Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile
CC3101-01 Matemáticas de Discoteca para la Computación

Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Tomás Martínez, Ignacio Riego

Auxiliar 4

Miercoles 26 de Abril, 2017

P1. En esta parte trabajaremos con los strings formados solamente por letras a y b de largo menor o igual a n. Para describirlos definiremos algunas relaciones sobre el conjunto $\{0, 1, ..., n-1\}$. La primera es la relacion binaria $<$ que el es orden usual en los naturales. Las otras dos son las relaciones unarias A y B tales que $A(i)$ es cierto si en la posición i del string hay una a y $B(i)$ es cierto en el caso de que haya una b. Vale la pena mencionar que en cada posición del string puede haber solo una letra. Dadas estas definiciones queremos describir los siguientes strings usando lógica relacional.

a) s parte con una a y termina con una b

b) todas las letras en s son iguales

c) s tiene siempre una a despues de cada b

d) las a y las b en s están intercaladas y s tiene una cantidad par de letras.

P2. Supongamos una barra de chocolate dividida en cuadritos. Esta tiene m columnas y k filas de cuadrados. Suponga que cada vez que tenemos una pieza de chocolate con a lo menos 2 cuadrados la cortamos vertical o horizontalmente (es decir, sin romper los cuadraditos). Pruebe que luego de $mk-1$ pasos habremos cortado el chocolate en todos sus cuadraditos.

P3. Sea $f : N^+ \to N$ una funcion definida como sigue

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 2 \cdot f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + n & \text{if } n \geq 2 \end{cases}$$

Demuestre utilizando induccion fuerte que f(n) es O(nlogn)

hint: recuerde que $\log_2(x) * \log(2) = \log(x)$

P4. Muestre que las siguientes proposiciones son siempre ciertas:

a) $\forall x\, \exists y\, (P(x) \to P(y))$

b) $\exists y\, \forall x\, (P(x) \to P(y))$

P5.

- Una fórmula de la lógica proposicional $\mathcal{L}(P)$ está en *3CNF* si es de la forma:

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (l_i^1 \vee l_i^2 \vee l_i^3), \tag{1}$$

donde para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq 3$ se tiene que existe $p \in P$ tal que $l_i^j = p$ ó $l_i^j = \neg p$. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s \vee r)$ es una fórmula en 3CNF, pero $p \vee (r \wedge q)$ no lo es.

Sea R una relación binaria sobre A. Un *cubrimiento* de R es un $S \subseteq A$ tal que para cada par $(a, b) \in R$ se tiene que $a \in S$ o $b \in S$.

Dada una fórmula φ en 3CNF como en la Ecuación (1), se le pide construir un conjunto A y una relación binaria R sobre A tal que:

$$\varphi \text{ es satisfacible} \iff R \text{ tiene un cubrimiento de tamaño } 2n.$$

El costo de todos los pasos efectuados en su construcción debe ser a lo más $O(n^k)$, para un $k \geq 1$ fijo (es decir, que no depende de φ).