CC3101-1 Matemáticas Discretas para la Computación
Profesor: Pablo Barceló
Auxiliares: Pablo Muñoz y Bernardo Subercaseaux

Auxiliar #8

1. Problemas

1.1. Números de Catalan

Una string de paréntesis $w \in \{0,1\}^{2n}$ se dice *balanceado* si la cantidad de paréntesis que abren es igual a la de los que cierran. Un string balanceado es *correcto* si en cualquiera de sus prefijo $p \leq w$ el número de paréntesis que abre es mayor igual al de los que cierran. Por otro lado, un string balanceado es *inv-correcto* si el string que se obtiene de él cambiando paréntesis que abren por paréntesis que cierran y vice versa es balanceado. Por ejemplo,

-)))(no es balanceado,
- ())(es balanceado pero no es correcto, y
- (()))))() es correcto.

Llamaremos B_n a la cantidad de strings balanceados y C_n a la cantidad de strings correctos (equiavelentemente, de strings ienv-correctos) de $2n$ paréntesis. Usaremos b para denotar strings balanceados, c para correctos y $\bar{c}$ para inv-correctos.

1. Muestre que $B_n = \binom{2n}{n}$
2. Muestre que para $n > 0$ una secuencia correcta es de la forma $(c)c'$ y deduzca que:

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}$$

3. Muestre que un string balanceado es de la forma $(c)b$ ó $)\bar{c}(b$, y deduzca que

$$B_{n+1} = 2\sum_{i=0}^{n} B_i C_{n-i}$$

4. Muestre que un string balanceado no correcto comienza por $c)$ seguido de un string casi balanceado (sólo con exceso de un parántesis abierto $'('$). Deduzca que

$$B_{n+1} - C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2i+1}{i} C_{n-i}$$

5. Muestre que

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i+1} B_i C_{n-i}$$

6. De lo anterior deduzca por inducción que

$$C_n = \frac{1}{1+n} B_n = \frac{1}{1+n} \binom{2n}{n}$$

7. Relacione los números B_n y C_n con caminatas en el plano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que comienzan en $(0,0)$ y terminan en (n,n). ¿Qué están contando B_n y C_n ?

8. Muestre que C_n es la cantidad de árboles generales de $n+1$ nodos. Muestre que es también el numero de árboles binarios de n nodos, mediante el identificar el ”hijo derechoçon el ”siguiente hermano"de un árbol general y el ”hijo izquierdoçon el "primer hijo"de un árbol general.

1.2. Resolución de Ecuaciones de Recurrencia

1. La secuencia x_n se define por $x_0 = 1$, $x_1 = 3$ y $x_n = 5x_{n-1} + 6x_{n-2}$ para $n \geq 2$. Encuentre una expresión general cerrada para x_n.

2. La secuencia x_n se define por $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_n = 4x_{n-1} + 3x_{n-2} - 18x_{n-3}$ para $n \geq 3$. Encuentre una expresión general cerrada para x_n.

3. La secuencia x_n se define por $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, y $x_n = x_{n-1} + -4x_{n-2}$ para $n \geq 2$. Encuentre una expresión general cerrada para x_n.