CC3101 — Matemáticas Discretas para Computación

Soluciones Control 3

7 de diciembre de 2016

1. Un grafo G se dice 2-conexo si es conexo y para todo vértice v de G, el grafo $G - v$ es también conexo (donde $G - v$ es el grafo que resulta de G al eliminar v y todas las aristas que inciden en v). Demuestre que un grafo G con al menos tres vértices es 2-conexo si y solo si para cada trío de vértices distintos u, v y w en G, existe un camino entre u y v que no pasa por w.

   Solución: Demostraremos primero la dirección ($\Rightarrow$). Suponga que G es 2-conexo y considere tres vértices u, v, y w cualquiera en G. Como G es 2-conexo si quitamos w del grafo G, el grafo $G - w$ resultante debe ser conexo lo que implica que en $G - w$ hay un camino entre u y v. Note que este camino, digamos P, es también un camino en G que no pasa por w (pues P es un camino en $G - w$). Luego, en G existe un camino entre u y v que no pasa por w. Note que u, v, y w los tomamos como nodos arbitrarios por lo tanto completamos la dirección ($\Rightarrow$).

   Para la dirección ($\Leftarrow$), sea w un vértice cualquiera en G y considere el grafo $G - w$. Demostraremos ahora que $G - w$ es conexo. Para esto basta demostrar que todo par de vértices en $G - w$ tiene un camino que los une. Sean u y v vértices cualquiera de $G - w$. Dado que en G existe un camino entre u y v que no pasa por w, tenemos que existe un camino entre u y v en $G - w$. Como tomamos u y v como vértices arbitrarios demostramos que $G - w$ es conexo. Luego como w es un vértice cualquiera de G, lo que hemos demostrado es que para todo vértice w, el grafo $G - w$ es conexo, lo que implica que G es 2-conexo.

   Puntos: 3 puntos por cada dirección de la demostración.

2. Sea G un grafo con exactamente dos vértices de grado impar que no son vecinos entre si. Sea G' el grafo que se genera desde G agregando una arista entre los dos vértices de grado impar. Demuestre que G' es conexo si y sólo si G es conexo.

   Solución: Suponga que G es conexo entonces claramente G' es conexo pues G' se obtiene desde G agregando una arista y el agregar aristas no puede desconectar al grafo.

   Para la otra dirección, demostraremos primero que ambos nodos de grado impar en G se encuentran en la misma componente conexa. Sean u y v los únicos vértices de grado impar en G y suponga que ellos se encuentran en componentes conexas distintas. Considere el grafo H compuesto por sólo la componente conexa que contiene a u. Note que H e un grafo conexo con exactamente un vértice de grado impar. Esto es una contradicción pues todo grafo tiene una cantidad par de vértices de grado impar.

   Suponga ahora que G no es conexo. Por la propiedad anterior, ambos vértices de grado impar pertenecen a la misma componente conexa en G digamos C. Luego la arista agregada para formar G' es una arista que es interna a C y por lo tanto la cantidad de componentes conexas en G' es la misma que la cantidad de componentes conexas de G lo que implica que G' no es conexo.

   Demostramos que si G es conexo entonces G' es conexo, y que si G no es conexo entonces G' tampoco lo será. lo que completa la demostración.

   Puntos: G conexo $\Rightarrow$ G' conexo: 2 puntos. G no conexo $\Rightarrow$ G' no conexo: 4 puntos

3. Un (k, n)-grafo es un grafo con n nodos todos ellos de grado k. Responda cada una de las siguientes preguntas justificando claramente en cada caso.

   a) ¿Existe un $(6, 15)$-grafo que sea planar?

   b) ¿Existe un $(7, 12)$-grafo que pueda colorearse con dos colores?

   c) ¿Existe un $(7, 12)$-grafo que contenga un ciclo Hamiltoniano?

   Solución:

   a) No. Todo grafo planar debe tener al menos un vértice de grado menor o igual a 5.

   b) No. Para que un grafo sea 2-coloreable este debe ser bipartito. Supongamos que un $(7, 12)$-grafo G es bipartito y sean U y V una bipartición de los vértices. Sea u un vértice en U. Dado que todo que u tiene grado 7 entonces necesariamente el tamaño de V debe ser mayor o igual a 7. Similarmente, tome un vértice cualquiera v en V. Dado que el grado de v es 7 entonces el tamaño de U debe ser mayor o igual a 7. Luego tenemos que $|U| \geq 7$ y $|V| \geq 7$ lo que implica que G tiene al menos 14 nodos, lo que es una contradicción pues G tiene solo 12 nodos.

   c) Si. Considere un grafo G que es una copia de $K_{6,6}$ y enumere los vértices en sus dos particiones como $U = \{u_1, \ldots, u_6\}$ y $V = \{v_1, \ldots, v_6\}$. Note primero que G es un $(6, 12)$-grafo que tiene un ciclo Hamiltoniano. De hecho se puede tomar cualquier secuencia de vértices que alterne entre las particiones, como por ejemplo la secuencia $(v_1, u_1, v_2, u_2, \ldots, v_6, u_6, v_1)$. Convertiremos ahora a G en un $(7, 12)$-grafo. Para esto considere el grafo G' obtenido desde G agregando las aristas u_1u_2, u_3u_4 y u_5u_6 en U y v_1v_2, v_3v_4 y v_5v_6 en V. G' es un $(7, 12)$-grafo y tiene un ciclo Hamiltoniano.

   Puntos: 2 puntos por cada parte.

4. Considere un conjunto de nodos fijos $V = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$. Esta pregunta es acerca de $(7, 10)$-grafos cuyo conjunto de nodos es V (es decir, grafos con conjunto de nodos V, cada nodo con 7 vecinos).

   a) Demuestre que la cantidad de $(7, 10)$-grafos distintos que se pueden formar con V como conjunto de nodos es exactamente

$$9! \ + \ \binom{10}{7} \cdot 6! \cdot 2! \ + \ \binom{10}{6} \cdot 5! \cdot 3! \ + \ \binom{10}{5} \cdot 4! \cdot 4! \ + \ \binom{10}{4} \cdot 3! \cdot \binom{6}{3} \cdot 2! \cdot 2!$$

   b) Demuestre que la cantidad de $(7, 10)$-grafos no isomorfos que se pueden formar con V como conjunto de nodos es 5.

   c) Demuestre que no existe un $(7, 10)$-grafo que sea tres coloreable.

   (Ayuda: tal vez le convenga empezar por la parte (*b*) y pensar en los complementos de los grafos)

   Solución: Comenzaremos por la pregunta (*b*).

   b) Primero note que el complemento de un $(7, 10)$-grafo es un $(2, 10)$-grafo; si G tiene 10 nodos cada uno con 7 aristas, entonces para cada nodo v en G hay exactamente 2 nodos distintos con los que no está conectado. Luego, en el complemento de G, el nodo v tendrá grado 2 y esto ocurre para todos los nodos. De la misma manera, el complemento de cualquier $(2, 10)$-grafo es un $(7, 10)$-grafo. Con esta observación notamos que se puede hacer una biyección entre el conjunto de $(7, 10)$-grafos sobre V y el conjunto de $(2, 10)$-grafos sobre V simplemente asignándole a cada G su complemento. Luego, contar los $(7, 10)$-grafos es equivalente a contar los $(2, 10)$-grafos.

   La siguiente observación es que si en un grafo todos los nodos tienen grado 2, entonces necesariamente el grafo está formado por copias de C_k, o sea, por ciclos. De hecho, cada componente conexa en el grafo es un ciclo de largo al menos 3. Ahora solo queda contar la cantidad de grafos no isomorfos de 10 nodos cuyas componentes son todas ciclos de largo al menos 3. Lo analizamos por casos:

- Caso 1: una componente conexa. En este caso tenemos solo una opción para grafo que es un ciclo que contiene a los 10 vértices.
- Caso 2: dos componentes. En este caso tenemos varias opciones. Las opciones son dos ciclos uno de tamaño 7 y el otro de tamaño 3, o dos ciclos uno de tamaño 6 y el otro de tamaño 4, o dos ciclos ambos de tamaño 5. Note que no existen otras opciones pues el tamaño más pequeño de un ciclo es 3.
- Caso 3: tres componentes. En este caso note que no puede existir un ciclo de tamaño 5 (no alcanzarían los nodos para hacer dos ciclos adicionales), luego el ciclo más grande es de tamaño 4 en cuyo caso los otros dos ciclos deberían ser de tamaño 3. Esta es la única opción pues no puede haber tres ciclos de tamaño exactamente 3 (faltaría un nodo).

No puede haber 4 o más componentes porque para eso se necesitarían al menos 12 vértices. Luego todos los casos posibles son los anteriores. Obtenemos entonces que, si no contamos grafos isomorfos, hay sólo 1 grafo con una única componente, 3 grafos con dos componentes, y 1 grafo con tres componentes lo que da un total de 5 grafos no isomorfos.

a) Dado lo discutido en la parte (*b*) para contar la cantidad de $(7, 10)$-grafos distintos con nodos en $V = \{1, 2, \ldots, 10\}$ basta contar la cantidad de $(2, 10)$-grafos distintos sobre el mismo conjunto de nodos. Por la misma pregunta, sabemos que todas las componentes conexas de los $(2, 10)$-grafos son ciclos (de largo al menos 3). Con esto podemos seguir avanzando.

Lo primero es notar cuántos ciclos distintos puedo hacer con vértices en $\{1, 2, \ldots, n\}$. Si considero todas las permutaciones de posibles nodos obtengo $n!$. Si ponemos cada una de esas permutaciones como nodos en un ciclo, habrá varias permutaciones que generarán el mismo ciclo. Por ejemplo la permutación $1, 2, 3, \ldots, n$ y la permutación $4, 5, \ldots, n, 1, 2, 3$ generan exactamente el mismo ciclo. De hecho no es difícil notar que todos los "desplazamientos" (o *shifts*) de una permutación generarán el mismo ciclo, y como cada permutación se puede desplazar n veces, entonces la cantidad total de ciclos distintos es $n!/n$, o sea, $(n - 1)!$ (hay muchas formas de obtener este mismo resultado).

Ahora podemos usar los mismos casos de la pregunta (*b*) para contar los distintos grafos.

- Caso de una componente conexa. En este caso tenemos sólo un ciclo con vértices en $\{1, 2, \ldots, 10\}$ lo que nos da un total de 9! grafos distintos.
- Caso de dos componentes. Analicemos opción a opción. Para el caso de un ciclo de tamaño 7 y el otro de tamaño 3, tenemos en total

  $$\binom{10}{7} \cdot 6! \cdot 2!$$

  grafos distintos, esto porque primero debemos elegir 7 nodos entre los 10 que completarán el primer ciclo, y para esta elección hay 6! maneras de poner los nodos del ciclo de largo 7 y 2! maneras de poner los nodos en el ciclo de largo 3. Para el caso de un ciclo de tamaño 6 y el otro de tamaño 4, por un argumento similar obtenemos que la cantidad de grafos distintos es

  $$\binom{10}{6} \cdot 5! \cdot 3!$$

  (debemos elegir 6 nodos para el ciclo más grande y ordenar los nodos en un ciclo de largo 6 y en otro de largo 4). Finalmente, siguiendo un argumento similar, para el caso de dos ciclos ambos de tamaño 5 la cantidad de grafos es

  $$\binom{10}{5} \cdot 4! \cdot 4!$$

- Caso de tres componentes. En este caso sabemos que tenemos un ciclo de largo 4 uno de largo 3 y otro de largo 3. La cantidad de grafos distintos se obtendrá entonces eligiendo primero

4 de 10 nodos y ordenándolos en un ciclo, de los restantes 6 eligiendo 3 para ordenarlos en un ciclo y finalmente ordenar los restantes en otro ciclo (ambos ciclos de largo 3). En total tendremos

$$\binom{10}{4} \cdot 3! \cdot \binom{6}{3} \cdot 2! \cdot 2!$$

grafos distintos en este caso.

Finalmente, como contamos los grafos por separado considerando la cantidad de componentes conexas, la regla de la suma me dice que el total de grafos simplemente será la suma obteniendo

$$9! \;+\; \binom{10}{7} \cdot 6! \cdot 2! \;+\; \binom{10}{6} \cdot 5! \cdot 3! \;+\; \binom{10}{5} \cdot 4! \cdot 4! \;+\; \binom{10}{4} \cdot 3! \cdot \binom{6}{3} \cdot 2! \cdot 2!$$

c) En este caso también consideraremos la parte (b). Demostraremos que todo $(2,10)$-grafo tiene un conjunto independiente de tamaño 4, lo que implica que todo $(7,10)$-grafo tiene un clique de tamaño 4 y por lo tanto no puede ser coloreado con 3 colores (al menos 4 colores se necesitan para colorear K_4).

También podemos proceder por casos:

- Caso de una componente conexa. En este caso tenemos sólo un ciclo de largo 10. Suponga que los vértices en el ciclo se enumeran como $(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{10})$, en este caso el conjunto $\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$ es un conjunto independiente de tamaño 4.
- Caso de dos componentes. En este caso tenemos varias opciones. Suponga primero el caso con un ciclo de tamaño 7 digamos $(v_1, v_2, \ldots, v_7)$ y un ciclo de tamaño 3, digamos (u_1, u_2, u_3). En este caso podemos tomar el conjunto $\{v_1, v_3, v_5, u_1\}$ y será un conjunto independiente. Para el caso con un ciclo de tamaño 6 digamos $(v_1, v_2, \ldots, v_6)$ y otro de tamaño 4 digamos (u_1, u_2, u_3, u_4), podemos tomar el conjunto $\{v_1, v_3, u_1, u_3\}$. La misma idea funciona para dos ciclos de tamaño 5.
- Caso de tres componentes. En este caso tenemos un ciclo de tamaño 4, digamos (v_1, v_2, v_3, v_4) y dos ciclos de tamaño 3, digamos (u_1, u_2, u_3) y (w_1, w_2, w_3). El conjunto $\{v_1, v_3, u_1, w_1\}$ es un conjunto independiente.

Esto termina la demostración de que todo $(2,10)$-grafo tiene un conjunto independiente de tamaño 4 y por lo tanto todo $(7,10)$-grafo tiene un clique de tamaño 4 y por lo tanto no es 3-coloreable.

Puntos: 2 puntos por cada parte.