P1 Digamos a es amigo en facebook de b si $a f b$.

i) Reflexividad: si uno crea una cuenta nueva en facebook esta tiene 0 amigos, no 1. Esto quiere decir que nadie es amigo de sí mismo.

$\therefore$ f no es refleja.

ii) Simétrica: si $a f b$ ambos tienen que aceptar la amistad, es decir que $b f a$ también es cierto.

$\therefore (\forall a, b \in \mathbb{P}) \quad a f b \Rightarrow b f a$

conjunto de las personas.

iii) Antisimétrica: claramente no se tiene ya que si Andrés y Carolina son amigos

$A f C$ y $C f A$ pero $A \neq C$

ya que Andrés y Carolina son seres distintos.

$\therefore$ Encontramos A, C tales que $AfC \wedge CfA \wedge A \neq C$ contradiciendo la definición de antisimetría

(A de Andrés y C de Carolina.
La def. de antisimétrica es:
$\forall a, b \in \mathbb{P} \quad a f b \wedge b f a \Rightarrow a = b$)

iv) Transitividad: Cuando uno se hace un amigo en facebook no se vuelve amigo de todos sus amigos automáticamente. Por ejemplo puede que Otto sea amigo de Ana y Ana de Luis pero Otto y Luis no sean amigos

$\therefore$ Encontramos un contra ejemplo

Twiter Decimos aTb si a sigue a b.

i) Refleja: Una cuenta nueva tiene 0 seguidores, es decir que no se sigue a sí misma.

ii) Simetrica: Yo sigo a @RealDonaldTrump, pero él no me sigue a mí (aún).

$\therefore$ Encontramos un contraejemplo.

iii) Antisimétrica: Yo sigo a mi mamá en Twitter y ella a mí, pero no somos iguales.

$\therefore \exists\, a,b \in P,\ aTb \wedge bTa \wedge b \neq a$

iv) Transitiva: Yo sigo a mi madre en Twitter y ella sigue a @CuteCatPhotos pero yo no sigo a esa cuenta.

$\therefore \exists\, a,b,c \quad aTb \wedge bTc \wedge \underbrace{\sim(aTc)}_{\text{Esta es una negación de } aTc}$

$\boxed{\mathbb{R}}$

i) Refleja: Sea a cualquiera.

$$a - a = 0 \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow aRa.$

Como a era cualquiera, esto es cierto $\forall a$

$\therefore \forall a, aRa \Rightarrow R$ es refleja

ii) Simétrica: Tomemos a y b.

Si $a - b = c \in \mathbb{Q}$, sabemos que $-c$ también está en $\mathbb{Q}$.

$$\Rightarrow a - b = c \in \mathbb{Q} \Rightarrow -c = b - a \in \mathbb{Q}$$

En otras palabras $aRb \Rightarrow bRa$ que es la definición de simetría.

iii) Antisimetría: Basta encontrar un contraejemplo. Probemos con π y $\pi + 1$

$$(\pi + 1) - \pi = 1 \in \mathbb{Q} \quad y \quad \pi - (\pi + 1) = -1 \in \mathbb{Q}$$

$\therefore$ Encontramos 2 números tales que

$(\pi + 1) R \pi$ y $\pi R (\pi + 1)$ pero $\pi \neq \pi + 1$

$\Rightarrow$ no es antisimétrica

iv) Transitiva: Tomemos un a, b y c cualesquiera tales que:

$$a - b = x \in \mathbb{Q} \; ; \; y \quad b - c = y \in \mathbb{Q}$$

calculemos $x + y = (a - b) + (b - c) = a - c$

como x e y están en $\mathbb{Q}$, $x + y = a - c \in \mathbb{Q}$

$\therefore aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$, es transitiva

$\mathbb{N}$ a divide a b $\Leftrightarrow a|b$

Refleja: $a : a = 1 \Rightarrow \exists k=1,\ a = ka$

$\therefore$ Es refleja

Simétrica: Veamos el caso 2 y 6

$2|6$ porque $\exists k=3,\ 6 = k \cdot 2,\ 3 \in \mathbb{N}$

$6|2$ no se da porque $\forall k \in \mathbb{N}\ 6 \cdot k > 2$

$\therefore$ Encontramos un contraejemplo $\Rightarrow$ no es simétrica.

Antisimétrica:

Tomemos a y b tales que $a|b$ y $b|a$.

Esto significa $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ a = k_1 b$ y $b = k_2 a$.

Multipliquemos las igualdades:

$a \cdot b = k_1 b \cdot k_2 a \Rightarrow ab = ab \cdot k_1 \cdot k_2$

como k_1 y k_2 son naturales necesariamente $k_1 = k_2 = 1$ para cumplir la igualdad.

Pero $a = bk_1 = b \cdot 1 \Rightarrow a = b$

$\therefore$ Tomamos a y b tales que $a|b$ y $b|a$ y concluimos $a = b \Rightarrow |$ es antisimétrica.

iv) Transitiva: Sean a, b, c $a|b$ y $b|c$

Esto significa $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N},\ b = k_1 a$ y $c = k_2 b$

De esto se obtiene $c = k_1 k_2 a$. Como $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow a|c$

$\therefore$ La relación es transitiva.

Plano cartesiano

i) Refleja: $\forall x,\ x \leq x$, como se tiene esto

$(a,b) R (a,b) \iff \underbrace{a \leq a \ \vee \ b \leq b}_{\text{Verdadero}}$

$\therefore$ Todo par (a,b) cumple $(a,b) R (a,b)$

ii) Simétrica: Consideremos dos pares (a,b) y (x,y) tales que $(a,b) R (x,y)$

$\Rightarrow a \leq x \ \vee \ b \leq y$, si además $(x,y) R (a,b)$

$\Rightarrow x \leq a \ \vee \ y \leq b$ con esto podemos imaginar un contraejemplo a la simetría, por ejemplo:

$(1,1)$ y $(2,2)$, ya que $1 \leq 2 \vee 1 \leq 2$

pero ni $2 \leq 1$ ni $2 \leq 1$

$\therefore$ $(1,1) R (2,2)$ pero $\sim (2,2) R (1,1)$ es un contraejemplo

iii) Antisimétrica: igual que antes intuitivamente buscamos un contraejemplo. Probemos con $(1,100)$ y $(100,1)$. $\underbrace{1 \leq 100}_{\text{Verdadero}} \vee 100 \leq 1 \Rightarrow (1,100) R (100,1)$

y luego $100 \leq 1 \vee \underbrace{1 \leq 100}_{\text{Verdadero}} \Rightarrow (100,1) R (1,100)$

$\therefore$ Encontramos nuestro contraejemplo.

Transitiva: tomemos 3 pares tales que:

$(a,b)R(c,d)$ y $(c,d)R(e,f)$ entonces:

$(a \leq c \vee b \leq d)$ y $(c \leq e \vee d \leq f)$

Claramente si $a \leq c$ y $c \leq e \Rightarrow a \leq e$ y si $b \leq d$ y $d \leq f \Rightarrow b \leq f$

Pero puede darse el caso en que $a \leq c$ y $d \leq f$, lo que viola la regla.

Por ejemplo: $(1,2)R(2,0)$ y $(2,0)R(0,1)$

Claramente $\cancel{1 \leq 0} \vee \cancel{2 \leq 0} \Rightarrow \sim(1,2)R(0,1)$

$\therefore$ Encontramos un contraejemplo.

$S \cap S^{-1}$

Primero veamos qué es $S \cap S^{-1} = R$

$aSb \iff bS^{-1}a$.

También $aRb \iff aSb$ y $aS^{-1}b$

Pero $aS^{-1}b \iff bSa$, entonces podemos reescribir

$aRb \iff aSb$ y bSa.

Refleja: Si queremos buscar un contraejemplo este tiene que ser una relación.

Analicemos $<$ sobre $\mathbb{N}$ ($<$ es menor estricto)

Ahora $aRa \iff aSa$ y aSa, pero $S = <$

$aRa \iff a<a$ y $a<a$

Pero $a<a$ es falso.

$\therefore$ R no tiene que ser refleja necesariamente

Simétrica: La definición de simetría es: $\forall a,b \; aRb \Rightarrow bRa$

Pero $aRb \iff aSb$ y $bSa \iff bSa$ y aSb

$\iff bRa$. Entonces R debe ser simétrica.

Antisimétrica: Esta sale fácil sabiendo que R es simétrica.

Sean a,b tales que $a \neq b$ y aRb

Por ii) $aRb = bRa$

$\therefore$ si $\exists a,b$, $a \neq b$ y aRb, entonces $bRa \Rightarrow$ R no es antisimétrica a menos que 2 elementos distintos no se puedan relacionar.

iv) Transitividad: Vamos a buscar un contraejemplo. La primera parte de esta P1 los amigos en facebook nos va a servir.

$aRb \Leftrightarrow afb$ y bfa, es decir que aRb si a y b son mutuamente amigos. Como f es simétrica $afb \Rightarrow bfa$, reescribimos

$aRb \Leftrightarrow afb$, el bfa es redundante. Esto quiere decir que R y f son iguales. Pero f no es transitiva, por lo tanto R tampoco.

$\therefore$ Encontramos un contraejemplo

P3 | Recordamos $f = O(g) \iff \exists a, \bar{x}\ \forall x > \bar{x}\quad f(x) \leq a g(x)$

1. Veamos que es refleja.

Tomemos f cualquiera.

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq f(x) \cdot 1$$

tomamos $a = 1$ y $\bar{x} = 0$ y tenemos fRf

Ahora la transitividad:

Sean f, g, h tales que $f = O(g)$ y $g = O(h)$

$\exists a, b, \bar{x}, \bar{y}, \forall x > \bar{x}, y > \bar{y} \quad f(x) \leq a g(x) \wedge g(y) \leq b h(y)$

Consideramos $\hat{x} = \max\{\bar{x}, \bar{y}\}$ así

$$\forall x > \hat{x} \quad f(x) \leq a g(x) \wedge g(x) \leq b h(x)$$

Ahora
$$f(x) \leq a g(x) \leq a \cdot (b h(x))$$
$$f(x) \leq ab\, h(x)$$

$\therefore$ Tomando $\bar{x} = \hat{x}$ y $c = ab$ se cumple

$\exists c, \forall x > \hat{x}, \quad f(x) \leq c h(x) \Rightarrow fRh$

(asumimos a y b positivos)

2. Recordemos que $f = \Theta(g)$ significa

$\exists a,b>0, \exists \bar{x}, \forall x > \bar{x} \quad f(x) \leq a\, g(x) \wedge g(x) \leq b\, f(x)$

Reflexividad: tomamos $a = b = 1$, por lo tanto

$\forall x \quad f(x) \leq f(x) \wedge f(x) \leq f(x) \Rightarrow fSg$

Simetría: $fSg \Rightarrow gSf$

$fSg \Leftrightarrow \exists a,b>0, \exists \bar{x}, \forall x \geq \bar{x} \quad f(x) \leq a\, g(x) \wedge g(x) \leq b\, f(x)$

si tomamos $\bar{a} = b$ y $\bar{b} = a$ podemos invertir los papeles:

$\exists \bar{a}, \bar{b}, \exists \bar{x}, \forall x \geq \bar{x} \quad g(x) \leq \bar{a} f(x) \wedge f(x) \leq \bar{b}\, g(x)$

que es la definición de gSf.

$\therefore fSg \Rightarrow gSf$

Transitividad: Tomemos f, g, h cualquiera

$\underbrace{fSg \wedge gSh}$ $\Rightarrow fSh$ es lo que queremos ver.

Con esto sabemos que hay un punto $\hat{x}$ a partir del cual f y g solo difieren a una constante, lo mismo para g y h.

$\forall x > \hat{x} \quad f(x) \leq a\, g(x) \wedge g(x) \leq b\, f(x) \wedge g(x) \leq \bar{a} h(x) \wedge h(x) \leq \bar{b}\, g(x)$

Reordenamos:

$f(x) \leq a\, g(x) \leq a\bar{a}\, h(x) \wedge h(x) \leq \bar{b}\, g(x) \leq b\bar{b}\, f(x)$

$\Rightarrow fSh$, es decir que la relación es transitiva