UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 4 - Semestre Otoño 2010

1. Un *torneo* es un grafo simple y dirigido tal que si u y v son vértices distintos en el grafo, entonces exactamente uno de los arcos (u, v) o (v, u) pertenece al grafo.

   Demuestre que todo torneo tiene un camino hamiltoniano.

   Solución: Por inducción en el número n de vértices. Para $n = 1$ es trivial.

   Asuma que G tiene $n + 1$ vértices. Remueva un vértice v cualquiera de G. Entonces $G' = G \setminus \{v\}$ es un torneo, y, por hipótesis inductiva tiene camino hamiltoniano desde nodo u a u'. Si (v, u) o (u', v) son arcos en G entonces existiría camino hamiltoniano en G (desde v a u' o desde u a v).

   Asuma, por el contrario, que (u, v) y (v, u') son arcos en G. Entonces debe existir nodo u'' tal que (u'', v) y (u''', v) son arcos en G, donde u''' es el nodo que viene inmediatamente después que u'' en el camino hamiltoniano de G'. Concluimos que G tiene como camino hamiltoniano el que empieza en u, sigue el camino hamiltoniano de G' hasta u'', visita v, vuelve a u''', y luego sigue el camino hamiltoniano de G' hasta u'.

2. Asuma que $G = (V, E)$ es un grafo conexo, simple y planar, con al menos una región interna, tal que V tiene al menos $k \geq 3$ vértices. Asuma además que G no tiene circuitos de largo estrictamente menor a k.

   Demuestre que $|V| \geq (|E|(k - 2) + 2k)/k$.

   Solución: Dado que cada región tiene al menos k vértices, tenemos que si R es el conjunto de regiones de G entonces
   $$2|E| = \sum_{r \in R} deg(r) \geq k|R|.$$

   Por teorema de Euler, $|R| = |E| - |V| + 2$. Por tanto, $2|E| \geq k(|E| - |V| + 2)$. Resolviendo se obtiene fácilmente que $|V| \geq (|E|(k - 2) + 2k)/k$.

3. Un spanning tree *dirigido* de un grafo dirigido simple $G = (V, E)$ es un árbol dirigido T (con raíz) que consiste de algunos de los arcos en G, y tal que cada vértice de G (salvo la raíz) es el punto final de algún arco en T.

   Demuestre que si G es un grafo dirigido simple y conexo en que cada vértice tiene el mismo grado de entrada que de salida, entonces G tiene un spanning tree dirigido.

   Solución: Dado que cada vértice tiene el mismo grado de entrada que de salida, G tiene un circuito euleriano. Elija un nodo cualquiera v en G (que será la raíz del spanning tree). Recorra el circuito desde v, y elimine cada arco que produce un ciclo. No es difícil ver que esto forma un spanning tree dirigido de G.