Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Chile
CC3101-01 Matemáticas de Discoteca para la Computación

Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Tomás Martínez, Ignacio Riego

Auxiliar 3

Miercoles 5 de de Marzo, 2017

P1. [1] Definimos el conjunto $\mathcal{T}$ de los términos sobre el símbolo de función `f(·,·)` y la variable `x`, por inducción como sigue:

- `x` $\in \mathcal{T}$
- si $t_1 \in \mathcal{T}$ y $t_2 \in \mathcal{T}$, entonces `f(`t_1`,`t_2`)` $\in \mathcal{T}$

Por ejemplo `x`, `f(x,x)` y `f(x,f(x,x))` están en $\mathcal{T}$.

1. Defina la operación $|\cdot| : \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ que dado un elemento t en $\mathcal{T}$ entrega el largo de t en donde cada símbolo `f`, `x`, `(`, `)`, y `,` se consideran como de largo uno. Por ejemplo, $|$`f(x,f(x,x))`$| = 11$.
2. Defina por inducción la operación ani : $\mathcal{T} \to \mathbb{N}$ tal que para $t \in \mathcal{T}$, ani(t) es la máxima anidación de la función `f` en t. Por ejemplo, ani(`f(f(x,x),f(x,x))`) $= 2$ y ani(`f(f(f(x,x),x),x)`) $= 3$.
3. Encuentre una función $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $t \in \mathcal{T}$ se tiene que $|t| \leq h(\text{ani}(t))$ y demuestre por inducción que esta propiedad se cumple.

- Solución:

1. Definimos la operación de forma inductiva:
   Caso base: $|x| = 1$
   Caso inductivo: $|f(t_1, t_2)| = 4 + |t_1| + |t_2|$ con $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$
   El $+4$ sale de $f(,)$ que son cuatro caracteres.
2. Nuevamente definimos inductivamente: Caso base: $ani(x) = 0$, $ani(f(x,x)) = 1$
   Caso inductivo: $ani(f(t_1, t_2)) = 1 + max(ani(t_1), ani(t_2))$, t_1, t_2 con $\in \mathcal{T}$
   En esta caso no era necesario tener 2 casos base pero ayudan a clarificar y no perjudican la demostración.
3. En esta caso podemos aprovecharnos de la forma en que definimos las partes anteriores para encontrar un h conveniente. Primero podemos explorar un poco el problema, por ejemplo si tomamos una formula con 1 anidacion $f(x,x)$ y la anidamos una vez más, por ejemplo $f(f(x,x), f(x,x))$ la anidación subió en 1 mientras que el largo más que se duplicó. Esto nos hace intuir que cuando la anidación sube el largo de la fórmula puede duplicarse o más. Esto nos indica que para equiparar las funciones debemos usar algo del estilo de 3^n.
   Probamos con $3^n + a$ con a por definir
   Casos base:
   $|x| = 1 \leq h(ani(x)) = h(0) = a + 1$
   $|f(x,x)| = 6 \leq h(ani(f(x,x))) = h(1) = 3 + a$
   Con esto vemos que a debe ser al menos 3, para asegurarnos consideremos $a = 4$
   Caso inductivo: Sabemos que:
   $$|t_1| \leq h(ani(t_1))$$
   y lo mismo para t_2 y sabemos que $ani(t_1)$ y $ani(t_1)$ son iguales o mayores que 2 por los casos base.
   Ahora vemos que pasa con $|f(t_1, t_2)|$
   $$|f(t_1, t_2)| = 4 + |t_1| + |t_2|$$
   Por que dijimos antes

[1] Tarea 1, 2016/2

$$|f(t_1,t_2)| = 4 + |t_1| + |t_2| \leq 4 + h(ani(t_1)) + h(ani(t_2)) = 4 + 2 * a + 3^{ani(t_1)} + 3^{ani(t_2)}$$

Por la definiciíon sabemos que $ani(f(t_1,t_2)) = 1 + max(ani(t_1), ani(t_2))$, con esto

$$|f(t_1,t_2)| \leq 4 + 2 * a + 3^{ani(t_1)} + 3^{ani(t_2)} \leq 4 + 2 * a + 2 * 3^{max(ani(t_1),ani(t_2))}$$

Así nos vamos acercando a $ani(f(t_1,t_2))$ que es lo que queremos. Ahora, 4 + a = 8 (recuerda que a = 4). Esto quiere decir que $4 + a \leq 3^{max(ani(t_1),ani(t_2))}$.

$$|f(t_1,t_2)| \leq 4+2*3^{max(ani(t_1),ani(t_2))} \leq a+3^{max(ani(t_1),ani(t_2))}+2*3^{max(ani(t_1),ani(t_2))} = a+3*3^{max(ani(t_1),ani(t_2))}$$

Y esto convenientemente es:

$$|f(t_1,t_2)| \leq a + 3 * 3^{max(ani(t_1),ani(t_2))} = a + 3^{1+max(ani(t_1),ani(t_2))} = a + 3^{f(t_1,t_2)} = h(f(t_1,t_2))$$

Es decir, nuestro $h = 4 + 3^n$ funciona.

P2. Recuerde que el dominio constructible de las expresiones aritméticas $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ se define por:

- Si k es natural, entonces k es una expresión.
- Si E_1 y E_2 son expresiones, entonces $E_1 + E_2$ es una expresión.
- Si E_1 y E_2 son expresiones, entonces $E_1 * E_2$ es una expresión.
- Si E es una expresión, entonces (E) es una expresión.

a) Defina inductivamente en la construcción de $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ el operador $\#_{op} : \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de operadores aritméticos (+ y *) de una expresión.

Solución:
Sea k natural, entonces k es una expresión, luego la cantidad de operadores de k es $\#_{op}(k) = 0$.
Hipótesis inductiva: E_1 tiene $\#_{op}(E_1)$ operaciones y E_2 con $\#_{op}(E_2)$ operaciones.

Veamos que $E_1 + E_2$ es una expresión y $\#_{op}(E_1 + E_2) = \#_{op}(E_1) + \#_{op}(E_2) + 1$ que es la cantidad de operadores por hipótesis y el nuevo operador entre las expresiones.
Análogamente $E_1 * E_2$ es una expresión y $\#_{op}(E_1 * E_2) = \#_{op}(E_1) + \#_{op}(E_2) + 1$ que es la cantidad de operadores por hipótesis y el nuevo operador entre las expresiones.
Finalmente $\#_{op}((E_1)) = \#_{op}(E_1)$ por lo que se suma a los operadores que contiene E_1.

b) Defina inductivamente en la construcción de $/mathcal E_{\mathbb{N}}$ el operador $\#_{num} : \mathcal{E}_{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de naturales que aparecen en una expresión.
Solución:
Sea k natural, entonces k es una expresión, luego la cantidad de naturales que aparecen en la expresión es uno, k. Luego $\#_{num}(k) = 1$.
Definamos por medio de inducción fuerte a E. Sea E formado por dos expresiones y un operador $E_1 + E_2$ por hipótesis inductiva esto es $\#_{num}(E_1) + \#_{num}(E_2)$ que es la cantidad de naturales que aparecen en cada expresión, y como el operador no cambia esta cantidad entonces la suma de naturales de ambas expresiones entrega el valor total de naturales $\#_{num}(E)$. Análogamente para $E_1 * E_2$ por hipótesis $\#_{num}(E_1) + \#_{num}(E_2)$ es el valor total de naturales en E. Por último, sea E expresión con $\#_{num}(E)$ naturales, entonces (E) posee la misma cantidad de naturales.

c) Demuestre por inducción en la construcción de $\mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ que para toda expresión $E \in \mathcal{E}_{\mathbb{N}}$ se cumple:

$$\#_{op}(E) = \#_{num}(E) - 1$$

Solución:

Caso base: Sea k natural, entonces k es expresión, sigue que $\#_{op}(k) = 0$ y $\#_{num}(k) = 1$ por la definición anterior, luego se tiene que $\#_{op}(k) = \#_{num}(k) - 1$.

Caso inductivo: Sea E_1 y E_2 expresiones tales que $\#_{op}(E_1) = \#_{num}(E_1) - 1$ y $\#_{op}(E_2) = \#_{num}(E_2) - 1$ luego:
- $\#_{op}(E_1 + E_2) = \#_{op}(E_1) + \#_{op}(E_2) + 1 = \#_{num}(E_1) - 1 + \#_{num}(E_2) - 1 + 1 = \#_{num}(E_1) + \#_{num}(E_2) - 1 = \#_{num}(E_1 + E_2) - 1$ - $\#_{op}(E_1 * E_2) = \#_{op}(E_1) + \#_{op}(E_2) + 1 = \#_{num}(E_1) - 1 + \#_{num}(E_2) - 1 + 1 = \#_{num}(E_1) + \#_{num}(E_2) - 1 = \#_{num}(E_1 * E_2) - 1$ - $\#_{op}((E_1)) = \#_{op}(E_1) = \#_{num}(E_1) - 1 = \#_{num}((E_1)) - 1$

P3. Un grafo G es una tupla (V, E), donde V es un conjunto de nodos y $E \subseteq VxV$ es un conjunto de arcos. Un grafo es no dirigido si cada vez que $(a, b) \in E$ se tiene que $(b, a) \in E$. Un grafo no dirigido $G = (V, E)$ es 3-coloreable si existe una asignación de colores para los nodos tal que nodos adyacentes reciben colores distintos. Formalmente, G es 3-coloreable si existe una función $f : V \to \{blanco, azul, rojo\}$ tal que para cada $(a, b) \in E$ se tiene que $f(a) = f(b)$. Demuestre que el problema de 3-coloración puede ser reducido al problema de satisfacibilidad. Vale decir, encuentre un algoritmo que dado un grafo G construye una oración proposicional $\Phi(G)$ tal que G es 3-coloreable si y sólo si $\Phi(G)$ es satisfacible. Estime el número de pasos que realiza su algoritmo cuando el grafo G tiene n nodos y m arcos.

- Solución:

Tenemos que escribir fórmulas para varias condiciones distinas. Primero vale la pena definir ciertas relaciones, B, A, R son relaciones unarias que indican los colores de los nodos, por ejemplo $R(a) <=> f(a) = rojo$.

Comenzaremos con una formula que nos indique que a cada nodo le podemos asignar solamente un color:

$$\varphi_0 = \bigwedge_{a \in V} R(a) \vee B(a) \vee A(a)$$

Esta formula tiene el largo de 3 veces la cantidad de nodos, es decir $3 * |V|$.Luego debemos definir la fórmula que nos indica que a cada nodo se le asigna maximo un color:

$$\varphi_1 = \bigwedge_{a \in V} (B(a) \Rightarrow \neg A(a) \wedge \neg R(a)) \wedge (R(a) \Rightarrow \neg B(a) \wedge \neg A(a)) \wedge (A(a) \Rightarrow \neg B(a) \wedge \neg R(a))$$

Esta fórmula tiene 9 proposiciones por cada nodo, osea que estimaremos que tiene largo $c|V|$ con c una constante.

Sabemos que dos nodos estan conectados por una arista si $(a, b) \in E$, por lo tanto definiremos la relación R como:

$$aRb \Leftrightarrow (a, b) \in V$$

Ahora tenemos lo que nesesitamos para decir que 2 nodos adjacentes tienen colores distintos.

$$\varphi_2 = \bigwedge_{a \in V} \bigwedge_{b \neq a} aRb \Rightarrow (R(a) \Rightarrow \neg R(b)) \wedge (\Rightarrow (A(a) \Rightarrow \neg A(b)) \wedge (\Rightarrow (B(a) \Rightarrow \neg B(b))$$

Esta formula dice exactamente eso, si dos nodos están conectados tienen colores distintos. Esta formula es cuadrática sobre el número de nodos (tiene la y-atorias anilladas) así que podemos estimar su tamaño por $C_1|V|^2$.

Con esto hemos construido 3 formulas que al anillarlas tienen largo aproximadamente $C_1|V|^2 + C_2|V|$ con $C_2 = c + 3$.

Ahora debemos convencernos de que esta fórmula es satisfacible si y solo si G es 3-coloreable.

Esta es la parte más compleja de la pregunta, aquí es donde hay que entender la lógica de forma más profunda. Nuestra formula Φ esta compuesta por relaciones unarias, estas relaciones unarias son nuestras variables proposicionales, ya que si tomamos una función $f : V \to colores$ va a asignarle valores de verdad a cada $R(a), A(a), B(a)$, es decir que con f y nuestras relaciones construimos nuestro σ.

$\sigma(R(a)) = 1 \Leftrightarrow f(a) = rojo$

Es decir que si encontramos una valuación encontramos una coloración y vice versa. Es decir que los problemas son equivalentes. Además la construcción de esta formula la podemos estimar por $C_1|V|^2 + C_2|V|$ es decir que la construcción de la fórmula no es especialmente lenta.