

P7) Guía lógica

Sean α una oración y Σ un conjunto de oraciones. Muestra que existe ϕ oración tal que

$$\Sigma \models \alpha \iff \models \phi$$

Primero exploremos el problema.

Σ es un conjunto, P_i son sus elementos

intuitivamente ϕ debe involucrar a todos los P_i y probablemente $\Rightarrow$ y α .

Nosotros probamos $\bigwedge_{i=1}^n P_i \Rightarrow \alpha$, $\bigvee_{i=1}^n \alpha \Rightarrow P_i$ ambos fallaron. Finalmente probamos con

$$\phi = \bigvee_{i=1}^n P_i \Rightarrow \alpha$$

La demostración en la pag. siguiente.

$$\models \phi \iff \Sigma \vdash \alpha$$

Lo separaremos en 2 implicancias:

$$\boxed{\Rightarrow} \mid \phi \text{ es tautología} \Rightarrow \Sigma \vdash \alpha$$

$$\forall \sigma, \sigma(\phi) = 1 \Rightarrow \forall \sigma, \sigma(\Sigma) = 1 \Rightarrow \sigma(\alpha) = 1$$

Entonces, consideremos σ tal que

$$\sigma(\Sigma) = 1$$

Claramente $\forall i, \sigma(\beta_i) = 1$, ya que todos los elementos son ciertos.

$$\text{Pero } \forall \sigma, \sigma(\phi) = 1 \text{ y } \phi = \bigvee_{i=1}^n \beta_i \Rightarrow \alpha$$

$$\text{Pero } \beta_i \iff V, \text{ entonces } \phi = \bigvee_{i=1}^n (V \Rightarrow \alpha)$$

$V \Rightarrow \alpha$ es lo mismo que α

$$\phi = \bigvee_{i=1}^n \alpha \text{ y } \sigma(\phi) = 1, \text{ entonces } \sigma(\alpha) \text{ debe ser } 1.$$

$$\therefore \sigma(\Sigma) = 1 \Rightarrow \sigma(\alpha) = 1, \text{ es decir}$$

$$\Sigma \vdash \alpha$$

Φ $\sum \models \alpha \Rightarrow \Phi$ es tautología

Pongámonos en casos:

$$\text{Si } \sigma(\Sigma) = 1, \forall i \sigma(\beta_i) = 1$$

$$\Rightarrow \Phi = \bigvee_{i=1}^n \beta_i = \text{D}\alpha = \bigvee_{i=1}^n V = \text{D}\alpha$$

Pero como $\sigma(\Sigma) = 1$ y $\Sigma \models \alpha$, $\sigma(\alpha) = 1$

$$\Rightarrow \Phi = \bigvee_{i=1}^n (\beta_i = \text{D}\alpha) = \bigvee_{i=1}^n (V = \text{D}V) = \text{Verdadero}$$

Ahora, si $\sigma(\Sigma) = 0$, esto es lo mismo que decir que $\exists \beta_k \in \Sigma$ tal que $\sigma(\beta_k) = 0$.

$$\text{Entonces } \Phi = \bigvee_{i=1}^n (\beta_i = \text{D}\alpha)$$

Sabemos que $\sigma(\beta_k) = 0 \Rightarrow \sigma(\beta_k = \text{D}\alpha) = 1$

Porque $F \Rightarrow D$ (lo que yo quiera)

$$\Phi = \left(\bigvee_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (\beta_i = \text{D}\alpha) \right) \vee \underbrace{\beta_k = \text{D}\alpha}_{\text{Verdadero}}$$

$$\Phi = V$$

Porque basta con que 1 elemento de la $\bigvee_{i=1}^n$ sea V para que Φ sea V.

$\therefore$ Si $\sigma(\Sigma) = 1$, $\sigma(\Phi) = 1$ y si $\sigma(\Sigma) = 0$ $\sigma(\Phi)$ también es 1. Por lo tanto Φ es tautología.