Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Guía 1

1. Dado oraciones α, β de la lógica proposicional, demuestre que $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ si y sólo si $\models (\alpha \leftrightarrow \beta)$ (es decir, $\alpha \models \beta$ y $\beta \models \alpha$ si y sólo si $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ es una tautología).
2. Dado conjunto de oraciones Σ de la lógica proposicional, además de oraciones α y β , demuestre que $\Sigma \models \alpha \rightarrow \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$.
3. Dado conjunto de oraciones Σ de la lógica proposicional, además de oraciones α y β , demuestre que si α es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \models \beta$.
4. Dado conjunto de oraciones Σ de la lógica proposicional, además de oraciones φ, ψ y θ , demuestre que si $\varphi \rightarrow \psi$ es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\varphi, \psi\} \models \theta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \theta$.
5. Dado conjunto de oraciones Σ de la lógica proposicional, además de oraciones α y β tal que α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \models \beta$ si y sólo si $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$?
6. Sea Σ un conjunto de oraciones en la lógica proposicional y α, β oraciones cualesquiera. ¿Es cierto que si $\Sigma \models \alpha \vee \beta$ entonces $\Sigma \models \alpha$ o $\Sigma \models \beta$? Fundamente su respuesta.
7. Sea Σ un conjunto finito de oraciones en la lógica proposicional y α una oración cualquiera. Demuestre que existe una oración θ tal que $\Sigma \models \alpha$ si y sólo si $\models \theta$.
8. Sean $p_1, \dots, p_n$ variables proposicionales distintas, $n \geq 1$. Demuestre que la fórmula

$$(\dots((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow p_3) \leftrightarrow \dots \leftrightarrow p_n)$$

es cierta en una fila f de la tabla de verdad si y sólo si el número de p_i 's, $1 \leq i \leq n$, a los cuales f le asigna el valor 0 es par.

9. Sea p una variable proposicional. Para oraciones proposicionales α, β defina recursivamente la *oración obtenida desde α reemplazando p por β* , denotado por $\alpha[\beta/p]$, como sigue:

- $\alpha[\beta/p] = \begin{cases} \alpha & \text{si } \alpha \text{ es proposición atómica y } \alpha \neq p \\ \beta & \text{si } \alpha = p \end{cases}$
- $(\alpha_1 \vee \alpha_2)[\beta/p] = \alpha_1[\beta/p] \vee \alpha_2[\beta/p]$
- $(\neg\alpha)[\beta/p] = \neg\alpha[\beta/p]$

Demuestre que si α_1 y α_2 son equivalentes entonces para toda oración β se tiene que $\beta[\alpha_1/p]$ y $\beta[\alpha_2/p]$ también son equivalentes.

10. Defina recursivamente el *dual* de una oración proposicional ϕ , denotado por ϕ^* , como sigue:

- $p^* = \neg p$, si $p \in P$;
- $(\alpha \vee \beta)^* = \alpha^* \wedge \beta^*$;
- $(\alpha \wedge \beta)^* = \alpha^* \vee \beta^*$;
- $(\neg\alpha)^* = \neg\alpha^*$.

Demuestre que para toda oración proposicional ϕ se tiene que ϕ^* es equivalente a $\neg\phi$.

11. Sea $\oplus$ el conectivo lógico binario definido como sigue: El valor de verdad de $\alpha \oplus \beta$ es 1 si y sólo si el valor de verdad de α es distinto del valor de verdad de β .

¿Es el conjunto $\{\oplus, \leftrightarrow\}$ de conectivos lógicos funcionalmente completo?

12. El conectivo lógico NOR es definido de la siguiente forma:

p	q	$p \text{ NOR } q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Demuestre que el conectivo NOR basta para expresar todas las oraciones proposicionales.

Formalmente, demuestre que para cada oración proposicional α que utiliza los conectivos $\{\neg, \vee, \wedge\}$ es posible encontrar una oración proposicional α^* , que sólo utiliza el conectivo NOR, y tal que $\alpha \equiv \alpha^*$.

13. El conectivo ternario MAYORIA es definido de la siguiente forma:

p	q	r	MAYORIA(p, q, r)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Demuestre que el conectivo MAYORIA por si solo no puede expresar todas las oraciones proposicionales que utilizan las variables proposicionales p, q, r .

14. ¿Es $\{\neg, \text{MAYORIA}\}$ funcionalmente completo?

15. El conectivo unario $\perp$ es definido de la siguiente forma:

p	$\perp p$
0	0
1	0

Este conectivo usualmente se denota sin la letra proposicional porque su valor de verdad es siempre 0 (por ejemplo, denotamos $p \wedge (\perp q)$ como $p \wedge \perp$).

Demuestre que con los conectivos $\{\neg, \text{MAYORIA}, \perp\}$ es posible expresar todas las oraciones proposicionales (es decir, todas las oraciones que pueden ser escritas con los conectivos usuales $\{\neg, \vee, \wedge\}$).

16. Diseñe un circuito digital que tome como entrada dos números binarios $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$ y $b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0$, $n \geq 0$, y compute como salida un número binario $c_n c_{n-1} \cdots c_1 c_0$ tal que $c_n c_{n-1} \cdots c_1 c_0$ es la representación binaria de $u - v$, donde:

- u es el entero cuya representación binaria es $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$, y
- v es el entero cuya representación binaria es $b_n b_{n-1} \cdots b_1 b_0$.

Asuma para esto que $u \geq v$.

17. Diseñe un circuito digital que tome como entrada dos números binarios

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0 \quad \text{y} \quad b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0 \quad (n, m \geq 0),$$

y compute como salida el número binario $c_{n+m} c_{n+m-1} \cdots c_1 c_0$ tal que $c_{n+m} c_{n+m-1} \cdots c_1 c_0$ es la representación binaria de $u \cdot v$, donde:

- u es el entero cuya representación binaria es $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$, y
- v es el entero cuya representación binaria es $b_m b_{m-1} \cdots b_1 b_0$.

18. Sea $P = \{p, q, \dots\}$ un conjunto de proposiciones y sea f una fila de la tabla de verdad para las proposiciones en P . Defina Σ_f como el conjunto de todas las oraciones de la lógica proposicional que utilizan proposiciones en P y cuyo valor de verdad es 1 en la fila f .

Demuestre que para cualquier conjunto Σ de oraciones que utilizan proposiciones en P , si $\Sigma_f \subseteq \Sigma$ y Σ es satisfacible, entonces $\Sigma_f = \Sigma$.

19. Recuerde que un conjunto de fórmulas Θ en la lógica proposicional es satisfacible si y solo si existe una fila de la tabla de la verdad que hace verdadera a cada fórmula θ en Θ .

Sea Σ un conjunto de fórmulas en la lógica proposicional. Asuma que el conjunto de variables proposicionales que son mencionadas en Σ es infinito (y, por tanto, Σ es también infinito).

Decimos que Σ es *finitamente* satisfacible si y solo si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Sea p una variable proposicional cualquiera. Demuestre que si Σ es finitamente satisfacible entonces $\Sigma \cup \{p\}$ o $\Sigma \cup \{\neg p\}$ es finitamente satisfacible (note que es posible que ambos lo sean).

20. La propiedad de *compacidad* de la lógica proposicional establece lo siguiente:

Sea Σ un conjunto infinito de oraciones (en la lógica proposicional) sobre conjunto P de variables proposicionales (note que P también puede ser infinito). Entonces Σ es satisfacible si y solo si todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.

Demuestre, utilizando la propiedad de compacidad de la lógica proposicional, que lo siguiente se cumple para cualquier conjunto infinito Σ de oraciones sobre P y oración $\phi \in L(P)$:

$$\Sigma \models \phi \iff \text{existe subconjunto finito } \Sigma_0 \text{ de } \Sigma \text{ tal que } \Sigma_0 \models \phi.$$

21. Una *cláusula* es una oración de la lógica proposicional de la forma $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$, donde cada ℓ_i ($1 \leq i \leq n$) es un *literal*, es decir, una variable proposicional p o su negación $\neg p$. Por ejemplo, $p \vee \neg q \vee r$ es una cláusula.

Sea P un conjunto de variables proposicionales. Demuestre que toda oración $\phi \in L(P)$ es equivalente a una conjunción de cláusulas sobre P .

22. Un *literal* es una variable proposicional p o su negación $\neg p$. Decimos que p es un literal *positivo* y que $\neg p$ es un literal *negativo*.

Una *cláusula* es una disyunción de literales. Una cláusula es de *Horn* si y solo si contiene a lo más un literal positivo. Una fórmula es de *Horn* si y solo si es una conjunción de cláusulas de Horn.

Demuestre que existe una cláusula que no es equivalente a ninguna fórmula de Horn.

23. Una *cláusula* es una fórmula de la lógica proposicional de la forma $\ell_1 \vee \cdots \vee \ell_n$, donde cada ℓ_i es un *literal*, es decir, una proposición p o su negación $\neg p$. Por ejemplo, $p \vee \neg q \vee r$ es una cláusula.

La *regla de resolución* de la lógica proposicional establece lo siguiente: Si C_1 y C_2 son cláusulas y p es una variable proposicional, entonces desde las cláusulas $(C_1 \vee p)$ y $(C_2 \vee \neg p)$ es posible deducir la cláusula $C_1 \vee C_2$. Por ejemplo, desde las cláusulas $(p \vee \neg q \vee r)$ y $(\neg r \vee s)$ es posible deducir la cláusula $p \vee \neg q \vee s$.

Demuestre que la regla de resolución es correcta. Esto es, si C_1 y C_2 son cláusulas y p es una variable proposicional, entonces

$$\{(C_1 \vee p), (C_2 \vee \neg p)\} \models C_1 \vee C_2.$$

24. Un literal es una variable proposicional p o su negación $\neg p$. Una cláusula es una disyunción de literales. Una oración de la lógica proposicional está en CNF si es de la forma $\bigwedge_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$, donde cada α_i es una cláusula ($1 \leq i \leq n$).

Si ℓ es un literal, denotamos por $\bar{\ell}$ el *complemento* de ℓ ; esto es, si ℓ es la variable proposicional p entonces $\bar{\ell} = \neg p$, y si $\ell = \neg p$ entonces $\bar{\ell} = p$.

Sea $\phi = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \alpha_i$ oración proposicional en CNF (es decir, los α_i son cláusulas) y ℓ un literal. Sea I el conjunto de los índices i tal que $1 \leq i \leq n$ y α_i no menciona a ℓ (esto es, ℓ no es un literal en la disyunción que forma la cláusula α_i). Denote como $\phi(\ell)$ la fórmula que se obtiene de $\phi' = \bigwedge_{i \in I} \alpha_i$ al borrar el literal $\bar{\ell}$ de cada cláusula α_i que menciona a $\bar{\ell}$.

Demuestre que si ϕ es insatisfacible entonces $\phi(\ell)$ también lo es.

25. Sean ϕ y ψ fórmulas de la lógica proposicional, y suponga que $V(\phi)$ y $V(\psi)$ denotan el conjunto de variables proposicionales mencionadas en ϕ y ψ , respectivamente.

Asuma que $\models \phi \rightarrow \psi$, i.e. $\phi \rightarrow \psi$ es tautología. Demuestre que existe fórmula θ de la lógica proposicional que solo utiliza variables proposicionales en $V(\phi) \cap V(\psi)$, tal que

$$\models \phi \rightarrow \theta \quad \text{y} \quad \models \theta \rightarrow \psi.$$

Explique detalladamente por qué θ cumple esta propiedad.

26. Formalice el siguiente argumento en el cálculo proposicional:

“Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal. Entonces, Superman no existe.”

Demuestre que ‘Superman no existe’ es consecuencia lógica de esta formalización.

27. Defina un lenguaje proposicional que permita describir el estado de un semáforo en distintos momentos $1, \dots, k$ de tiempo. Con tal lenguaje exprese lo siguiente:

- En cada momento del tiempo el semáforo está en un, y exactamente un, color.
- Si el color del semáforo cambia, entonces los únicos cambios válidos son de verde a amarillo, de amarillo a rojo, y de rojo a verde.
- El semáforo puede permanecer en un color por a lo más tres estados consecutivos de tiempo.

28. Un grafo G es una tupla (N, A) , donde N es un conjunto de nodos y $A \subseteq N \times N$ es un conjunto de arcos. Un grafo es no dirigido si cada vez que $(a, b) \in A$ se tiene que $(b, a) \in A$.

Un grafo no dirigido $G = (N, A)$ es 3-coloreable si existe una asignación de colores para los nodos tal que nodos adyacentes reciben colores distintos. Formalmente, G es 3-coloreable si existe una función $f : N \rightarrow \{\text{blanco}, \text{azul}, \text{rojo}\}$ tal que para cada $(a, b) \in A$ se tiene que $f(a) \neq f(b)$.

Demuestre que el problema de 3-coloración puede ser reducido al problema de satisfacibilidad. Vale decir, encuentre un algoritmo que dado un grafo G construye una oración proposicional φ_G tal que G es 3-coloreable si y sólo si φ_G es satisfacible. Estime el número de pasos que realiza su algoritmo cuando el grafo G tiene n nodos y m arcos.

29. Sea $X = \{x_1, \dots, x_{3n}\}$ un conjunto de $3n$ elementos ($n \geq 1$) y λ una función que asigna un entero positivo a cada elemento $x \in X$. Construya una fórmula en la lógica proposicional que sea satisfacible si y solo si existen conjuntos $Z_1, \dots, Z_n$ tales que:

- a) Los Z_i 's definen una *partición* de X ; es decir, $X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} Z_i$ y $Z_i \cap Z_j = \emptyset$, para cada $1 \leq i < j \leq n$.
- b) Para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que el conjunto Z_i contiene exactamente tres elementos.
- c) Los elementos en cada conjunto Z_i suman lo mismo. Formalmente, existe entero positivo t tal que para cada $1 \leq i \leq n$ se tiene que si $Z_i = \{a, b, c\}$ entonces $\lambda(a) + \lambda(b) + \lambda(c) = t$.

El tamaño de su fórmula debe ser a lo más $O(n^c)$, para c una constante positiva.

Hint: Utilice variables proposicionales p_{ijk} , para $1 \leq i < j < k \leq 3n$, que expresen (intuitivamente) que $Z_l = \{x_i, x_j, x_k\}$, para algún $1 \leq l \leq n$.

30. Una oración de la lógica proposicional está en *CNF* si es de la forma

$$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (l_i^1 \vee l_i^2 \vee \dots \vee l_i^{m_i}),$$

donde $m_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) y para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m_i$, l_i^j es una variable proposicional o su negación. Decimos que el *rango* de esta oración es $(m_1, \dots, m_n)$.

Un *grafo* G es una tupla (N, A) , donde N es un conjunto de nodos y $A \subseteq N \times N$ es un conjunto de arcos. Un grafo es *no dirigido* si cada vez que $(a, b) \in A$ se tiene que $(b, a) \in A$. El grafo G es *simple* si para todo $a \in N$ se tiene que $(a, a) \notin A$. Por último, G tiene un *clique* de tamaño k , para $k > 0$, si existen nodos distintos $a_1, \dots, a_k$ en N tal que para cada $1 \leq i, j \leq k$, $(a_i, a_j) \in A$.

Demuestre que para toda oración ϕ en CNF de rango $(m_1, \dots, m_n)$ es posible *construir* un grafo simple y no dirigido G_ϕ , tal que

- G_ϕ tiene a lo más $\sum_{1 \leq i \leq n} m_i$ nodos; y
- ϕ es satisfacible si y solo si G_ϕ tiene un clique de tamaño n .

Además, la construcción de G_ϕ solo puede estar basada en la forma de ϕ (es decir, en su sintaxis), y no en su semántica (es decir, la construcción no puede estar basada en si ϕ es satisfacible o no).

31. Sea P un conjunto de variables proposicionales.

- Un *literal* es una variable proposicional p en P o su negación $\neg p$.
- Una *cláusula* es una disyunción de literales. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r)$ es una cláusula.
- Una cláusula es *semi-positiva* si es de la forma (a) p ó (b) $(p \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_n)$ ó (c) $(\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_n)$. Es decir, la cláusula es semi-positiva si a lo más uno de sus literales no es de la forma $\neg q$ para $q \in P$.

Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r)$ no es una cláusula semi-positiva, pero (a) p , (b) $(p \vee \neg r)$ y (c) $\neg r$ sí lo son.

Sea Σ un conjunto de cláusulas semi-positivas sobre un conjunto finito de variables proposicionales P . Demuestre que si procedimiento CONSISTENCIA que se especifica abajo falla entonces Σ es insatisfacible.

CONSISTENCIA

1. $L_{\text{old}} = P$; $L_{\text{new}} = \emptyset$
2. **while** $L_{\text{new}} \neq L_{\text{old}}$ **do**
 3. $L_{\text{old}} = L_{\text{new}}$
 4. **if** existe cláusula semi-positiva $(\neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_n) \in \Sigma$ tal que $\{q_1, \dots, q_n\} \subseteq L_{\text{old}}$

5. **then** el procedimiento falla y se detiene
6. **else**
7. **if** L es el conjunto de variables $p \in P$ tal que:
- (i) existe cláusula semi-positiva p en Σ tal que $p \notin L_{\text{old}}$, ó
 - (ii) existe cláusula semi-positiva $(p \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_n)$ en Σ tal que $\{q_1, \dots, q_n\} \subseteq L_{\text{old}}$ y $p \notin L_{\text{old}}$
8. **then** $L_{\text{new}} = L_{\text{old}} \cup L$
32. Decimos que dos grafos $G_1 = (N_1, A_1)$ y $G_2 = (N_2, A_2)$ son *isomorfos* si existe una biyección $f : N_1 \rightarrow N_2$ tal que para todo a y b en A_1 se tiene que $(a, b) \in A_1$ si y sólo si $(f(a), f(b)) \in A_2$. Encuentre un algoritmo que dados dos grafos G_1 y G_2 construye una oración proposicional φ tal que G_1 y G_2 son isomorfos si y sólo si φ es satisfacible. Estime el número de pasos de su algoritmo cuando G_1 tiene n_1 nodos y m_1 arcos, y G_2 tiene n_2 nodos y m_2 arcos.
33. Dada una matriz C de 3×3 que contiene números entre 0 y 3, decimos que C es *completable* si es que existe una manera de reemplazar los números 0 por números entre 1 y 3 de tal forma que la suma de cada fila y de cada columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable:

2	0	0
0	2	0
0	0	3

puesto que podemos reemplazar los valores 0 por los siguientes valores:

2	2	1
2	2	1
1	1	3

de manera tal que la suma de cada fila y de cada columna es 5. En cambio, la siguiente matriz no es completable:

1	1	1
0	0	0
3	0	0

Dada una matriz C de 3×3 , construya una oración φ en lógica proposicional tal que C es completable si y sólo si φ es satisfacible. En particular, φ tiene que ser construida de tal forma que cada valuación σ que satisface a φ represente una forma de completar C .

34. El *principio de los cajones* establece que si $n+1$ objetos son distribuidos en n cajones, entonces al menos habrá un cajón con más de un objeto. Demuestre el principio para $n = 2$ usando cálculo proposicional y la noción de consecuencia lógica.

35. Demuestre que las siguientes fórmulas son equivalentes:

$$(1) \exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \quad (2) \forall xA(x) \rightarrow \exists xB(x)$$

36. Demuestre que existe un dominio de discurso A y una interpretación de la relación binaria P sobre A que satisface la siguiente fórmula:

$$\forall x\exists yP(x, y) \wedge \forall x\forall y_1\forall y_2(P(x, y_1) \wedge P(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \wedge \\ \forall x_1\forall x_2\forall y(P(x_1, y) \wedge P(x_2, y) \rightarrow x_1 = x_2) \wedge \neg\forall y\exists xP(x, y).$$

¿Es posible que A sea un conjunto finito?

37. Sea $E(x, y)$ un predicado binario utilizado para representar la noción de adyacencia en grafos. En cada una de las siguientes preguntas escriba una oración de la lógica de primer orden que represente la propiedad mencionada.

- (a) El grafo es un clique.
- (b) El grafo contiene un clique con 4 nodos.
- (c) El grafo tiene un ciclo con 4 nodos.
- (d) Existen elementos en el grafo cuya distancia es 4.
- (e) La distancia máxima entre dos nodos del grafo es 3.
- (f) El grafo contiene exactamente 6 nodos.

38. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son válidas? Justifique su respuesta.

- (a) $\forall x \varphi \equiv \neg\exists x\neg\varphi$.
- (b) $\exists x \varphi \equiv \neg\forall x\neg\varphi$.
- (c) $\exists x (\varphi \vee \psi) \equiv (\exists x \varphi) \vee (\exists x \psi)$.
- (d) $\forall x (\varphi \vee \psi) \equiv (\forall x \varphi) \vee (\forall x \psi)$.
- (e) $\exists x (\varphi \wedge \psi) \equiv (\exists x \varphi) \wedge (\exists x \psi)$.
- (f) $\forall x (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x \varphi) \wedge (\forall x \psi)$.

39. Demuestre que las siguientes oraciones de la lógica de primer orden son equivalentes: $\forall xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ y $\forall x\exists y(P(x) \wedge Q(y))$.

40. Asuma que el dominio de discurso son los números naturales, y que contamos con (a) un predicado binario $<$ que es interpretado como el orden lineal estándar en $\mathbb{N}$, y (b) dos predicados ternarios $\cdot$ y $+$ que definen a la multiplicación y suma en $\mathbb{N}$, respectivamente.

Expresar en lógica de primer orden las siguientes propiedades de los números naturales usando solo los predicados mencionados en el párrafo anterior:

- Todo número natural positivo es par o impar, pero no ambos.
- El sucesor de todo número par es impar.
- Existe un número infinito de números primos.

- Para todo par (n, n') de números naturales positivos, existe un único par (p, c) tal que $p \geq 0$, $0 \leq c \leq n - 1$ y $n' = pn + c$.
41. Considere el dominio de discurso que contiene los primeros n números naturales $\{1, \dots, n\}$, y asuma que S es la relación binaria de sucesor sobre estos números (es decir, S contiene los pares $(j, j + 1)$, para $1 \leq j < n$).

Asuma que existen otras dos relaciones binarias R_a y R_b sobre este dominio. Construya una fórmula de la lógica de predicados que exprese que todas las siguientes condiciones se cumplen:

- a) La unión de las relaciones R_a y R_b corresponde a S .
- b) La intersección entre R_a y R_b es vacía.
- c) $R_a = \{(j, j + 1) \mid 1 \leq j < n \text{ y } j \text{ es impar}\}$.
Hint: Expresé que el par $(1, 2)$ pertenece a R_a y que si un par $(i, i + 1)$ pertenece a R_a (resp. R_b) entonces $(i + 1, i + 2)$ pertenece a R_b (resp. R_a).

La fórmula que usted construya solo puede utilizar los predicados S , R_a y R_b .

¿Es posible detectar con una fórmula en la lógica de predicados si n es par en el caso que (1-3) se cumpla?

42. Sea $x \subseteq y$ un predicado binario. Intuitivamente $\subseteq$ representa la relación de subconjunto; es decir, $x \subseteq y$ representa que x es un subconjunto de y .

Expresé en lógica de primer orden las siguientes propiedades del predicado $x \subseteq y$:

- La relación $x \subseteq y$ es un orden parcial; i.e. es reflexiva, antisimétrica y transitiva.
 - Existe un único elemento $\perp$ que está contenido en cualquier otro conjunto (i.e. el conjunto vacío).
 - Existe un único conjunto $\top$ que contiene a todo otro conjunto (es decir, el conjunto universo).
 - La unión de dos conjuntos siempre existe, y además es única (note que $x \cup y = z$ si y sólo si z es el “menor” conjunto con respecto al orden parcial $\subseteq$ que contiene tanto a x como a y).
 - La intersección de dos conjuntos siempre existe, y además es única (note que $x \cap y = z$ si y sólo si z es el “mayor” conjunto con respecto al orden parcial $\subseteq$ que está contenida tanto en x como en y).
 - Todo conjunto tiene un *complemento*; es decir, para todo conjunto x existe un conjunto $\bar{x}$ tal que $x \cap \bar{x} = \perp$ y $x \cup \bar{x} = \top$.
43. Sea σ el vocabulario que contiene una sola relación ternaria $B(\cdot, \cdot, \cdot)$. Considere como dominio D al conjunto de todos los puntos en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y asuma que interpretamos a la relación B en D como *estar entre medio*; formalmente esto quiere decir que interpretamos a B como el subconjunto de $D \times D \times D$ que contiene todos aquellos triples (x, y, z) tales que y pertenece a la recta que une x con z . Expresé lo siguiente en la lógica de primer orden:

- a) (1pto) Para todo punto x , el único punto que está entre medio de x y x es x mismo.

- b) (1pto) Existen tres puntos que no son colineales.
- c) (2pts) Para cualquiera tres puntos no colineales x, y, z , cualquier punto u en el segmento xy y cualquier punto v en el segmento yz , los segmentos xv y zu deben intersectarse.
- d) (2pts) Asuma que nuestro vocabulario se extiende con una relación C de aridad cuatro que se interpreta en D como la *congruencia*; es decir, como todas aquellas tuplas $(x, y, w, z) \in D \times D \times D \times D$ tal que los segmentos xy y wz son del mismo largo.
 Exprese lo siguiente: Sean x, y, z puntos en D . Entonces x, y, z son colineales si existe un par (u, v) de puntos distintos tal que tanto x como y como z son equidistantes de u y v .
44. Una fórmula de la lógica de predicados está en *forma normal* si es de la forma $Q_1x_1Q_2x_2 \dots Q_mx_m\varphi$, donde cada Q_i es un cuantificador $\forall$ o $\exists$ ($1 \leq i \leq m$) y φ es una fórmula sin cuantificación. Por ejemplo, $\forall x\exists yP(x, y)$ está en forma normal, pero $\forall xP(x) \wedge \exists yR(y)$ no lo está.
 Sean ϕ, θ fórmulas en forma normal. Demuestre que existe α en forma normal tal que $\alpha \equiv \phi \wedge \theta$.