



Auxiliar 4

Miercoles 26 de Abril, 2017

P1. En esta parte trabajaremos con los strings formados solamente por letras a y b de largo menor o igual a n . Para describirlos definiremos algunas relaciones sobre el conjunto $\{0, 1, \dots, n-1\}$. La primera es la relación binaria $<$ que es el orden usual en los naturales. Las otras dos son las relaciones unarias A y B tales que $A(i)$ es cierto si en la posición i del string hay una a y $B(i)$ es cierto en el caso de que haya una b . Vale la pena mencionar que en cada posición del string puede haber solo una letra. Dadas estas definiciones queremos describir los siguientes strings usando lógica relacional.

a) s parte con una a y termina con una b

Solución:

Primero decimos que el primer caracter es una a : $\varphi_1 = \forall x \neg y(y < x \rightarrow A(x))$

Luego de forma similar que el último es una b $\varphi_2 = \forall x \neg y(x < y \rightarrow B(y))$

Luego la conjunción es $\varphi_1 \wedge \varphi_2$

b) todas las letras en s son iguales

$$(\forall x A(x)) \vee (\forall y B(y))$$

c) s tiene siempre una a después de cada b

Esta pregunta se podía interpretar de dos formas, la primera es que hay una a después de cada b pero no tiene por que ser inmediatamente después:

$$(\forall x) B(x) \rightarrow \exists y (x < y \wedge A(y))$$

Para la otra interpretación necesitamos definir la relación sucesor:

$$\text{succ}(y, x) \leftrightarrow (\neg \exists z) x < z \wedge z < y \wedge x < y$$

Luego para decir que toda a está seguida inmediatamente de una b :

$$\forall x B(x) \rightarrow \exists y \text{succ}(y, x) \wedge A(y)$$

Con esto decimos que si en la posición x hay una b , entonces existe un $y = x+1$ y que en esa posición hay una a . Es importante que en la lógica relacional solo podemos operar con las relaciones que se nos definen en el enunciado, por ejemplo en este caso no tenemos la suma definida, es decir que no la podemos usar.

d) las a y las b en s están intercaladas y s tiene una cantidad par de letras.

Usamos la misma relación $\text{succ}(y, x)$ de la parte anterior.

Con esto definido primero diremos que estén intercaladas las a y b :

$$\varphi_1 = \forall x \forall y \text{succ}(y, x) \rightarrow (A(x) \wedge B(y)) \vee (B(x) \wedge A(y))$$

Luego vemos que si el largo es par, el string debe comenzar y terminar con elementos diferentes:

$$\varphi_2 = \forall x \forall y (\neg \exists z z < x \wedge \neg \exists w y < z \rightarrow (A(x) \wedge B(y)) \vee (B(x) \wedge A(y)))$$

P2. Supongamos una barra de chocolate dividida en cuadritos. Esta tiene m columnas y k filas de cuadrados. Suponga que cada vez que tenemos una pieza de chocolate con al menos 2 cuadrados la cortamos vertical o horizontalmente (es decir, sin romper los cuadritos). Pruebe que luego de $mk - 1$ pasos habremos cortado el chocolate en todos sus cuadritos.

Solución: Vamos a usar inducción fuerte, para esto definiremos la propiedad que buscamos:

$P(m, k) \leftrightarrow$ Al cabo de $mk - 1$ cortes el chocolate queda como puros cuadritos

Caso base: Notemos que si tenemos un chocolate de un cuadrito no hace falta cortarlo, por lo tanto al cabo de 0 pasos $(1 \times 1 - 1)$ tendremos puros cuadrados sueltos. es decir $P(1)$

Caso inductivo: Tenemos que $(\forall m \forall k) mk < n + 1 \rightarrow P(m, k)$ en palabras: todos los chocolates con un total de cuadritos menor a $(n + 1)$ cumplen la propiedad que buscamos.

Queremos demostrar $(\forall m \forall k) mk = n + 1 \rightarrow P(m, k)$:

Cortamos nuestro chocolate de cualquier forma (con esto llevamos un corte).

Obtenemos 2 chocolates como resultado, cada uno con por lo menos un cuadradito:

Choc₁ con m_1 filas y k_1 columnas y Choc₂ con m_2 filas y k_2 columnas. Como juntos conforman el chocolate entero, se tiene que $m_1 k_1 + m_2 k_2 = mk = n + 1 (*)$

Pero $m_1 k_1 < n + 1$ y $m_2 k_2 < n + 1$ ya que tanto choc₁ como choc₂ tienen al menos un cuadradito.

Esto quiere decir (por hipótesis inductiva) que se cumple $P(m_1, k_1) \wedge P(m_2, k_2)$ entonces, al cabo de $m_1 k_1 + m_2 k_2 - 2$ cortes cada uno de estos sub chocolates quedarán reducidos a cuadraditos. Agregamos el corte inicial y usamos la propiedad (*) para obtener que al cabo de $mk - 1$ cortes el chocolate se tiene que haber separado en cuadraditos. Es decir $P(m, k)$.

Es importante resaltar que la inducción se hizo sobre n , la cantidad total de cuadraditos. Luego en el caso inductivo demostramos que se tiene independientemente de si es un chocolate muy largo y fino o si es un cuadrado.

P3. Sea $f : N^+ \rightarrow N$ una funcion definida como sigue

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 2 \cdot f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$

Demuestre utilizando induccion fuerte que $f(n)$ es $O(n \log n)$

hint: recuerde que $\log_2(x) * \log(2) = \log(x)$

Solución:

Primero usaremos la indicación para notar que $n \log(n) = Ln \log_2(n)$ con $L = 1/\log(2)$.

Ahora, por definición:

$f(n)$ es $O(n \log(n)) \leftrightarrow (\exists k, \exists C > 0, \forall n > k) f(n) < Cn \log(n)$

No podemos comenzar la inducción en $n = 1$ ya que $1 \log(1) = 0$ y $f(1) = 1$. Entonces no existe ninguna constante positiva que cumpla $1C < 0$.

Dado que no pudimos partir en 1 veamos si funciona en $n = 2$.

$$f(2) = 2 \cdot f(1) + 2 = 4$$

$$2 \log(2) = 2L \log_2(2) = 2L$$

Si tomamos nuestra constante $C = 4/L$

$$4 = f(2) < 8 = \frac{4}{L} \cdot L 2 \log_2(2) = Cn \log(n)$$

Tomamos $n = 2$ como nuestro caso base.

Paso inductivo:

Supongamos que $\forall m, 2 \leq m \leq n$ se cumple $f(m) < Cm \log(m)$

Ahora vamos a comprobar que también se cumple para $n + 1$.

$$f(n + 1) = 2 \cdot f(\lfloor \frac{n + 1}{2} \rfloor) + n + 1$$

Por hipótesis inductiva tenemos que:

$$f(\lfloor \frac{n + 1}{2} \rfloor) < C \cdot \lfloor \frac{n + 1}{2} \rfloor \log(\lfloor \frac{n + 1}{2} \rfloor)$$

Si multiplicamos por 2 ambos lados obtendremos:

$$2f(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) < 2C \cdot \lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor \log(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor)$$

y como $\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor \leq \frac{n+1}{2}$ (*):

$$2f(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) < 2C \cdot \frac{(n+1)}{2} \log(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) = C \cdot (n+1) \log(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor)$$

Si ahora sumamos la desigualdad $(n+1) < C(n+1)$ a ambos lados:

$$2f(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) + (n+1) < C \cdot (n+1) \log(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) + C(n+1)$$

Usamos que $\log_2(2) = 1$ y por lo tanto $(n+1) = \log(2) \cdot (n+1)$

$$2f(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) + (n+1) < C \cdot (n+1) \log(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) + C \cdot (n+1) \cdot \log_2(2)$$

Factorizando:

$$2f(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) + (n+1) < C(n+1) \left(\log(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) + \log_2(2) \right)$$

Que es lo mismo que:

$$2f(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) + (n+1) < C(n+1) \left(\log(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor \cdot 2) \right)$$

Por el argumento de (*) y e:

$$2f(\lfloor \frac{(n+1)}{2} \rfloor) + (n+1) < C(n+1) \log(n+1)$$

Reemplazamos $f(n+1)$:

$$f(n+1) < C(n+1) \log(n+1)$$

P4. Muestre que las siguientes proposiciones son siempre ciertas:

a) $(\forall x)(\exists y)(P(x) \rightarrow P(y))$

Solución: Para cada x puedo tomar $y = x$, con esto obtengo:

$$\forall x P(x) \rightarrow P(x)$$

Lo cual siempre es cierto, por lo tanto probé que para cualquier x existe al menos un y que cumple.

b) $(\exists y)(\forall x)(P(x) \rightarrow P(y))$

Solución: Consideremos dos casos:

Caso 1: $\forall x P(x)$

Entonces cualquier y nos sirve, ya que $P(y) \rightarrow V$ es siempre cierto

Caso 2: $\exists x \neg P(x)$ Basta con tomar y como uno de esos x , entonces se tendría $\neg P(y)$ y falso implica cualquier cosa.

P5.

- Una fórmula de la lógica proposicional $\mathcal{L}(P)$ está en $3CNF$ si es de la forma:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (l_i^1 \vee l_i^2 \vee l_i^3), \quad (1)$$

donde para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq 3$ se tiene que existe $p \in P$ tal que $l_i^j = p$ ó $l_i^j = \neg p$. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s \vee r)$ es una fórmula en $3CNF$, pero $p \vee (r \wedge q)$ no lo es.

Sea R una relación binaria sobre A . Un *cubrimiento* de R es un $S \subseteq A$ tal que para cada par $(a, b) \in R$ se tiene que $a \in S$ o $b \in S$.

Dada una fórmula φ en $3CNF$ como en la Ecuación (1), se le pide construir un conjunto A y una relación binaria R sobre A tal que:

$$\varphi \text{ es satisfacible} \iff R \text{ tiene un cubrimiento de tamaño } 2n.$$

El costo de todos los pasos efectuados en su construcción debe ser a lo más $O(n^k)$, para un $k \geq 1$ fijo (es decir, que no depende de φ).

Hint: El conjunto A consiste de los elementos $\{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$ que representan los diferentes literales que ocurren en φ . La relación R se define sobre A de tal forma que el complemento de cualquiera de sus cubrimientos de tamaño $2n$ codifica una valuación $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$ que satisface φ , y correspondientemente, toda valuación $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$ que satisface φ naturalmente define el complemento de un cubrimiento de A de tamaño $2n$.