UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 3 - Semestre Otoño 2016

1. (1,5pts) En este ejercicio consideramos grafos no dirigidos que permiten arcos paralelos (es decir, un par de nodos puede estar unido por más de un arco) y *loops* (es decir, arcos que unen a un nodo consigo mismo). Note que un loop en un nodo v incrementa su grado en 2.

   Recuerde que la *secuencia de grados* de un grafo no dirigido con arcos paralelos y loops es la secuencia de los grados de sus nodos escrita en orden no creciente. Sea

   $$d_1, d_2, \ldots, d_n$$

   una secuencia no creciente de enteros positivos cuya suma es par. Demuestre que existe un grafo no dirigido con arcos paralelos y loops cuya secuencia de grados es precisamente $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

   Solución: Ponga n nodos $v_1, \ldots, v_n$. Agregue $\lfloor d_i/2 \rfloor$ loops en v_i. En este momento el grado de v_i es d_i o $d_i - 1$ (si d_i es par o impar, respectivamente). Dado que la suma de los d_j's es par, el número de nodos v_i cuyo grado es $d_i - 1$ es par. Agrupe estos nodos en pares y conecte cada par con un nuevo arco. Es claro que el grafo resultante tiene como secuencia de grados a $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

2. (2pts) Sean $G = (V, E)$ y $G' = (V', E')$ dos grafos simples. Un *homomorfismo* de G en G' es una función $f : V \to V'$ tal que para cada arco $\{u, v\} \in E$ se cumple que $\{f(u), f(v)\} \in E'$. Escribimos $G \to G'$ cuando existe homomorfismo de G en G'.

   Recuerde que C_n denota al ciclo de n vértices, para $n \geq 3$. Sean $n, m \geq 3$. Demuestre que $C_n \to C_m$ si y solo si n es par, o m es impar y $m \leq n$.

   Solución: Asuma primero que n es par y suponga que el ciclo C_n está dado por arcos

   $$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}.$$

   Considere un arco $\{u, v\}$ cualquiera en C_m. Podemos entonces construir un homomorfismo f de C_n en C_m mapeando los nodos $v_1, v_3, v_5, \ldots$ en u y $v_2, v_4, v_6, \ldots$ en v (ya que n es par).

   Asuma ahora que n es impar, m es impar, y $m \leq n$. Note que $n - m$ es par. Por tanto, podemos mapear C_n en C_m de la siguiente forma: Los primeros $m + 1$ nodos $v_1, \ldots, v_m$ de C_n se mapean siguiendo el ciclo C_m (comenzando en un nodo cualquiera u, donde se mapean tanto c_1 como c_{m+1}). Quedan $n - m - 1$ nodos por mapear. Pero estos los podemos repartir entre u y uno de sus vecinos como lo hicimos en el caso anterior.

   Asuma ahora que n es impar, pero m es par. Luego, $C_m \to C_2$. Asuma por contradicción que $C_n \to C_m$. Luego, $C_n \to C_2$, lo que implica que C_2 puede ser coloreado con 2 colores. Esto es una contradicción ya que n es impar.

   Asuma finalmente que n es impar, m es impar, pero $m > n$. Para volver al mismo punto de partida en C_n en m pasos la única posibilidad es avanzar un número par de pasos. Esto contradice el hecho de que n es impar.

3. (2,5pts) Sea $s(n)$ el número de secuencias $(x_1, \ldots, x_k)$ de enteros, tal que $1 \leq x_i \leq n$ para cada $1 \leq i \leq k$, y $x_{i+1} \geq 2x_i$ para cada $1 \leq i < k$. (Note que el largo de la secuencia no está especificado, y, en particular, la secuencia vacía se haya incluída).

   a) (1,2pts) Asumiendo que $s(0) = 1$, demuestre que para todo $n \geq 1$ se cumple que:

   $$s(n) \;=\; s(n-1) + s(\lfloor n/2 \rfloor).$$

   Ayuda: Considere por separado las secuencias que contienen a n y aquellas que no.

   Solución: Sea $S(n)$ el conjunto de secuencias $(x_1, \ldots, x_k)$ de enteros, tal que $1 \leq x_i \leq n$ para cada $1 \leq i \leq k$, y $x_{i+1} \geq 2x_i$ para cada $1 \leq i < k$. Entonces, $s(n) = |S(n)|$. Note que las secuencias en $S(n)$ que no contienen a n son precisamente aquellas en $S(n-1)$. Esto aporta el primer término. Ahora, si la secuencia $(x_1, \ldots, x_k)$ en $S(n)$ contiene a n, este debe ser el último elemento x_k. Luego, $x_i \leq \lfloor n/2 \rfloor$ para todo $1 \leq i < k$. Esto significa que $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ es una secuencia en $S(\lfloor n/2 \rfloor)$, lo que aporta el segundo término.

   b) (0,5pts) Utilizando lo anterior, demuestre que $s(n) \leq n \cdot s(\lfloor n/2 \rfloor)$, para todo $n \geq 2$.

   Solución: Sabemos que

   $$\begin{array}{rcl} s(n) & = & s(n-1) + s(\lfloor n/2 \rfloor) \\ & \leq & s(n-2) + 2s(\lfloor n/2 \rfloor) \\ & \leq & s(n-3) + 3s(\lfloor n/2 \rfloor) \\ & & \ldots \\ & \leq & s(n - \lceil n/2 \rceil) + \lceil n/2 \rceil \cdot s(\lfloor n/2 \rfloor) \\ & \leq & (\lceil n/2 \rceil + 1) \cdot s(\lfloor n/2 \rfloor). \end{array}$$

   Concluímos que $s(n) \leq n \cdot s(\lfloor n/2 \rfloor)$ cuando $n \geq 2$.

   c) (0,8pts) Concluya que $s(n)$ es $O(n^{\log n})$.

   Solución: De lo anterior tenemos que si $n = 2^k$ entonces:

   $$\begin{array}{rcl} s(n) & \leq & n \cdot s(n/2) \\ & \leq & n^2/2 \cdot s(n/4) \\ & & \ldots \\ & \leq & n^k/2^{k-1} \cdot s(1). \end{array}$$

   Considere un n tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Como $s(n)$ es no decreciente, tenemos que $s(n) \leq s(2^{k+1})$. Luego, $s(n) \leq 2^{(k+1)^2}/2^k \cdot s(1) = 2^{k^2+k+1} \cdot s(1)$. Dado que $k \leq \log n$, tenemos que $s(n)$ es $O(2^{\log^2 n}) = O((2^{\log n})^{\log n}) = O(n^{\log n})$.