UNIVERSIDAD DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA COMPUTACION

Matemáticas Discretas para la Computación - CC3101
Control 1 - Semestre Otoño 2017

1. *a*) Una relación binaria R sobre A se dice *euclideana* si satisface lo siguiente:

   Para todo $a, b, c \in A$, si $(a, b) \in R$ y $(a, c) \in R$ entonces $(b, c) \in R$.

   ¿Es cierto que R es de equivalencia si y solo si es refleja y euclideana?

   b) Sean $(S_1, \preceq_1)$ y $(S_2, \preceq_2)$ órdenes (parciales). Definimos su *producto cartesiano* $(S_{1,2}, \preceq_{1,2})$ de tal forma que: (i) $S_{1,2} = S_1 \times S_2$, y (ii) $(a, b) \preceq_{1,2} (c, d)$ si y solo si $a \preceq_1 c$ y $b \preceq_2 d$. Demuestre que si $|S_1|, |S_2| \geq 2$, entonces $(S_{1,2}, \preceq_{1,2})$ no es un orden total.

2. El largo $l(\phi)$ de una fórmula ϕ en la lógica proposicional $\mathcal{L}(p)$ es el número de símbolos que aparecen en la fórmula al leerla de izquierda a derecha. (Asumimos que todos los paréntesis están presentes, incluidos los externos). Por ejemplo, $l(p) = 1$, si $p \in P$, y $l((p \wedge (\neg q))) = 8$, si $p, q \in P$. Del mismo modo, definimos $v(\phi)$ como el número de proposiciones en P que observamos al leer ϕ de izquierda a derecha. Por ejemplo, $v(p) = 1$ y $v((p \vee p)) = 2$, si $p \in P$.

   a) Demuestre que para toda fórmula ϕ en $\mathcal{L}(P)$ que no utiliza el conectivo $\neg$ se cumple que:

   $$l(\phi) \ \leq \ 3 \cdot v(\phi)^2.$$

   b) Lo anterior dice que el largo de una fórmula sin negación está acotado polinomialmente por el número de ocurrencias de proposiciones en ella. Demuestre que esto no se sigue cumpliendo si ahora permitimos utilizar la negación $\neg$.

   c) Encuentre una restricción sintáctica del lenguaje $\mathcal{L}(P)$ que sea funcionalmente completa (es decir, para cada fórmula ϕ en $\mathcal{L}(P)$ existe una fórmula ϕ' en el lenguaje restringido tal que $\phi \equiv \phi'$), y para la cual se cumpla la propiedad de que el largo de una fórmula está acotado polinomialmente por el número de ocurrencias de proposiciones en ella. Es decir, existe $k \geq 1$ tal que para toda fórmula ϕ en el lenguaje restringido se cumple que $l(\phi)$ es $O(v(\phi)^k)$.

3. Una fórmula de la lógica proposicional $\mathcal{L}(P)$ está en *3CNF* si es de la forma:

   $$\bigwedge_{1 \leq i \leq n} (l_i^1 \vee l_i^2 \vee l_i^3), \tag{1}$$

   donde para cada $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq 3$ se tiene que existe $p \in P$ tal que $l_i^j = p$ ó $l_i^j = \neg p$. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee s \vee r)$ es una fórmula en 3CNF, pero $p \vee (r \wedge q)$ no lo es.

   Sea R una relación binaria sobre A. Un *cubrimiento* de R es un $S \subseteq A$ tal que para cada par $(a, b) \in R$ se tiene que $a \in S$ o $b \in S$.

Dada una fórmula ϕ en 3CNF como en la Ecuación (1), se le pide construir un conjunto A y una relación binaria R sobre A tal que:

$$\phi \text{ es satisfacible} \quad \Longleftrightarrow \quad R \text{ tiene un cubrimiento de tamaño } 2n.$$

El costo de todos los pasos efectuados en su construcción debe ser a lo más $O(n^k)$, para un $k \geq 1$ fijo (es decir, que no depende de ϕ).

Hint: El conjunto A consiste de los elementos $\{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3\}$ que representan los diferentes literales que ocurren en ϕ. La relación R se define sobre A de tal forma que el complemento de cualquiera de sus cubrimientos de tamaño $2n$ codifica una valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ que satisface ϕ, y correspondientemente, toda valuación $\sigma : P \to \{0, 1\}$ que satisface ϕ naturalmente define el complemento de un cubrimiento de A de tamaño $2n$.