

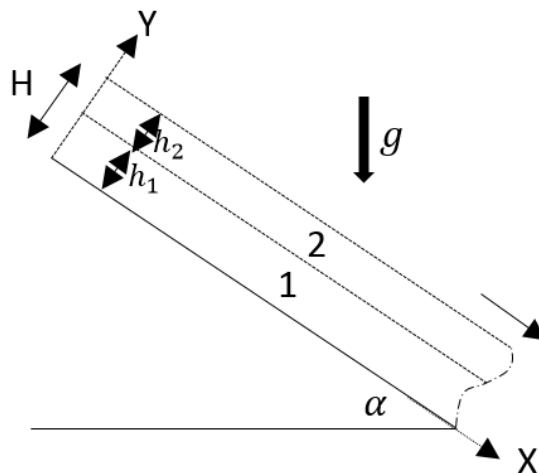
## ME 3301 - Mecánica de Fluidos

### Auxiliar 7: Ecuaciones de Navier-Stokes, Adimensionalización y Similitud, y Capa Límite

#### Problema 1

En la Figura 1 se observa el flujo de dos líquidos, uno sobre el otro, sobre un plano inclinado con ángulo  $\alpha$ , el líquido 1 tiene densidad  $\rho_1$  y viscosidad dinámica  $\mu_1$ , y a su vez el líquido 2 tiene densidad  $\rho_2$  y viscosidad dinámica  $\mu_2$ . Suponga estado estacionario, flujos viscosos e incompresibles y que el flujo se mueve únicamente por acción de la gravedad.

- Plantee las ecuaciones de Navier-Stokes para cada líquido, simplificando adecuadamente los términos pertinentes, argumentando claramente.
- Explicite las condiciones de borde.
- Encuentre el campo de presión sobre todo el flujo.
- Encuentre el campo de velocidad en cada líquido.
- Identifique la altura  $y_c$  donde se encuentra la máxima velocidad de todo el flujo.



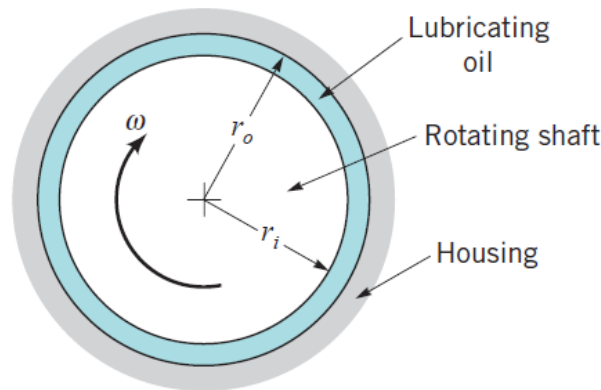
**Figura 1:** Flujo bifásico sobre plano inclinado. Fuente: *Auxiliares Pasadas y Problema 6.93 Munson*

#### Problema 2

Se tiene un eje de radio  $r_i$  rotando con velocidad angular  $\omega$  en sentido horario dentro de un rodamiento de radio interno  $r_o$ , como se observa en la Figura 2. Entre estos dos se encuentra un líquido viscoso que cumple la función de lubricar el sistema con viscosidad dinámica  $\mu$ . Se verán dos casos: (i) suposición de flujo entre placas planas y (ii) flujo cilíndrico entre las paredes. El objetivo es encontrar la similitud de estas dos soluciones y obtener además la potencia necesaria que se debe entregar al sistema para vencer al roce viscoso. Suponga estado estacionario.

- Estudiando la ecuación de continuidad encuentre la componente de velocidad relevante y su variable dependiente, argumentando adecuadamente.

- b) Plantee las ecuaciones de Navier-Stokes con sus condiciones de borde para la aproximación de placas planas.
- c) Plantee las ecuaciones de Navier-Stokes en coordenadas cilíndricas, con sus condiciones de borde, eliminando los términos pertinentes de estas.
- d) Encuentre el perfil de velocidad para el caso (b) y (c), comente.
- e) Calcule el esfuerzo generado sobre un elemento de área sobre la superficie del eje, con el caso (i) y (ii), considere que el eje tiene un largo  $L$  y encuentre el torque total que genera el roce viscoso sobre la superficie en ambos casos.
- f) Finalmente, encuentre la potencia necesaria para sostener el flujo, comente y compare.

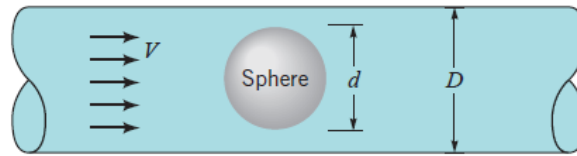


**Figura 2:** Eje rotando dentro de rodamiento. Fuente: *Exámenes Pasados y Figura 6.33 Munson*

### Problema 3

Se desea estimar el arrastre sobre una esfera al interior de una tubería, ver Figura 3. Un experimento mostró que para  $d = 2\text{cm}$ ,  $D = 5\text{cm}$  y  $V = 2\text{m/s}$  el arrastre es de  $0,15\text{N}$ . Si se requiere estimar el arrastre en una tubería de  $1\text{m}$  de diámetro con una velocidad de  $6\text{m/s}$ .

- a) Indique las variables relevantes del problema.
- b) Determine la cantidad necesaria de términos adimensionales, e identifíquelos, siguiendo los pasos estudiados en clases.
- c) Identifique el modelo y el prototipo, y considerando que en ambos casos se utilizará agua como fluido de trabajo, plantee las condiciones de similitud.
- d) Verifique si se puede imponer similitud geométrica entre modelo y prototipo para los valores entregados. Comente.
- e) Verifique si se puede imponer similitud dinámica entre modelo y prototipo para los valores entregados. Comente sobre los valores encontrados.
- f) Escogiendo adecuadamente la similitud a usar, encuentre el valor para el arrastre en el caso del prototipo. Comente sobre su exactitud esperada en base a (d) y (e).

**Figura 3:** Esfera inmersa en tubería cerrada. Fuente: *Problema 7.58 Munson***Problema 4**

Se estudiará el arrastre generado por un flujo sobre una placa plana, para esto se debe recordar que  $\frac{u}{U} = f(y)$ , donde  $u$  es el perfil de velocidad,  $U$  es la velocidad del flujo lejos de la placa,  $y$  es la distancia vertical a la placa, y  $f$  una función adecuada. Se plantearán dos casos, con  $f(y) = \sin(\frac{\pi y}{2\delta})$  y  $f(y) = 2(y/\delta) - (y/\delta)^2$ .

- Determine una expresión para  $\delta^*(x)$  en ambos casos.
- Determine una expresión para  $\Theta(x)$  en ambos casos.
- Planteando la ecuación integral de momento, encuentre una ecuación diferencial para  $\delta(x)$ , y resuélvala en ambos casos.
- Determine una expresión para  $\tau_{wall}$  en función de  $x$ , y para su correspondiente coeficiente de fricción local  $c_f$  y total  $C_{Df}$ , considerando una placa de largo  $L$ .