



Auxiliar 6

Lunes 8 de Mayo, 2017

P1. Definimos la fórmula φ sobre el vocabulario que solo contiene el símbolo relacional R .

$$\varphi = \forall x \exists y (R(x, y) \wedge x \neq y) \wedge \forall x \forall y R(x, y) \rightarrow R(y, x) \wedge \forall x \forall y \forall z R(x, y) \wedge R(x, z) \rightarrow y = z$$

Pruebe que:

- Dado un conjunto A de cardinalidad finita y par, existe una interpretación de R sobre A tal que la estructura de $(A; R) \models \varphi$.
- No existe ninguna estructura \mathcal{B} que interpreta el vocabulario ν tal que $\mathcal{B} \models \varphi$ y que \mathcal{B} tenga dominio finito e impar.

P2. 15 computines y 10 matemáticos se juntan para organizar un torneo de Catán. Entre ellos, deben elegir un comité de 8 personas para que decida las reglas del torneo.

- ¿De cuantas formas se puede elegir el comité si es que éste debe tener 4 matemáticos y 4 computines?
- ¿De cuantas formas se puede elegir si es que el comité debe tener más computines que matemáticos?
- ¿De cuantas formas puede elegirse el comité si es que este debe tener al menos 2 matemáticos?
- Suponga ahora que el comité se elige de manera totalmente aleatoria ¿Cuál es la probabilidad que todos los elegidos sean computines?
- Debido a lo entretenido de la actividad y la cantidad de tiempo que les toma, entre este grupo se comienzan a formar amistades y grupos de amigos. Si consideramos como una amistad aquella que se da entre 2 personas ¿Cuántas amistades distintas se pueden formar? ¿Cuántos grupos de tamaño k se pueden formar?

P3. Sean $m, n, k \in \mathbb{N}$. Pruebe combinatorialmente lo siguiente:

- Suponga $m, n \geq 2$

$$\binom{m+n}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn$$

- Suponga $k \leq n, m$

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$

- Suponga $k \leq n \leq m$

$$\binom{m}{n} \binom{n}{k} = \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k}$$

P4. Sea φ el vocabulario que contiene los símbolos relacionales $<$ (menor que) y $|$ (divide a). Expresese mediante el uso de la lógica proposicional y las relaciones de φ las siguientes propiedades de números naturales:

- p es primo.
- p es impar (Ojo, no puede usar sumas o similar en su fórmula, solo las relaciones dadas).