Potencias Virtuales

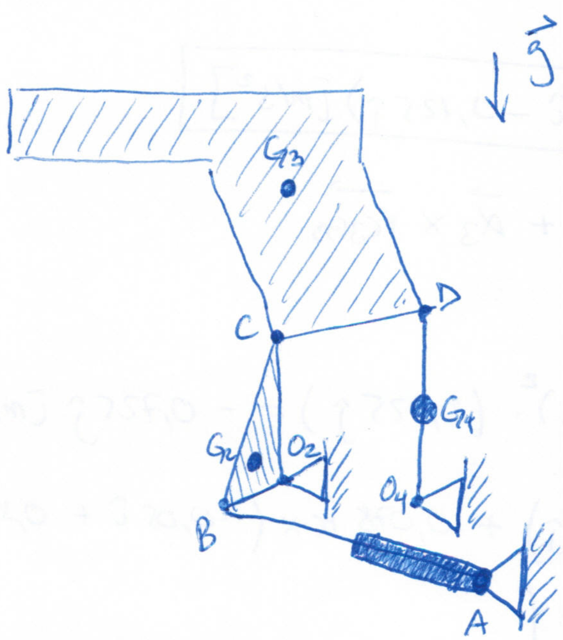
$$\sum \vec{F_i} \cdot \vec{v_i} + \sum \vec{M_i} \cdot \vec{\omega_i} = 0$$

Se consideran todas las fuerzas externas, incluyendo las fuerzas inerciales, pero no se consideran las fuerzas de reacción.

Recordar como calcular fuerzas y momentos inerciales:

$$F_i = -mA_G \quad , \quad M_i = -I_G \alpha .$$

Problema 1



Datos:

$m_2 = 40\ kg \qquad I_2 = 2\ kg\,m^2$

$m_3 = 500\ kg \qquad I_3 = 200\ kg\,m^2$

$m_4 = 20\ kg \qquad I_4 = 1\ kg\,m^2$

$\vec{\omega_2} = -1\ rad/s\ \hat{k} \qquad \vec{\alpha_2} = 0\ rad/s^2\ \hat{k}$

$\vec{\omega_3} = -0{,}153\ rad/s\ \hat{k} \qquad \vec{\alpha_3} = 0{,}078\ rad/s^2\ \hat{k}$

$\vec{\omega_4} = -0{,}916\ rad/s\ \hat{k} \qquad \vec{\alpha_4} = -0{,}082\ rad/s^2\ \hat{k}$

$\vec{r_{O_2G_2}} = (-0{,}05\,\hat{\imath} + 0{,}125\,\hat{\jmath})\ m$

$\vec{r_{O_2C_2}} = 0{,}725\,\hat{\jmath}\ m$

$\vec{r_{C_3G_3}} = (-0{,}05\,\hat{\imath} + 0{,}8\,\hat{\jmath})\ m$

$\vec{r_{O_4G_4}} = (0{,}05\,\hat{\imath} + 0{,}4\,\hat{\jmath})\ m$

$\vec{r_{O_2B_2}} = (-0{,}1\,\hat{\imath} - 0{,}025\,\hat{\jmath})\ m$

$\vec{r_{AB}} = (-0{,}8\,\hat{\imath} + 0{,}2\,\hat{\jmath})\ m$

Obtener la Fuerza F que aporta el cilindro AB, para que se obtenga el estado cinemático mostrado.

Por potencias virtuales se tiene:

$$\vec{F} \cdot \vec{v_{B_2}} + \vec{P_2} \cdot \vec{v_{G_2}} + \vec{F_{i2}} \cdot \vec{v_{G_2}} + \vec{P_3} \cdot \vec{v_{G_3}} + \vec{F_{i3}} \cdot \vec{v_{G_3}} + \vec{P_4} \cdot \vec{v_{G_4}} + \vec{F_{i4}} \cdot \vec{v_{G_4}} \quad (*)$$

$$+ \vec{M_{2i}} \cdot \vec{\omega_2} + \vec{M_{3i}} \cdot \vec{\omega_3} + \vec{M_{4i}} \cdot \vec{\omega_4} = 0$$

Noter qe no se consideraron las fuerzas de reacción al ver las fuerzas externas, y qe se tomen en cuenta las fuerzas y momentos inerciales.

Por lo tanto comenzaremos calculando F_i e M_i:

$$\overrightarrow{M_{i2}} = -I_2 \cdot \overrightarrow{\alpha_2} = -2 \cdot 0 = 0.$$

$$\overrightarrow{M_{i3}} = -I_3 \cdot \overrightarrow{\alpha_3} = -200 \cdot 0,078 = -15,6\ \hat{k}\ [N \cdot m]$$

$$\overrightarrow{M_{i4}} = -I_4 \cdot \overrightarrow{\alpha_4} = -1 \cdot (-0,082) = 0,082\hat{k} [N \cdot m]$$

Para el calculo de las fuerzas inerciales es necesario tener las aceleraciones de los puntos (G_2, G_3, G_4).

$$\overrightarrow{A_{G2}} = -\omega_2^2 \cdot \overrightarrow{r_{O2G2}} + \cancel{\overrightarrow{\alpha_2}}^{0} \times \overrightarrow{r_{O2G2}}$$

$$= -(-1)^2(-0,05\hat{\imath} + 0,125\hat{\jmath}) = \boxed{(0,05\hat{\imath} - 0,125\hat{\jmath}) [m/s^2]}$$

$$\overrightarrow{A_{G3}} = \overrightarrow{A_{C3}} + \overrightarrow{A_{G3C3}} = \overrightarrow{A_{C3}} - \omega_3^2\ \overrightarrow{r_{C3G3}} + \overrightarrow{\alpha_3} \times \overrightarrow{r_{C3G3}}$$

Por lo qe es necesario obtener $\overrightarrow{A_{C3}}$.

$$\overrightarrow{A_{C3}} = \overrightarrow{A_{C2}} = -\omega_2^2\ \overrightarrow{r_{O2C2}} + \overrightarrow{\alpha_2} \times \overrightarrow{r_{O2C2}} = -(-1)^2 \cdot (0,725\hat{\jmath}) = -0,725\hat{\jmath}\ [m/s^2]$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_{G3}} = -0,725\hat{\jmath} - (-0,153)^2 \cdot (-0,05\hat{\imath} + 0,8\hat{\jmath}) + 0,078\hat{k} \times (-0,05\hat{\imath} + 0,8\hat{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A_{G3}} = (-0,0612\hat{\imath} - 0,7476\hat{\jmath})\ [m/s^2]}$$

$$\overrightarrow{A_{G4}} = -\omega_4^2 \cdot \overrightarrow{r_{O4G4}} + \overrightarrow{\alpha_4} \times \overrightarrow{r_{O4G4}} = -(-0,916)^2 \cdot (0,05\hat{\imath} + 0,4\hat{\jmath})$$
$$- 0,082\hat{k} \times (0,05\hat{\imath} + 0,4\hat{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{A_{G4}} = (-0,0092\hat{\imath} - 0,3028\hat{\jmath})\ [m/s^2]}$$

Ahora se calculan las fuerzas inerciales:

$$\overrightarrow{F_{i2}} = -m_2 \cdot \overrightarrow{A_{G2}} = -40 \cdot (0,05\hat{\imath} - 0,125\hat{\jmath}) = (-2\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})\ [N]$$

$$\overrightarrow{F_{i3}} = -m_3 \cdot \overrightarrow{A_{G3}} = -500(-0,0612\hat{\imath} - 0,7476\hat{\jmath}) = (30,6\hat{\imath} + 373,8\hat{\jmath})\ [N]$$

$$\vec{F_{i4}} = -m_4 \cdot \vec{A_{G4}} = -20(-0{,}0092\hat{\imath} - 0{,}3028\hat{\jmath}) = (0{,}184\hat{\imath} + 6{,}056\hat{\jmath})[N] \quad (3)$$

Ya calculadas las fuerzas y momentos hay que obtener las velocidades de los puntos B_2, G_2, G_3 y G_4.

$$\vec{V_{B2}} = \vec{\omega_2} \times \vec{r_{O2B2}} = (-1)\hat{k} \times (-0{,}1\hat{\imath} + 0{,}025\hat{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_{B2}} = (-0{,}025\hat{\imath} + 0{,}1\hat{\jmath})\,[m/s]}$$

$$\vec{V_{G2}} = \vec{\omega_2} \times \vec{r_{O2G2}} = (-1)\hat{k} \times (-0{,}05\hat{\imath} + 0{,}125\hat{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_{G2}} = (0{,}125\hat{\imath} + 0{,}05\hat{\jmath})\,[m/s]}$$

$$\vec{V_{G3}} = \vec{V_{C3}} + \vec{\omega_3} \times \vec{r_{C3G3}}$$

$$\vec{V_{C3}} = \vec{V_{C2}} = \vec{\omega_2} \times \vec{r_{O2C2}} = (-1)\hat{k} \times (0{,}725\hat{\jmath}) = 0{,}725\hat{\imath}\,[m/s]$$

$$\vec{V_{G3}} = 0{,}725\hat{\imath} - 0{,}153\hat{k} \times (-0{,}05\hat{\imath} + 0{,}8\hat{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_{G3}} = (0{,}8474\hat{\imath} + 0{,}0077\hat{\jmath})\,[m/s]}$$

$$\vec{V_{G4}} = \vec{\omega_4} \times \vec{r_{O4G4}} = -0{,}916\hat{k} \times (0{,}05\hat{\imath} + 0{,}4\hat{\jmath})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{V_{G4}} = (0{,}3664\hat{\imath} - 0{,}0458\hat{\jmath})\,[m/s]}$$

Ahora hay que realizar todos los productos punto en la ecuación (*), para ello veamos que $\vec{F}$ se puede escribir como: $\vec{F} = F(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$ y que θ es el ángulo del vector $\vec{r_{AB}}$

$\measuredangle \vec{r_{AB}} = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}2}{-0{,}8}\right) = -14{,}0362°$ pero por dibujo nuestro ángulo θ debe estar en el segundo cuadrante $\Rightarrow \theta = 180° - 14{,}0362° \Rightarrow \boxed{\theta = 165{,}9638°}$

$\boxed{\approx \theta \approx 166°}$

$$\Rightarrow \vec{F} = F(\cos 166\,\hat{\imath} + \sin 166\,\hat{\jmath}) = F(-0{,}9703\hat{\imath} + 0{,}2419\hat{\jmath})$$

Ahora se pueden realizar todos los productos punto y obtener el valor de F, considerando que $\vec{P_i} = -m_i g \hat{j}$

- $\vec{F} \cdot \vec{v_{B_2}} = 0{,}0484\ F$
- $\vec{P_2} \cdot \vec{v_{G_2}} = -19{,}6$
- $\vec{F_{i2}} \cdot \vec{v_{G_2}} = 0$
- $\vec{P_3} \cdot \vec{v_{G_3}} = -37{,}73$
- $\vec{F_{i3}} \cdot \vec{v_{G_3}} = 28{,}8087$
- $\vec{P_4} \cdot \vec{v_{G_4}} = 8{,}9768$
- $\vec{F_{i4}} \cdot \vec{v_{G_4}} = -0{,}2099$
- $\vec{M_{2i}} \cdot \vec{\omega_2} = 0$
- $\vec{M_{3i}} \cdot \vec{\omega_3} = 2{,}3868$
- $\vec{M_{4i}} \cdot \vec{\omega_4} = -0{,}0751$.

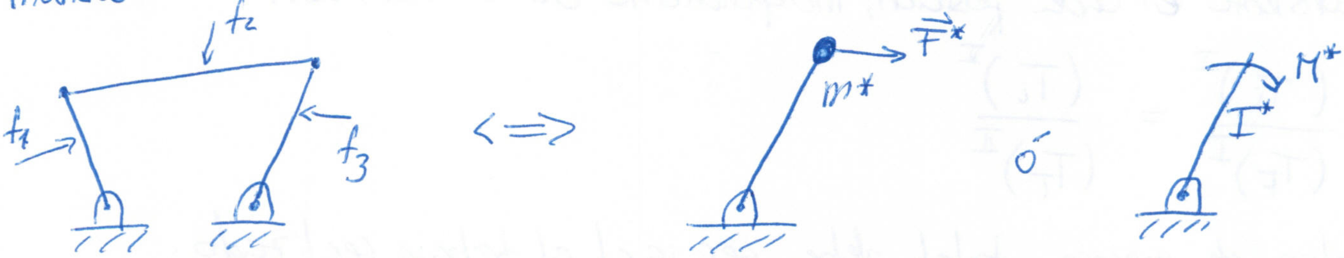
$$\Rightarrow \boxed{F = 360{,}3864}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = 360{,}3864\,(\cos 166^\circ \hat{i} + \sin 166\,\hat{j})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = (-349{,}6814\,\hat{i} + 87{,}1854\,\hat{j})}$$

Masa e inercia reducida

Cuando se tiene un sistema con 1 GDL, se puede modelar de la siguiente manera:



Para realizar esto, hay que escribir la energía cinética del mecanismo en función de una coordenada generalizada.

Energía cinética de cada eslabón: $T_i = \frac{1}{2} m_i V_i^2 + \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$

Energía cinética del mecanismo: $T = \Sigma T_i$

En el sistema simplificado se tiene que la energía cinética es: $T = \frac{1}{2} m^* V^2$

$= \frac{1}{2} I^* \omega^2$

Donde V y ω deben ser la coordenada generalizada.
(de esta forma se simplifica después).

$\Rightarrow$ masa reducida: $m^* = \frac{2T}{V^2}$, inercia reducida: $I^* = \frac{2T}{\omega^2}$

Fuerza o momento reducida

$\vec{F}^*$ o $\vec{M}^*$ debe producir el mismo trabajo virtual o potencia virtual que todas las fuerzas externas.

$$\vec{F}^* \cdot \vec{V} = \Sigma \vec{F_i} \vec{V_i} + \Sigma \vec{M_i} \cdot \vec{\omega_i} = m^* \vec{a} \cdot \vec{V}$$

$$\vec{M}^* \cdot \vec{\omega} = \Sigma \vec{F_i} \cdot \vec{V_i} + \Sigma \vec{M_i} \cdot \vec{\omega_i} = I^* \cdot \vec{\alpha} \cdot \vec{V}$$

$$\Rightarrow \vec{F}^* = m^* \vec{a}$$

$$\vec{M}^* = I^* \vec{\alpha}$$

Método de Quinn

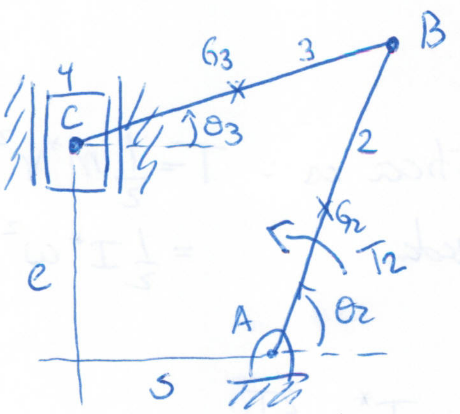
La razón de energía total que contiene un eslabón de un mecanismo se mantiene constante en cada posición, independiente de la velocidad.

$$\xi_i = \frac{(T_i)^{I}}{(T_T)^{I}} = \frac{(T_i)^{II}}{(T_T)^{II}}$$

El cambio de energía total debe ser igual al trabajo realizado.

$$(T_T)^{II} - (T_T)^{I} = W^{I \to II} \ (F \cdot \Delta x \ \text{ó} \ M \cdot \Delta\theta)$$

Problema 2



Datos:

$AB = r_2$ | s | m_4

$AG_2 = r_2/2$ | θ_2 | I_2

$BC = r_3$ | θ_3 | I_3

$BG_3 = r_3/2$ | $m_2 = 0$ | g

$m_3 = 0$

(a) Determinar la velocidad del cuerpo 4 y la velocidad angular del cuerpo 3, como función de la velocidad angular del cuerpo 2.

(b) Determinar la masa y fuerza reducida del mecanismo en función de la coordenada generalizada θ_2.

(c) El mecanismo parte del reposo cuando $\theta = 45°$, determinar la velocidad angular del cuerpo 2 cuando $\theta_2 = 60°$. Considere los siguientes valores:

$r_2 = 1m$ $\quad$ $I_2 = 0{,}01\ m^2kg$

$r_3 = 1m$ $\quad$ $I_3 = 0{,}01\ m^2kg$

$s = 0{,}2m$ $\quad$ $g = 9{,}8\ m/s^2$

$m_4 = 1kg$ $\quad$ $T_2 = 20Nm$

a) Ecuaciones de cierre

$$s + r_2 \cos\theta_2 - r_3 \cos\theta_3 = 0$$

$$e - r_2 \sin\theta_2 + r_3 \sin\theta_3 = 0$$

derivando se obtiene la ecuación de cierre en función de ω_2.

$$-r_2 \sin\theta_2\, \omega_2 + r_3 \sin\theta_3\, \omega_3 = 0 \quad (1)$$

$$\dot{e} - r_2 \cos\theta_2\, \omega_2 + r_3 \cos\theta_3\, \omega_3 = 0 \quad (2)$$

Notemos que $\dot{e} = V_4$.

De (1) se tiene: $\boxed{\omega_3 = \dfrac{r_2 \sin\theta_2}{r_3 \sin\theta_3}\, \omega_2}$

Reemplazando en (2) y despejando:

$$\boxed{V_4 = r_2 \omega_2 \left(\cos\theta_2 - \frac{\sin\theta_2}{\tan\theta_3} \right)}$$

b) La energía cinética del mecanismo inicial:

$$T = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 + \frac{1}{2} m_4 V_4^2 \quad (3)$$

Este debe ser igual al del mecanismo reducido:

$$T = \frac{1}{2} I^* \omega_2^2$$

si reemplazamos ω_3 y V_4 obtenidos en (a) en (3) se tiene que:

$$I^* = I_2 + I_3 \frac{r_2^2 \sin^2\theta_2}{r_3^2 \sin^2\theta_3} + m_4 r_2^2 \left(\cos\theta_2 - \frac{\sin\theta_2}{\tan\theta_3} \right)^2 \quad (4)$$

Fuerza reducida, para obtenerla hay que recordar que esta debe producir el mismo trabajo virtual o potencia virtual que todas las fuerzas externas.

$$M^* \omega_2 = T_2 \omega_2 - m_4 g V_4$$

$$= T_2 \omega_2 - m_4 g r_2 \left(\cos\theta_2 - \frac{\sin\theta_2}{\tan\theta_3} \right) \omega_2 .$$

$$\Rightarrow \boxed{M^* = T_2 - m_4 g \left(\cos\theta_2 - \frac{\sin\theta_2}{\tan\theta_3} \right)}$$

(c) Dado θ_2 se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} \theta_3 &= \arccos\left(\frac{s + r_2 \cos\theta_2}{r_3} \right) \\ e &= r_2 \sin\theta_2 - r_3 \sin\theta_3 \end{aligned}\right\} \text{obtenidos de la ecuación (1) y (2).}$$

$\theta_2^{I} = 45°$, $\theta_2^{II} = 60°$, $m_4 = 1\,kg$, $r_2 = 1$, $r_3 = 1$, $s = 0,2$, $g = 9,8\,m/s^2$

$\theta_3^{I} = 25°$, $e^{I} = 0,284$ $T_2 = 20\,Nm$, $\theta_3^{II} = 46°$, $e^{II} = 0,147$.

$$W = -m_4 g \left(e^{II} - e^{I} \right) + T_2 \left(\theta_2^{II} - \theta_2^{I} \right)$$

$$\Rightarrow W = 1,3426 + 5,236 = 6,58$$

Energía cinética total: $(T_T)^{I} = 0$ situación inicial en reposo.

$$(T_T)^{II} - (T_T)^{I} = W$$

$$\Rightarrow T_T^{II} = W = 6,58 .$$

$$T_T^{II} = \frac{1}{2} I^* \omega_2^2 = 6,58 \quad (5)$$

I^* se obtiene de (4) con los valores dados $\Rightarrow I^* = 0,138$

Reemplazando en (5) se tiene: $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 6,58}{0,138}} = 9,8\ rad/s$.