$\dot{m}$ = caudal másico circulante $\left[\dfrac{Kg}{s}\right]$

η = rendimiento del compresor

Como magnitudes fundamentales, se elegirán M L T θ.

Se eligen cuatro variables fundamentales que caracterizan las magnitudes fundamentales elegidas. Dichas variables son: $\dot{m}$, D, ω, T_{01}.

Existirán siete grupos adimensionales que caracterizan el fenómeno. Estos son:

		$\dot{m}$	D	ω	T_{01}	P_{01}	μ	K	R	P_{02}	ΔT_0	η
a	M	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	L	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
c	T	-1	0	-1	0	-2	-1	0	-2	-2	0	0
d	θ	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0
a	$\dot{m}$	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
b	D	0	1	0	0	-1	-1	0	2	-1	0	0
(-1)(c+a)	ω	0	0	1	0	1	0	0	2	1	0	0
d	T_{01}	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	1	0

$$\pi_1 = \frac{p_{01}\ D}{\dot{m}\ \omega}$$

$$\pi_2 = \frac{\mu\ D}{\dot{m}} = \frac{\mu\ D}{Q\,\rho} = \frac{\nu\ D}{s\,\rho} = \frac{\nu\ 4}{\pi D V} \equiv \frac{1}{Re}$$ inversa del número de Reynolds

$\pi_3 = K$ índice de politropía.

$$\pi_4 = \frac{R\ T_{01}}{D^2\ \omega^2}$$

$$\pi_5 = \frac{P_{02}\ D}{\dot{m}\ \omega}$$

$\pi_6 = \dfrac{\Delta T}{T_{01}}$ relación de temperaturas

$\pi_6 = \eta$ rendimiento de la máquina

Una combinación de números adimensionales es asimismo un número adimensional, con lo cual se tiene:

$$\frac{\Pi_1}{\sqrt{\Pi_4}} = \frac{\dfrac{P_{01}\ D}{\dot{m}\ \omega}}{\sqrt{\dfrac{R\ T_{01}}{D^2\ \omega^2}}} = \frac{P_{01}\ D^2}{\dot{m}\ \sqrt{T_{01}\ R}}; \qquad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\dot{m}\ \sqrt{T_{01}\ R}}{P_{01}\ D^2}; \qquad \frac{\sqrt{\Pi_4}}{\Pi_1} = \frac{\sqrt{T_{01}\ R}}{\dfrac{P_{01}\ D^2}{\dot{m}}}.$$

Este nuevo número adimensional es función del número de Mach a la entrada de la máquina.

Por otro lado:

$$\frac{\Pi_5}{\Pi_1} = \frac{\dfrac{P_{02}\,D}{\dot{m}\,\omega}}{\dfrac{P_{01}\,D}{\dot{m}\,\omega}} = \frac{P_{02}}{P_{01}};$$ relación de presiones, salida-entrada de la máquina.

$$\frac{1}{\sqrt{\Pi_4}} = \sqrt{\frac{D^2\,\omega^2}{R\;T_{01}}} = \frac{\omega\,D}{\sqrt{R\;T_{01}}};$$ este número es proporcional a la relación entre la velocidad del álabe y la velocidad del sonido. Vendría a ser el número de Mach del álabe.

Del colectivo de números adimensionales hallados, se eligen tres como básicos, los restantes son función de los elegidos.

Por otro lado, dichos grupos básicos han de definir el comportamiento del fluido. Por tanto incluirán P_{02}; η; ΔT_0. Así, se obtiene:

$$\frac{P_{02}}{P_{01}};\ \eta_c;\ \frac{\Delta T_0}{T_{01}} = f\left[\frac{\omega\,D}{\sqrt{R\;T_{01}}};\ \frac{\dot{m}\,\sqrt{R\;T_{01}}}{P_{01}\;D^2};\ \frac{\dot{m}}{\mu\,D};\ K\right]$$

Estos números adimensionales relacionan características de ventiladores que trabajen con: presiones diferentes, temperaturas diferentes, medidas diferentes, gases diferentes, etc.

Problema 46

46.1 Enunciado

Halle los grupos adimensionales que caracterizan el flujo de un fluido incompresible a través de un vertedero triangular. Determine la altura h que tendría el líquido diferente al original y para un modelo a escala. Determine asimismo la relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido entre modelo y prototipo.

46.2 Resolución

1. Las variables que intervienen en el fenómeno son:

Variables geométricas: α = ángulo del vertedero
h = altura del nivel del líquido respecto al vértice del vertedero [m]
Z = altura desde la base al vértice del vertedero [m]

Variables cinemáticas: Q = caudal volumétrico que atraviesa el vertedero. $\left[\frac{m^3}{s}\right]$

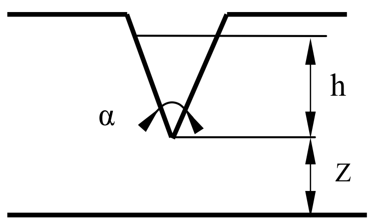
Variables dinámicas: ρ = densidad del fluido $\left[\frac{Kg}{m^3}\right]$

μ = viscosidad del fluido $\left[\frac{Kg}{m\,s}\right]$

g = aceleración de la gravedad $\left[\frac{m}{s^2}\right]$

P = presión $\left[\frac{Kg}{m^3}\right]$

σ = tensión superficial $\left[\frac{Kg}{s^2}\right]$



Las magnitudes fundamentales elegidas son M, L, T.

Se eligen las variables fundamentales como: h, Q, ρ, con lo cual han de aparecer cinco grupos adimensionales, estos son:

		h	Q	ρ	α	Z	μ	g	P	σ
a	M	0	0	1	0	0	1	0	1	1
b	L	1	3	-3	0	1	-1	1	-1	0
c	T	0	-1	0	0	0	-1	-2	-2	-2
b+3c+3a	h	1	0	0	0	1	-1	-5	-4	-3
-c	Q	0	1	0	0	0	1	2	2	2
a	ρ	0	0	1	0	0	1	0	1	1
					α	$\frac{z}{h}$	$\frac{\mu\, h}{Q\,\rho}$	$\frac{g\, h^5}{Q^2}$	$\frac{p\, h^4}{Q^2\,\rho}$	$\frac{\sigma\, h^3}{Q^2\,\rho}$

Los números adimensionales obtenidos son:

α ángulo del vertedero

$\frac{z}{h}$ longitud relativa

$\frac{\mu\, h}{Q\,\rho} = \frac{1}{Re}$ inversa del número de Reynolds

$\frac{g\, h^5}{Q^2} = \frac{1}{F_r^2}$ inversa del número de Fraude al cuadrado

$\frac{p\, h^4}{Q^2\,\rho}$ número de Euler.

(Puesto que se trata de un flujo con superficie libre, el número de Euler se puede desestimar.)

$\frac{\sigma\, h^3}{Q^2\,\rho}$ inversa del número de Weber

(Este número sería relevante si la lámina de fluido fuese delgada.)

2. Suponiendo que la lámina de fluido fuese suficientemente gruesa, los números adimensionales relevantes serían:

$$\frac{\mu\, h}{Q\,\rho} = \frac{\mu_1\, h_1}{Q_1\,\rho_1}; \qquad \frac{\nu\, h}{Q} = \frac{\nu_1\, h_1}{Q_1}; \qquad \frac{\nu}{\nu_1} = \frac{Q\, h_1}{Q_1\, h}$$

$$\frac{g\, h^5}{Q^2} = \frac{g\, h^5}{Q_1^2}; \qquad \frac{Q^2}{Q_1^2} = \frac{h^5}{h_1^5};$$

de donde:

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{h_1}{h}\,\frac{h^{\frac{5}{2}}}{h_1^{\frac{5}{2}}} = \frac{h^{\frac{3}{2}}}{h_1^{\frac{3}{2}}};$$

siendo ésta la relación entre las viscosidades cinemáticas y las alturas de la lámina de fluido.

3. La relación entre el caudal circulante y la viscosidad del fluido para dos vertederos a escala es:

$$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{h_1}{h}\,\frac{Q}{Q_1}; \qquad \frac{h}{h_1} = \frac{Q^{\frac{2}{5}}}{Q_1^{\frac{2}{5}}};$$

así: $$\frac{\nu}{\nu_1} = \frac{Q_1^{\frac{2}{5}}}{Q^{\frac{2}{5}}}\,\frac{Q}{Q_1} = \frac{Q^{\frac{3}{5}}}{Q_1^{\frac{3}{5}}};$$

Problema 47

47.1 Enunciado

Se tienen dos depósitos de grandes dimensiones, separados por una altura de 25 m. La presión relativa en el depósito inferior es de 200.000 Pa, mientras que en el depósito superior se tiene presión atmosférica. Se desea conectar ambos depósitos mediante un conducto de PVC de 400 m de longitud y con la ayuda de una bomba de 25 kW de potencia se pretende trasvasar un caudal de 0,2 m^3/s de agua del depósito inferior al superior.

Halle:

1) **El diámetro del conducto que se ha de utilizar para cumplir con los requerimientos establecidos.**

2) **Debido a la mala colocación de una brida situada cuatro metros antes de que el tubo llegue al depósito superior, aparece una fuga de agua en este punto. Si se conoce que la pérdida de energía que el agua experimenta al pasar a través de la brida es de $\Delta h = 100\ Q_b^2$, siendo Q_b el caudal de agua que se fuga a través de la brida, halle el nuevo caudal que fluye ahora por la instalación.**

Considere que la brida está a la misma altura que el nivel del líquido en el depósito superior. Se puede despreciar la energía cinética a la salida de la brida.

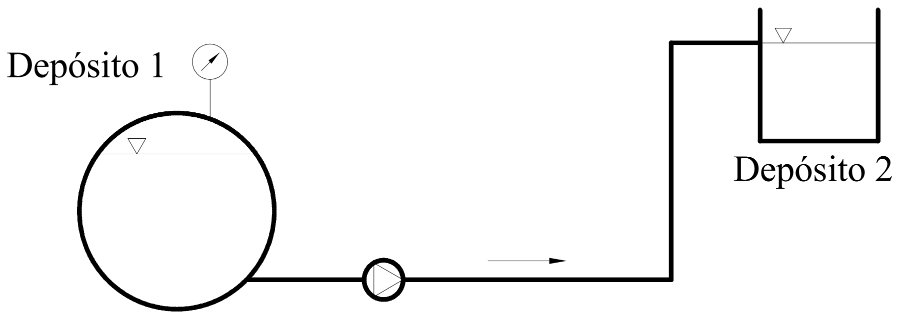


Fig. 47.1 Esquema de la instalación

47.2 Resolución

1. Aplicando la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres de los dos depósitos, se tiene:

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g}+z_1+\frac{V_1^2}{2 \cdot g}+H=\frac{P_2}{\rho \cdot g}+z_2+\frac{V_2^2}{2 \cdot g}+\Delta h_{12}$$

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g}+z_1+\frac{V_1^2}{2 \cdot g}+\frac{W}{\rho \cdot g \cdot Q}=\frac{P_2}{\rho \cdot g}+z_2+\frac{V_2^2}{2 \cdot g}+f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}$$

siendo $\Delta h = f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}$ la expresión para la pérdida de carga en tuberías, en función de la longitud L, el diámetro D, el caudal Q y el coeficiente de fricción f, y $H=\frac{W}{\rho \cdot g \cdot Q}$ la altura de elevación de la bomba en función de la potencia (W) y el caudal.

Tomando un valor inicial para f de 0,02 (valor estándar para tuberías), se puede obtener el valor del diámetro D:

$$\frac{200.000\,\text{Pa}}{1.000\,{}^{kg}/_{m^3} \cdot 9,81\,{}^{m}/_{s^2}}+0+0+\frac{25.000\,\text{W}}{1.000\,{}^{kg}/_{m^3} \cdot 9,81\,{}^{m}/_{s^2} \cdot 0,2\,{}^{m^3}/_{s}}=0+25\,\text{m}+0+0,02 \cdot \frac{400\,\text{m}}{D^5\,\text{m}^5} \cdot \frac{8 \cdot 0,2^2\,{}^{m^6}/_{s^2}}{\pi^2 \cdot 9,81\,{}^{m}/_{s^2}}$$

Aislando la D de la ecuación, se obtiene: $D=0,318\,\text{m}$

El valor del número de Reynolds para este diámetro es:

$$Re=V \cdot \frac{D}{\nu}=\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D^2} \cdot \frac{D}{\nu}=\frac{4 \cdot Q}{\pi \cdot D \cdot \nu}=\frac{4 \cdot 0,2\,{}^{m^3}/_{s}}{\pi \cdot 0,318\,\text{m} \cdot 1,02 \cdot 10^{-6}\,{}^{m^2}/_{s}}=785.051,3$$

A través del gráfico de Moody, se halla un valor del coeficiente de fricción correspondiente a este número de Reynolds de f = 0,0125.

Con el nuevo valor de *f* se determina de nuevo la pérdida de carga en función del diámetro:

$$\Delta h=f \cdot \frac{L}{D^5} \cdot \frac{8 \cdot Q^2}{\pi^2 \cdot g}=0,0125 \cdot \frac{400\,\text{m}}{D^5\,\text{m}^5} \cdot \frac{8 \cdot 0,2^2\,{}^{m^6}/_{s^2}}{\pi^2 \cdot 9,81\,{}^{m}/_{s^2}}=0,01653 \cdot \frac{1}{D^5}\,\text{m}$$

Utilizando la ecuación de Bernoulli, se halla nuevamente el valor de D para la nueva Δh:

$$\frac{P_1}{\rho \cdot g}+H=z_2+\Delta h_{12}$$

$$\Delta h_{12}=-z_2+\frac{P_1}{\rho \cdot g}+H=-25\,\text{m}+\frac{200.000\,\text{Pa}}{1.000\,{}^{kg}/_{m^3} \cdot 9,81\,{}^{m}/_{s^2}}+\frac{25.000\,\text{W}}{1.000\,{}^{kg}/_{m^3} \cdot 9,81\,{}^{m}/_{s^2} \cdot 0,2\,{}^{m^3}/_{s}}=8,129\,\text{m}$$

$$0,01653 \cdot \frac{1}{D^5}\,\text{m}=8,129\,\text{m}$$

Aislando D de la ecuación, se obtiene el nuevo valor: $D=0,289\,\text{m}$

El valor del número de Reynolds será:

$$\mathrm{Re}=\frac{4\cdot Q}{\pi\cdot D\cdot \nu}=\frac{4\cdot 0,2\ \mathrm{m^3/s}}{\pi\cdot 0,289\,\mathrm{m}\cdot 1,02\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}}=863.857,5$$

Y, según Moody, $f=0,012$; considerando que el valor del factor de fricción es prácticamente el mismo que el obtenido con anterioridad, se concluye que el diámetro será: $\boxed{D=0,289\,\mathrm{m}}$

2. El esquema de la instalación para este segundo caso será:

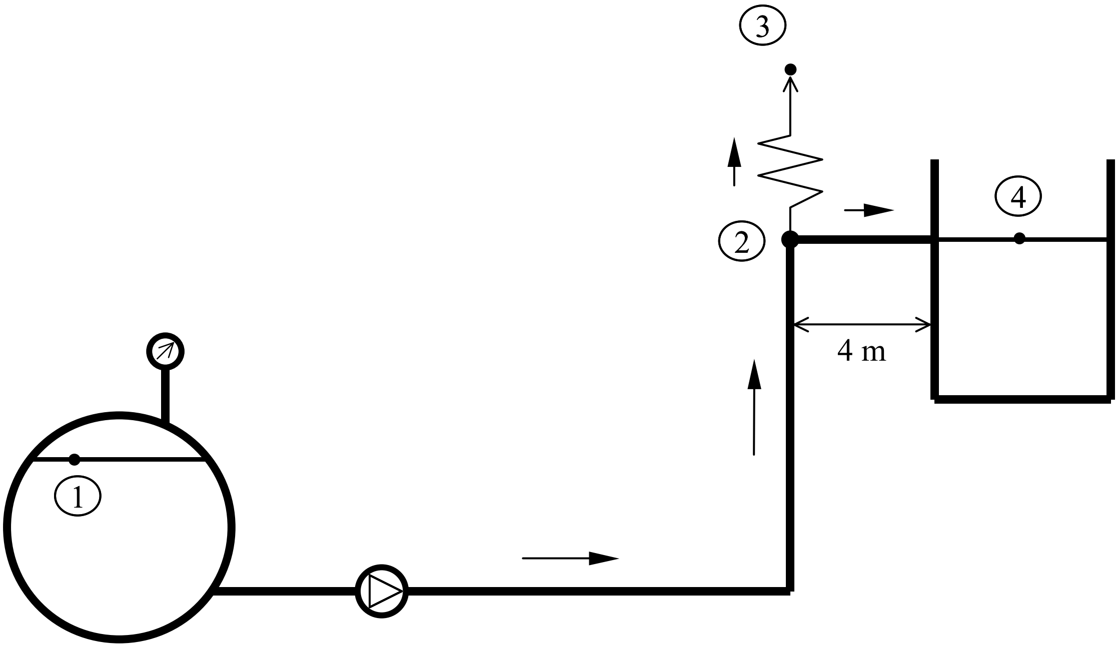


Fig. 47.2 Esquema de la instalación

Las ecuaciones que se tienen en este caso son:
aplicando Bernoulli entre 2 y 3:

$$E_2=E_3+\Delta h_{23}=E_3+100\cdot Q_b{}^2$$

Entre los puntos 2 y 4, se concluye:

$$E_2=E_4+\Delta h_{24}=E_4+f\cdot\frac{L}{D^5}\cdot\frac{8\cdot Q_{24}{}^2}{\pi^2\cdot g}=E_4+0,012\cdot\frac{4\,\mathrm{m}}{0,289^5\ \mathrm{m}^5}\cdot\frac{8\cdot Q_{24}{}^2\ \mathrm{m^6/s^2}}{\pi^2\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}=E_4+1,967\cdot Q_{24}{}^2$$

Y entre los puntos 1 y 2:

$$E_1+H=E_2+\Delta h_{12}=E_2+f\cdot\frac{L}{D^5}\cdot\frac{8\cdot Q_T{}^2}{\pi^2\cdot g}=E_2+0,012\cdot\frac{396\,\mathrm{m}}{0,289^5\ \mathrm{m}^5}\cdot\frac{8\cdot Q_T{}^2\ \mathrm{m^6/s^2}}{\pi^2\cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}=E_2+194,764\cdot Q_T{}^2$$

Según la ecuación de continuidad:

$$Q_T=Q_b+Q_{24}$$

Si se desprecia la energía cinética en la fuga de la brida (punto 3 de la figura):

$$E_3 = z_3 = 25\,\text{m}$$

$$E_4 = z_4 = 25\,\text{m}$$

Y los valores de E_1 y H:

$$E_1 = \frac{P_1}{\rho \cdot g} = \frac{200.000\,\text{Pa}}{1.000\,{}^{\text{kg}}\!/\!_{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\,{}^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}^2}} = 20{,}387\,\text{m}$$

$$H = \frac{25.000\,\text{W}}{1.000\,{}^{\text{kg}}\!/\!_{\text{m}^3} \cdot 9{,}81\,{}^{\text{m}}\!/\!_{\text{s}^2} \cdot 0{,}2\,{}^{\text{m}^3}\!/\!_{\text{s}}} = 12{,}742\,\text{m}$$

Se tiene un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas (Q_T, Q_b, Q_{24}, E_2).

$E_2 = 25 + 100 \cdot Q_b^{\,2}$ → ecuación 1 $E_2 = 25 + 1{,}967 \cdot Q_{24}^{\,2}$ → ecuación 2

$33{,}129 = E_2 + 194{,}764 \cdot Q_T^{\,2}$ → ecuación 3 $Q_T = Q_b + Q_{24}$ → ecuación 4

Aislando Q_b y Q_{24} de las ecuaciones 1 y 2, y sustituyendo las expresiones obtenidas en la ecuación 4, se tiene:

$$Q_T = \sqrt{\frac{E_2 - 25}{100}} + \sqrt{\frac{E_2 - 25}{1{,}967}} = 0{,}813 \cdot \sqrt{E_2 - 25}$$

$$Q_T^{\,2} = 0{,}661 \cdot (E_2 - 25)$$

Y además, por la ecuación 3:

$$Q_T^{\,2} = \frac{33{,}129 - E_2}{194{,}764}$$

Igualando las dos expresiones anteriores de Q_T:

$$0{,}661 \cdot (E_2 - 25) = \frac{33{,}129 - E_2}{194{,}764}$$

$$E_2 = 25{,}063\,\text{m}$$

Y el valor de las otras tres incógnitas es:

$$Q_{24} = 0{,}179\,{}^{\text{m}^3}\!/\!_{\text{s}}$$

$$Q_b = 0{,}025\,{}^{\text{m}^3}\!/\!_{\text{s}}$$

$\boxed{Q_T = 0{,}204\,{}^{\text{m}^3}\!/\!_{\text{s}}}$, que es el nuevo caudal total que se pedía en el enunciado.

Problema 48

48.1 Enunciado

En una central térmica de producción de energía eléctrica se tiene una instalación cuyo esquema se muestra a continuación, siendo el fluido de trabajo agua.

Se sabe que la presión y la temperatura en la caldera de vapor son de P = 2 bar (absoluta), T = 400ºC, y que en la turbina se produce una expansión adiabático-isentrópica con un salto entálpico de 777 KJ/Kg. (Considérese este salto entre los puntos 3 y 6.)

Si las pérdidas de carga en la tubería de aspiración son $\Delta h = 104\ Q^2$ y en la tubería de impulsión $\Delta h = 312\ Q^2$, siendo Q [m^3/s], Δh [m columna de agua], y sabiendo que la bomba que se utiliza es el modelo 150/315, con un diámetro de rodete de 270 mm, (y se considera que la cota del nivel del líquido del condensador está 1m por encima de la cota del nivel del líquido de la caldera,) se pide hallar:

1. El punto de funcionamiento de la bomba.
2. La cota Z (respecto al nivel del líquido del condensador) a la que hay que colocar la bomba para que no se produzca cavitación.
3. Debido a que se ha hecho un reajuste en el proceso, se precisa aumentar el caudal en un 20%. Si al motor de accionamiento de la bomba se le acopla un variador de frecuencia, determine a qué revoluciones debería girar para que la bomba suministre el nuevo caudal. ¿Con qué rendimiento trabaja ahora la bomba?

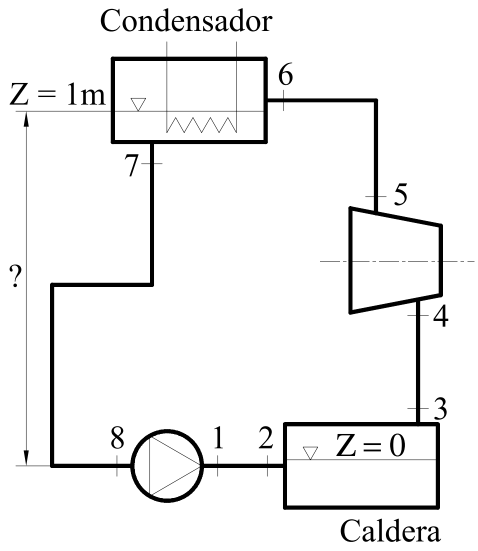


Fig. 48.1 Esquema del circuito en estudio

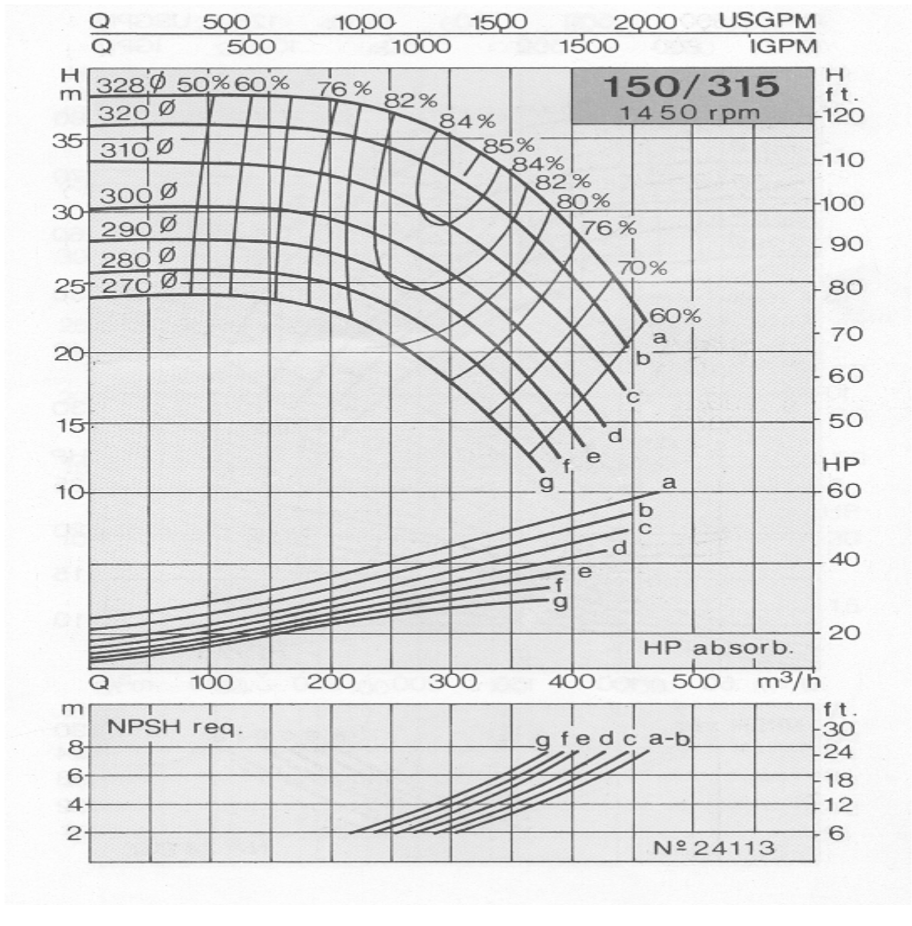


Fig. 48.2 Gráfica de la curva característica de la bomba. Cortesía de bombas ITUR

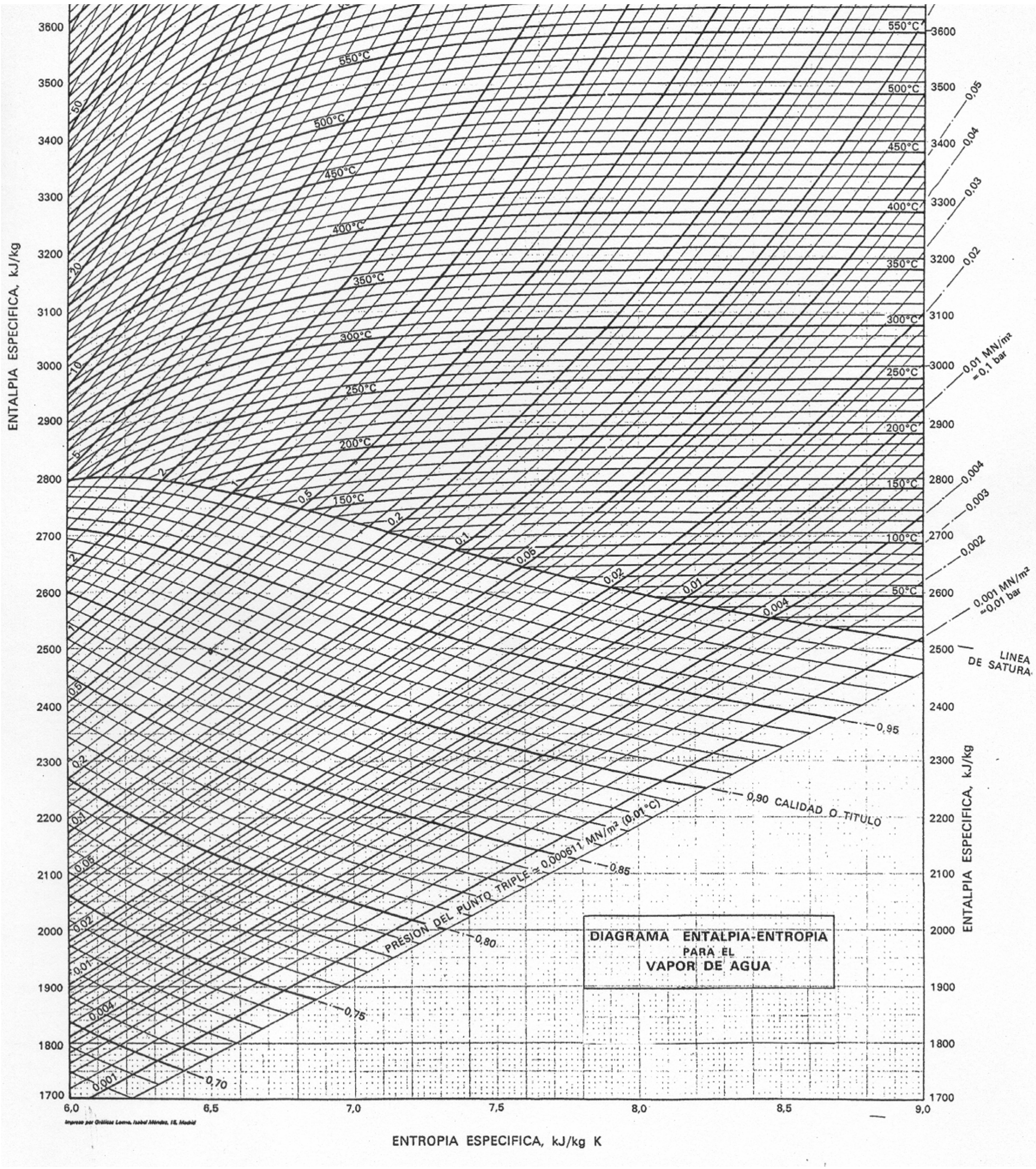


Fig. 48.3 Diagrama entalpía–entropía para el vapor de agua.
Fuente: José Segura, Termodinámica técnica

48.2 Resolución

Las condiciones termodinámicas en la caldera son:

P_3 absoluta = 2 bar
T_3 = 400ºC

Entrando con estas condiciones en el diagrama de Moliere, se obtiene:

$$h_3 = 3.277 \text{ KJ/Kg}$$

Si el salto entálpico entre 3 y 6 es de 777 KJ/Kg, y considerando la evolución adiabática isoentrópica, las condiciones termodinámicas en el punto 6 serán (resultado extraído del diagrama de Moliere):

P_6 = 0,05 bar
T_6 = 35ºC
h_6 = 2.500 KJ/Kg

1. Para hallar el punto de funcionamiento, se aplicará la ecuación de Bernoulli entre las superficies libres de condensador y la caldera; así:

$$\frac{P_{con}}{\rho g}+Z_{con}+\frac{V_{con}^2}{2g}+H=\frac{P_{cal}}{\rho g}+Z_{cal}+\frac{V_{cal}^2}{2g}+\Delta h_{72}$$

$$H=\frac{P_{cal}-P_{con}}{\rho g}+Z_{cal}-Z_{con}+\frac{V_{cal}^2-V_{con}^2}{2g}+\Delta h_{72}$$

Sustituyendo, y considerando las energías cinéticas en las superficies libres de los depósitos despreciables, se tiene:

$$H=\frac{(2-0{,}05)10^5}{1.000\times 9{,}8}-1+416Q^2$$

$$H=18{,}88+416Q^2$$

$$H[\mathrm{m}];\quad Q\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}\right]$$

La intersección entre esta curva y la curva característica de la bomba da lugar al punto de funcionamiento, y se obtiene:

$$Q=250\,\mathrm{m}^3/\mathrm{h}$$

$$H=20{,}88\text{ m}$$

2. Cálculo de la cota Z:

Aplicando la ecuación de Bernoulli entre la superficie libre del condensador y la brida de aspiración de la bomba, se llega a:

$$\frac{P_{con}}{\rho g}+Z_{con}+\frac{V_{con}^2}{2g}=\frac{P_8}{\rho g}+Z_8+\frac{V_8^2}{2g}+\Delta h_{78}$$

$$Z_{con}-Z_8=\frac{P_8-P_{con}}{\rho g}+\frac{V_8^2-V_{con}^2}{2g}+\Delta h_{78}$$

El término de energía cinética en la brida de aspiración es mucho mayor que en el condensador pero, puesto que no se conoce el diámetro del conducto, a priori se desprecian ambos términos; así, la definición de $NPSH_d$ queda: