjunto $V_1'' = V_1' \cup \{v_{j+1}\}$. Sabemos que $N(V_1'') \geq V_1''$, y, por tanto, debe existir al menos un nodo u que pertenece a $N(V_1'')$ pero no pertenece a $N(v_{j+1})$. Si este nodo no ha sido asignado por el matrimonio a ningún nodo en $\{v_1, \ldots, v_j\}$ entonces podemos construir un nuevo matrimonio con el siguiente "switching": Sea v_i un nodo en V_1' que es adyacente a u. Entonces el matrimonio le asigna a v_i el nodo u, y a v_{j+1} el nodo que había sido asignado a v_i hasta el paso anterior.

El problema sería que todos los nodos en $N(V_1'')$ hayan sido asignados a los nodos en $\{v_1, \ldots, v_j\}$ por el matrimonio. Sin embargo, no es difícil ver que en ese caso podríamos continuar iterativamente nuestro proceso hasta que "sobre" un nodo. En tal caso realizamos el "switching".