ME 3301 - Mecánica de Fluidos
Pauta Auxiliar 7: Ecuaciones de Navier-Stokes, Adimensionalización y Similitud, y Capa Límite

Problema 1

a) Se tiene un problema en coordenadas cartesianas, en este caso inclinadas según muestra la figura del problema. Aquí se debe tener cuidado en considerar que existen dos fluidos y por tanto las condiciones de borde y propiedades del material cambian en cada caso. Por esto, en primera instancia se plantearán las ecuaciones de forma general, pero después se hara la distinción adecuadamente, esto se irá explicando de mejor manera a lo largo de la pauta.

Las ecuaciones de Navier-Stokes completas para un flujo incompresible bidimensional son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$
$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$
$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y+\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$$

En primera instancia se asume que $v=0$ en todo el flujo, o sea solo avanza en la dirección del plano inclinado, lo cual es razonable si es suficientemente largo y considerando un estado ya establecido. De la ecuación de continuidad entonces queda que $\frac{\partial u}{\partial x}=0$, lo que se cumple solo si $u=u(y)$. Con esto y recordando que se encuentra en estado estacionario, y además considerando que el plano inclinado al ser muy largo no cambia sus propiedades y variables en la dirección x, o sea $\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$. Recordar que la gravedad se debe descomponer, en este caso $g_x=gsin(\alpha)$ y $g_y=-gcos(\alpha)$. Y por último, cuando se trata de canales abiertos la fuerza que impulsa el movimiento del flujo no se trata de un gradiente de presión, sino de la gravedad misma, distintos sería el caso de una tubería cerrada e inclinada donde ambas componentes deberían ser tomadas en cuenta. Con todo esto, las ecuaciones se simplifican a:

$$0=\rho gsin(\alpha)+\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}-\rho gcos(\alpha)$$

b) Ahora se estudiarán las condiciones de borde, recordando que se trata de dos fluidos, y como son ecuaciones de segundo orden para u y de primer orden para p, se necesitan 3 condiciones de borde por fluido, o sea 6 en total. Primero las condiciones para la presión, donde se considera que en la superficie superior de 2, la que está en contacto con el aire, posee una presión igual a la atmosférica. Por su parte, en la interfaz la presión considerando el campo de presión del fluido 1 y del fluido 2 debe ser la misma. Esto se traduce en lo siguiente, llamando p_1 a la presión en el fluido 1 y p_2 en el fluido 2:

$$p_2(y=H)=P_{atm}$$
$$p_1(y=h_1)=p_2(u=h_1)$$

Por otro lado, para el campo de velocidad se tiene que en la superficie superior de 2 el esfuerzo de corte es casi nulo, pensando en que la viscosidad dinámica del aire es más baja que la del agua y que el gradiente de velocidad en la dirección vertical y es mucho menor que el existente dentro del fluido. Además en la interfaz debe existir continuidad del campo de velocidad, y debe existir continuidad del esfuerzo de corte considerando que de no ser así habría una fuerza no nula sobre un elemento infinitesimal provocando una aceleración muy grande, lo cual no tendría sentido físico. Y, por último, se debe cumplir la condición de no deslizamiento sobre la superficie de 1 en contacto con el plano inclinado. Todo esto se traduce en lo siguiente llamando u_1 a la velocidad en el fluido 1 y u_2 en 2:

$$\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=H}=0$$
$$u_1(y=h_1)=u_2(y=h_1)$$
$$\mu_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\bigg|_{y=h_1}=\mu_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=h_1}$$
$$u_1(y=0)=0$$

c) Para encontrar el campo de presión se parte con la siguiente ecuación:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g cos(\alpha)$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g cos(\alpha)$$
$$p = -\rho g y cos(\alpha) + A$$

Considerando que son dos fluidos distintos lo único que cambia es la densidad y la constante a calcular para cada caso, como sigue:

$$p_2 = -\rho_2 g y cos(\alpha) + A \rightarrow p_2(y = H) = P_{atm} \rightarrow P_{atm} = -\rho_2 g H cos(\alpha) + A \rightarrow A = P_{atm} + \rho_2 g H cos(\alpha)$$
$$p_2 = P_{atm} + \rho_2 g cos(\alpha)(H - y)$$

De forma similar, encontramos p_1 como sigue:

$$p_1 = -\rho_1 g y cos(\alpha) + B \rightarrow p_1(y = h_1) = P_{atm} + \rho_2 g cos(\alpha) h_2 = p_2(y = h_1) \rightarrow B = P_{atm} + \rho_2 g cos(\alpha) h_2 + \rho_1 g h_1 cos(\alpha)$$
$$p_1 = P_{atm} + \rho_2 g h_2 cos(\alpha) + \rho_1 g cos(\alpha)(h_1 - y)$$

d) Siguiendo ahora con el campo de velocidad, partiendo de la ecuación general lo escribiremos como un polinomio para el fuido 1 y 2, y se plantearán las condiciones de borde adecuadamente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\rho g sin(\alpha)}{\mu} \rightarrow u(y) = -\frac{\rho g sin(\alpha) y^2}{2\mu} + Cy + D$$
$$u_1(y) = -\frac{\rho_1 g sin(\alpha) y^2}{2\mu_1} + Cy + D \rightarrow \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\rho_1 g sin(\alpha) y + \mu_1 C$$
$$u_2(y) = -\frac{\rho_2 g sin(\alpha) y^2}{2\mu_2} + Ey + F \rightarrow \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\rho_2 g sin(\alpha) y + \mu_2 E$$

Primero imponiendo:

$$\mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=H} = 0$$
$$-\rho_2 g sin(\alpha) H + \mu_2 E = 0 \rightarrow E = \frac{\rho_2 g sin(\alpha) H}{\mu_2}$$

Luego, se actualiza el valor de u_2:

$$u_2(y) = -\frac{\rho_2 g sin(\alpha) y^2}{2\mu_2} + \frac{\rho_2 g sin(\alpha) H}{\mu_2} y + F \rightarrow \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = -\rho_2 g sin(\alpha) y + \rho_2 g sin(\alpha) H$$

Ahora se impone:

$$u_1(y = 0) = 0$$
$$u_1(y = 0) = D \rightarrow D = 0$$

Se actualiza el valor de u_1:

$$u_1(y) = -\frac{\rho_1 g sin(\alpha) y^2}{2\mu_1} + Cy \rightarrow \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\rho_1 g sin(\alpha) y + \mu_1 C$$

Se impone:

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial y}\bigg|_{y=h_1} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y}\bigg|_{y=h_1}$$
$$-\rho_1 g sin(\alpha) h_1 + \mu_1 C = -\rho_2 g sin(\alpha) h_1 + \rho_2 g sin(\alpha) H \rightarrow C = \frac{g sin(\alpha)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\mu_1}$$

Se actualiza el valor de u_1:

$$u_1(y) = -\frac{\rho_1 g sin(\alpha) y^2}{2\mu_1} + \frac{g sin(\alpha)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\mu_1} y$$

Por último se impone la continuidad en la interfaz:

$$u_1(y = h_1) = u_2(y = h_1)$$
$$-\frac{\rho_1 g sin(\alpha) h_1^2}{2\mu_1} + \frac{g sin(\alpha)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\mu_1} h_1 = -\frac{\rho_2 g sin(\alpha) h_1^2}{2\mu_2} + \frac{\rho_2 g sin(\alpha) H}{\mu_2} h_1 + F$$
$$F = -\frac{\rho_1 g sin(\alpha) h_1^2}{2\mu_1} + \frac{g sin(\alpha)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\mu_1} h_1 + \frac{\rho_2 g sin(\alpha) h_1^2}{2\mu_2} - \frac{\rho_2 g sin(\alpha) H}{\mu_2} h_1$$

Por tanto, el campo de velocidad es:

$$u_1 = -\frac{\rho_1 g sin(\alpha) y^2}{2\mu_1} + \frac{g sin(\alpha)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\mu_1} y$$
$$u_2 = -\frac{\rho_2 g sin(\alpha) y^2}{2\mu_2} + \frac{\rho_2 g sin(\alpha) H}{\mu_2} y + -\frac{\rho_1 g sin(\alpha) h_1^2}{2\mu_1} + \frac{g sin(\alpha)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\mu_1} h_1 + \frac{\rho_2 g sin(\alpha) h_1^2}{2\mu_2} - \frac{\rho_2 g sin(\alpha) H}{\mu_2} h_1$$

e) Se debe encontrar el máximo en cada fluido para ello se deriva simplemente cada campo de velocidad y se iguala a cero:

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\rho_1 g sin(\alpha) y}{\mu_1} + \frac{g sin(\alpha)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\mu_1}$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial y} = -\frac{\rho_2 g sin(\alpha) y}{\mu_2} + \frac{\rho_2 g sin(\alpha) H}{\mu_2}$$

De la primera ecuaci tiene que:

$$-\frac{\rho_1 g sin(\alpha) y}{\mu_1} + \frac{g sin(\alpha)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}{\mu_1} = 0 \rightarrow y = h_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 > h_1$$

Por tanto se encuentra fuera del dominio del campo de velocidad 1, ase no existe físicamente. Ahora en la segunda ecuación se ve claramente, recordando las condiciones de borde que se impusieron, que y=H es el máximo para este campo de velocidad, o sea la máxima velocidad de todo el flujo se encuentra justo en la interfaz en contacto con el aire.

Problema 2

a) La ecuación de continuidad nos indica que:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Considerando que la componente radial es nula, dado que el fluido sigue el movimiento del eje interior, y que la componente axial es nula igualmente, considerando el mismo argumento, se tiene que:

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0 \rightarrow u_\theta = u_\theta(r, z)$$

Pero, se asume que el flujo a lo largo del eje z es idéntico, pensando en un eje muy largo, por tanto la componente de velocidad no depende de z. Si se considera un flujo en forma cilíndrica entonces solo existe una componente, la tangencial, y solo depende de r. Si se considerara en aproximación como un flujo entre placas infinitas la única componente sería la componente en x, se puede hacer el mismo procedimiento con la ecuaci continuidad pero ahora en cartesianas o argumentarlo por simple analogía de las componentes.

b) La componente relevante entonces, siguiendo al análisis de la parte (a), sería la horizontal, o sea $u(y)$. Las ecuación de moméntum en x (la componente en y no es relevante porque no lidiaremos con presiones dado que el flujo no es axial, de ser radial un grandiente de presión serifícil de establecer y en forma tangencial en este caso no existe y se elimina por simetría axisimétrica) será:

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

Como ya se dijo la presión no es relevante en este problema, tampoco lo será la gravedad, pero estas dos si serían relevantes si el flujo fuese axial pensando en un tubería anular inclinada y cerrada. El flujo es estacionario e incompresible. Con estas consideraciones la ecuación queda:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow u = Ay + B$$

c) En cilíndricas las ecuaciones tienen una forma mucho más complicada y para cada componente (radial, tangencial y axial) las expresiones no son equivalentes o intercambiables, así que deben llevarlas anotadas por completo cada una en detalle (revisar Munson capitulo 6, flujo viscoso). La ecuación de moméntum tangencial queda:

$$\rho(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}) - \frac{u_\theta^2}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2})$$

Usando los mismo argumentos que en la parte (b), la ecuación se simplifica a:

$$0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}) - \frac{u_\theta^2}{r^2}$$

Al desarrollar esta ecuación y multiplicando todo por r^2 queda:

$$r^2\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - u_\theta = 0$$

Para resolver esto se supone una solución del tipo $u = r^k$, y queda que esto se cumple cuando $k = \pm 1$, o sea $u = \frac{A}{r} + Br$.

d) Ahora para encontrar los perfiles se deben imponer adecuadamente las condiciones de borde. Para el caso de la parte (b), se asumirá que la posición en y del borde que rota es en $y = r_i$ y que el borde superior en reposo est $y = r_o$. Con esto las condiciones de borde quedan así:

$$u(y = r_i) = \omega r_i, u(y = r_o) = 0$$
$$\rightarrow u = \frac{\omega r_i}{r_o - r_i}(r_o - y)$$

Para el caso en cilíndricas las condiciones de borde son básicamente idénticas:

$$u(r = r_i) = \omega r_i, u(r = r_o) = 0$$
$$\rightarrow u = \frac{\omega r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}(\frac{r_o^2}{r} - r)$$

e) La idea es que para generar el movimiento del eje se debe vencer el roce viscoso que se genera entre el fluido y el eje mismo, el roce viscoso se puede calcular a partir del perfil de velocidad que se desarrollo en el fluido, lo cual acabamos de calcular, y este será relevante en calcular la potencia total de entrada que se requerirá para ambos casos. Se hará primero el caso cartesiano:

$$\tau_{xy}(y) = \mu(\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\mu\omega y}{r_o - r_i}$$

Se calcula el esfuerzo de corte generado sobre la superficie del eje, o sea en $y = r_i$:

$$\tau_{w,cart} = -\frac{\mu\omega r_i}{r_o - r_i}$$

Luego, el torque total que genera el roce viscoso es la integral de este valor sobre toda la superficie de contacto, o sea:

$$\int_{sup.eje} \tau_{w,cart} dA \cdot b = b\tau_{w,cart}\int dA = b\tau_{w,cart}A_{eje}$$
$$T_{cart} = -\frac{\mu\omega r_i}{r_o - r_i} \cdot r_i \cdot 2\pi r_i L \rightarrow T_{cart} = -\frac{2\mu\omega L r_i^3\pi}{r_o - r_i}$$

El torque que debe generar el eje es idéntico en magnitud pero contrario en signo. b es el brazo de palanca que genera cada diferencial de fuerza sobre la superficie. Luego considerando el caso cilíndrico queda:

$$\tau_{r\theta}(r) = \mu(r\frac{\partial}{\partial r}(\frac{u_\theta}{r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$
$$\tau_{r\theta}(r) = -\frac{2\mu\omega r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}\frac{1}{r^2}$$
$$\tau_{w,cil}(r = r_i) = -\frac{2\mu\omega r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$
$$T_{cil} = -\frac{2\mu\omega r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \cdot r_i \cdot 2\pi r_i L = -\frac{4\pi\omega\mu L r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

f) La potencia, considerando el asunto del signo y que $P = T\omega$, para cada caso queda:

$$P_{cart} = \frac{2\mu\pi L\omega^2 r_i^3}{r_o - r_i}$$
$$P_{cil} = \frac{4\pi\mu L\omega^2 r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

Notando que tienen términos comunes queda lo siguiente:

$$P_{cil} = P_cart \cdot \frac{2r_o^2}{r_o r_i + r_i^2}$$

Si a este factor lo llamamos ψ y dividimos arriba y abajo por r_o^2, queda:

$$\psi(\lambda) = \frac{2}{\lambda+\lambda^2}$$

Donde $\lambda = \frac{r_i}{r_o}$ de donde se debe notar que cuanto $r_i \to r_o, \psi \to 1$, o sea, la potencia vista desde ambos casos se asemeja para este caso límite. En conclusión si es razonable asumir la aproximación de placas planas infinitas cuando los radios son similares entre sí, y que tan razonable es esto dependerá de la precisión que se requiera en la solución.

Problema 3

a) Dado que la variable a cuantificar es el arrastre que genera el flujo sobre la esfera, que se encuentra en una tubería, se deben buscar las variables relevantes de este problema: algunas ya son mencionadas, como lo es d, D y V, con eso ya van cuatro variables. Como el arrastre se genera por roce viscoso se necesita además la viscosidad del sistema como variable importante μ. Y, por último, se agrega la densidad considerando que aun no sabemos si se trata de un número de Reynolds alto (en cuyo caso la densidad es muy importante, ya que prevalecen los efectos inerciales) o de Reynolds bajo (creeping flow, donde la viscosidad es sumamente importante). En general, se deben identificar 3 tipos de variables: geometría, material y efectos externos. En geometría ya consideramos dos diámetros, si fuese necesario algo más iría bajo esta categoría, quizás es relevante el largo de la tubería (esto solo sería importante si fuese corto, ya que si fuese largo no importa si es un poco más largo o no ya que si la esfera se encuentra lejos de los bordes el largo no tiene incidencia sobre la dinámica del flujo cerca de la esfera). Además, se considera el material en sí, en este caso solo se habla del fluido (densidad y viscosidad), pero también puede ser relevante el material de la esfera (por ejemplo si fuese un tubo vertical y el peso juega un rol en la dinámica del sistema) o la rugosidad de la tubería. Sobre los efectos externos aquí se trata de entender que genera este fenómeno sobre la esfera, en este caso simple solo se considera la velocidad bajo esta categoría, pero podría haber un gradiente de presión, gravedad (aun cuando g es constante si fuera relevante se debe considerar igualmente).
Es importante tener claros algunos números adimensionales típicos como Reynolds, Froude (relevante en canales abiertos), Euler, entre otros (revisar Munson), ya que estos aparecerán constantemente en este tipo de problemas.

b) Ya definidas las variables queda la siguiente relación entre estas:

$$F_D = \phi(V, \rho, \mu, d, D)$$

O sea, el drag es función de estas variables, donde ϕ es una función que se determina experimentalmente. Lo que se busca es simplificar esta relación reduciendo el número de términos relevantes. Para ello se introducen los términos adimensionales, donde se debe seguir un procedimiento para encontrarlos adecuadamente. En esta pauta se verá un procedimiento rdo (al menos un poco mdo) que la vista en clases, revisar igualmente el procedimiento completo en el Munson o en su apunte de clases (o el de su compa). Primero, para cada variable (las 6 variables) se escriben sus dimensiones:

$$F_D = MLT^{-2}$$
$$V = LT^{-1}$$
$$d = L$$
$$D = L$$
$$\rho = ML^{-3}$$
$$\mu = ML^{-1}T^{-1}$$

Con esto se determina que se necesitan 3 dimensiones para representar a las variables M, L y T, y como son 6 variables se tiene que habrán 6-3=3 terminos adimensionales. Como son 3 términos adimensionales se deben escoger 6-3 (total variables menos términos adimensionales) variables repetibles, que deben ser lo más simples posibles, independientes entre sí (o sea una no puede ser la combinación en dimensiones de las otras) y abarcar todas las dimensiones del problema (3 en este caso) por completo. Se escogen ρ, V y D (verifique que se cumplen las 3 condiciones recién mencionadas), y en base a estas variables se deben adimensionalizar las 3 restantes. Se hará por inspección, aun cuando hay un procedimiento formal para realizar esto. Siempre que haya fuerza, para adimensionalizarla se debe dividir por

$\rho V^2 D^2$, si es que se escogieron esas variables repetibles, y siempre que haya viscosidad se dividirá por $\rho V D$. Con esto ya se pueden adimensionalizar las 3 variables escogidas: d, μ y F_D, y quedarían como sigue:

$$F_D \rightarrow \Pi_1 = \frac{F_D}{\rho V^2 D^2}$$
$$d \rightarrow \Pi_2 = \frac{d}{D}$$
$$\mu \rightarrow \Pi_3 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

Aquí se debe tener cuidado de que nuestra variable principal, el arrastre, solo aparezca en un término adimensional, y notar que el tercer término corresponde al inverso del número de Reynolds, se puede escoger cualquiera de ellos sin problemas, o sea puede escoger el término recién encontrado $1/Re$ o Re, por conveniencia se escoge Re.

c) Ya establecido el problema de forma adimensional se nota que el modelo corresponde a los datos entregados, dado que con ellos se estimará el valor del prototipo, el segundo caso que se requiere con nuevas dimensiones. El fundamento de la similaridad entre modelo y prototipo se basa en plantear en primera instancia la relaciimensional como sigue:

$$\Pi_1 = \phi_1(\Pi_2, \Pi_3)$$

Si el segundo y tercer término son idénticos para el modelo y el prototipo, o sea:

$$(d/D)_{modelo} = (d/D)_{prototipo}, Re_{modelo} = Re_{prototipo}$$

Se puede decir que el primer término seréntico en ambos casos. Cuando no se puede establecer la igualdad de todos los términos adimensionales, que son variables de la funcie dice que existe una distorsión entre el modelo y el prototipo, y el primer término ya no será idéntico en ambos casos, pero bajo ciertos supuestos, que se explicarán más adelante, se puede afirmar que son similares en un rango razonable.La primera condición, del segundo término establece similitud geométrica (si hubieran más términos directamente relacionados con la geometría se debería establecer la igualdad entre todos ellos para hablar de similitud geométrica), y por su parte, la segunda condición establece similitud dinámica (similarmente, si hubieran más términos como presiones y fuerzas de cuerpo, todos los términos adimensionales asociados a estos deben cumplir la igualdad para hablar de este tipo de similitud).

d) Primero se identifican los valores ya dados como sigue, $d_m = 2cm$, $D_m = 5cm$, $V_m = 2m/s$, $F_{D,m} = 0{,}15N$, $D_p = 1m$ y $V_p = 6m/s$, donde el subíndice m representa los parámetros relacionados con el modelo y p, los con el prototipo. Al imponer similitud geométrica se tiene que:

$$d_p = \frac{d_m}{D_m} D_p = 0{,}4m = 40cm$$

Lo cual es razonable, es factible fabricar una esfera de este tamaero se debe tener cuidado con valores muy altos o muy bajos, por ejemplo si la respuesta hubiese sido 40 metros, sería razonable?, o si hubiese sido 40 micrómetros?, cuando se establece similitud pueden surgir valores como estos y se debe tener criterio sobre si es razonable o no, pueden tomar de referencia un túnel de viento como el del laboratorio, en cuanto a dimensiones, pensando en que debe ser algo accesible experimentalmente o comentar los valores encontrados en base a su intuición del problema.

e) Por su parte al establecer similitud dinámica, considerando que se trata del mismo material, se tiene:

$$V_p D_p = 6 >> 0{,}1 = V_m D_m$$

O sea el Re del prototipo es 60 veces mayor al del modelo, por tanto no se puede establecer similitud dinámica, pero en general para cuerpos sumergidos se puede considerar que el Re no es lo más relevante, considerando que existe un amplio rango en que el flujo es laminar y en todo este rango el comportamiento es bastante similar, lo mismo para el flujo turbulento.

f) En base a lo comentado en (d) y (e), se vio que solo se puede imponer similitud geométrica y que es razonable esperar que el coeficiente de arrastre del prototipo se asemeje al del modelo, dado que la similitud dinámica permite ciertas diferencias entre los valores del número de Reynolds. Con esto se tiene que:

$$\left(\frac{F_D}{\rho V^2 D^2}\right)_m = \left(\frac{F_D}{\rho V^2 D^2}\right)_p$$
$$F_{D,p} = F_{D,m} \frac{D_p^2}{D_m^2} \frac{V_p^2}{V_m^2} = 540N$$

Problema 4

Se realizará el desarrollo completo para el primer caso primero, con $f(y) = sin(\frac{\pi y}{2\delta})$.Se tiene que el desplazamiento δ^* se calcula a partir de:

$$\delta^* = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U})dy = \int_0^\delta (1 - \frac{u}{U})dy = \int_0^\infty (1 - sin(\frac{\pi y}{2\delta}))dy = \delta - \frac{2\delta}{\pi} = 0{,}36\delta$$

Como aun no se conoce el espesor de capa límite se deja planteada esta expresión dado que en un momento lo encontraremos. Ahora a calcular el espesor de moméntum como sigue:

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{u}{U}(1 - \frac{u}{U})dy = \int_0^\delta \sin(\frac{\pi y}{2\delta})(1 - sin(\frac{\pi y}{2\delta}))dy = \frac{2\delta}{\pi} - \frac{\delta}{2} = 0{,}137\delta$$

Luego se usa la ecuación de moméntum integral $\tau_w = \rho U^2 \frac{d\Theta}{dx}$ y queda:

$$\tau_w = \mu \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \mu U \frac{\pi}{2\delta} cos(\frac{\pi y}{2\delta})\Big|_{y=0} = \mu U \frac{\pi}{2\delta}$$

$$\frac{d\Theta}{dx} = 0{,}137 \frac{d\delta}{dx}$$

$$\rightarrow \mu U \frac{\pi}{2\delta} = \rho U^2 0{,}137 \frac{d\delta}{dx} \rightarrow \frac{\nu\pi}{0{,}274U} dx = \delta d\delta$$

Se integra considerando que en $x = 0$ $\delta = 0$ y en x $\delta = \delta(x)$.

$$\frac{\nu\pi x}{0{,}274U} = \frac{\delta^2}{2} \rightarrow \delta(x) = 4{,}789\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

El procedimiento seguido es que a partir del perfil de velocidad (que debe cumplir $u = 0$ en la placa y $u = U$ en $y = \delta$) se calculan los espesores y se plantea la ecuación diferencial para δ con esto se pueden sacar los espesores explícitamente en función de x. Notar que el número de Reynolds se escribe $Re_x = \frac{Ux}{\nu}$, así que el espesor de capa límite se puede reescribir como sigue:

$$\delta = 4{,}789 x Re_x^{-1/2}$$

$$\delta^* = 1{,}724 x Re_x^{-1/2}$$

$$\Theta = 0{,}656 x Re_x^{-1/2}$$

Ahora se puede conocer el esfuerzo de corte en la pared en función de x, dado que en un principio δ no se conocía. Considerar que como varía a lo largo de la posición no existe un solo valor que represente la placa, salvo que se integre el esfuerzo local, si se conoce el largo total de placa por ejemplo. Se puede calcular a partir del perfil de velocidad directamente o a través de la ecuación de moméntum integral:

$$\tau_w = 0{,}328 \rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}}$$

Luego, a partir de la fricción local, se define un coeficiente de fricción local, que viene a representar una forma abreviada y ampliamente utilizada de representar el esfuerzo de corte generado sobre la placa, ya que independiente del perfil escogido la dependencia de todas las variables escogidas será similar, solo cambiarán ciertas constantes, así que son estas constantes las relevantes para poder comparar casos entre sí. El coeficiente de fricción local se define como sigue:

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2} = 0{,}656\sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = \frac{0{,}656}{\sqrt{Re_x}}$$

Se reescribió en términos de Re_x ya que usualmente esto resume de la forma más compacta la forma general de c_f, dejando claro que es el numerador el que variará entre cada perfil de velocidad escogido, recordar que independiente del perfil los resultados se asemejan bastante entre sí. Finalmente, se define el coeficiente de fricción global C_{Df}, como la integral del coeficiente local a lo largo de toda la placa de largo L como sigue:

$$C_{Df} = \frac{1}{L}\int_0^L c_f dx = \frac{1{,}310}{\sqrt{Re_L}}$$

Este viene a resumir todo el análisis realizado en el coeficiente que acompaa expresión para el *drag* generado sobre la placa por el fluido, o sea:

$$F_{drag} = \frac{1}{2} C_{Df} \rho U^2 A$$

Donde A es la sección longitudinal al flujo, en este caso sería espesor de placa multiplicado por largo de placa.