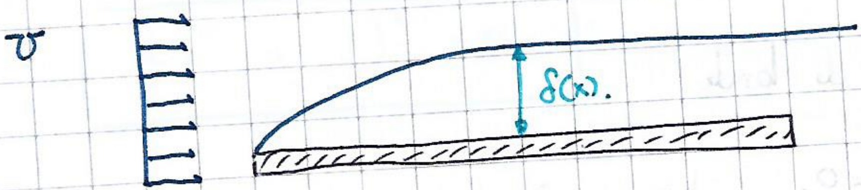
Resumen.

Capas límites laminares.

Zona del fluido donde los efectos viscosos (Fuerzas de corte) son importantes.



Ecuaciones de Capa límite.

$$\boxed{\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{v}\right) dy}$$

$$\boxed{\theta = \int_0^\infty \frac{u}{v}\left(1 - \frac{u}{v}\right) dy.}$$

$$\boxed{\delta \sim \left(\frac{\nu x}{v}\right)^{1/2}} \quad , \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}$$

Ecuaciones de N-S para Capa límite.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

(*).

Condiciones de borde

$u = v = 0.$ para $y = 0.$

$u = U$ para $y = \delta.$

Se define $\eta = (U/\nu x)^{1/2}\, y.$

Variable de similitud.

y se define $\psi = (\nu x U)^{1/2} f(\eta).$

Con $f(\eta)$ una función des conocida.

por definición $u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x.$

$$\Rightarrow \quad u = U f'(\eta).$$

$$v = \left(\frac{\nu U}{4x}\right)^{1/2} (\eta f' - f).$$

~~También~~ poniendo este resultado en (*).

$$\boxed{2 f''' + f f'' = 0.}$$

Cuyas condiciones de borde son.

$$\boxed{f = f' \quad \eta = 0.} \quad \boxed{f' \to 1 \quad \eta \to \infty}$$

La Ecuación anterior se resuelve usando Runge-Kutta.
obteniendo una curva para $f'(\eta) = \frac{u}{U}$. (Solución de Blasius).

De esta solución se encuentra que, $\frac{u}{U} \approx 0.99 \to 1$

$$\Rightarrow \eta \; 5. \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}}$$

Recordemos que $Re_x = \frac{U x}{\nu}$

Finalmente se obtiene para flujo laminar las siguientes correlaciones.

$$\boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{Re_x}}}$$

$$\boxed{\frac{\delta^*}{x} = \frac{1,721}{\sqrt{Re_x}}}$$

$$\boxed{\frac{\theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}}}$$

Pero, lo que en verdad queremos es una expresión para τ_w.

$$\tau_w = \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \right\} \bigg|_{y=0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau_w = 0,332\, U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}}}$$

Forma alternativa de obtener. τ_w (usando θ).

$$\boxed{\tau_w = \rho\, v^2 \frac{\partial \theta}{\partial x}}$$

— o —

Finalmente, tenemos otra forma de aproximarnos a la ecuación de capa límite.

Consideramos que, $\boxed{\frac{u}{v} = g(\bar{y})}$.

Con $g(y)$ una función que nosotros nos damos.

normalmente, se utilizan polinomios y cosenos.

donde $\bar{y} = \frac{y}{\delta}$.

y las condiciones de borde son:

$u(y=0) = 0$
$u(y=\delta) = v$ $\Rightarrow$ $\boxed{g(\bar{y}=0) = 0}$

$\boxed{g(\bar{y}=1) = 1}$

Recordemos que.

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Bigg|_{y=0}$$

$$\tau_w = \rho U^2 \frac{\partial \theta}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\int_A \tau_w \, dA = D.$$

$$\Rightarrow b \rho U^2 \theta = D.$$

$$\Rightarrow \boxed{b \rho \int_0^{\delta} u \, (U - u) \, dy = D.}$$

usando $g(\bar{y})$.

$$D = \rho b U^2 \delta \int_0^1 g(\bar{y}) \, (1 - g(\bar{y})) \, d\bar{y}$$

$$\boxed{D = \rho b U^2 \delta C_1}$$

donde C_1 es una constante cuyo valor es:

$$\boxed{C_1 = \int_0^1 g(\bar{y})\,(1 - g(\bar{y}))\,d\bar{y}}$$

pero también.

$$\tau_w = \mu \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \boxed{\frac{\mu U}{\delta} C_2.}$$

$$\boxed{C_2 = \left.\frac{\partial g}{\partial \bar{y}}\right|_{\bar{y}=0}}.$$

Recordemos que $\frac{dD}{dx} = b\tau_w$

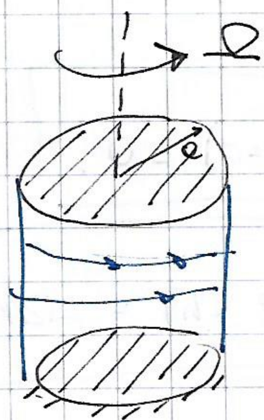
Combinando tenemos:

$$\boxed{\delta\, d\delta = \frac{\mu C_2}{\rho U C_1}\, dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\delta}{x} = \frac{\sqrt{2C_2/C_1}}{\sqrt{Re_x}}}$$

Punto.

P1).



$V_r = 0$

$V_z = 0$

$V_\theta = V_\theta(r, z)$.

Escribimos las Ecuaciones de N-S en cilíndricas.

Como Re es pequeño $\Rightarrow$ el lado izquierdo es cero.

$$\hat{r})\quad 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial r V_r}{\partial r}}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}} - \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}}\right).$$

$$\hat{\theta})\quad \Rightarrow \quad 0 = \cancel{-\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial r}} + \mu\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}\right) + \cancel{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2}} + \cancel{\frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right)$$

$\therefore$

$$\hat{r})\quad \boxed{0 = -\frac{\partial P}{\partial r}}$$

$$\hat{\theta})\quad \boxed{0 = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial r V_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}} \quad (*)$$

b) Condiciones de borde.

$$\boxed{v_\theta(r, z=0) = 0.}$$

$$\boxed{v_\theta(r, z=h) = \Omega r}$$

$v_\theta = r\,f(z).$

reemplazando en (*)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2 f(z))}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\cancel{r}} 2 \cancel{r} f(z)\right) + r f''(z) = 0$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial r}\left(2 f(z)\right)}^{\,0} + r f''(z) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0}$$

luego $\dfrac{\partial^2 f(z)}{\partial z^2} = 0.$ $\int g()$

$$\Rightarrow \quad f(z) = c_1 z + c_2$$

Condiciones de borde.

$$r f(z=0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad r(c_1 0 + c_2) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{c_2 = 0}$$

$$\cancel{r} f(z=h) = \Omega \cancel{r}.$$

$$\Rightarrow \quad c_1 h = \Omega \quad \Rightarrow \boxed{c_1 = \frac{\Omega}{h}}$$

$$\boxed{v_\theta(r,z) = r\left(\frac{\Omega}{h} z\right)}$$

c) En efecto.

$$\tau_w = \mu \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right\}.$$

$$\frac{v_z}{\partial \theta} = 0.$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{r\Omega}{h}$$

$$\tau_w = \frac{\mu r \Omega}{h}$$, el Torque externo es:

$$T = \int_0^{2\pi} \int_0^a r\,\tau_w\, r\, dr\, d\theta$$

$$T = 2\pi \int_0^a \frac{r^3 \mu \Omega}{h} dr$$

$$T = \frac{2\pi\mu\Omega}{h}\frac{a^4}{4} = \boxed{\frac{\pi\mu\Omega a^4}{2h}}$$

P2)

Variables $\frac{dv}{dz}$, H, ρ.

Se busca medir el Torque T en la base y la presion $P(z)$.

a) En efecto, queremos encontrar una relación adimensional para T, $\frac{dv}{dz}$, H, ρ.

nº de Variables (m) $= 4$.

$\boxed{T : F L}$, $\boxed{H : L}$, $\boxed{\frac{dv}{dz} : \frac{1}{T}}$

$\boxed{\rho : \frac{M}{L^3}}$ $F = \frac{ML}{T^2} \Rightarrow \boxed{T : \frac{ML^2}{T^2}}$

nº de Variables Físicas (n) $=$ ~~4~~. 3 (M, L, T).

Cantidad de nº adimensionales (Π's) $= m - n = 1$.

Siempre el 1º nº adimensional va con la variable dependiente (τ).

$$\tau \, \rho^a \, H^b \left(\frac{du}{dz}\right)^c = \Pi \Rightarrow$$

$$\frac{ML^2}{T} \, \frac{M^a}{L^{3a}} \, L^b \, \frac{1}{T^c} = 1$$

$M: \quad 1 + a = 0$

$L: \quad 2 - 3a + b = 0$

$T: \quad -1 - c = 0$

$\Rightarrow \quad c = -1$

$a = -1$

$b = -5$

es decir.
$$\boxed{\Pi_1 = \frac{\tau}{\rho \left(\frac{du}{dz}\right) H^5}}$$

$\Pi_1 = \phi(0) \Rightarrow \Pi_1$ es una constante.

b) $\left(\frac{dv}{dz}\right)_m = 1 \ 1/s$

$H_m = 1 \ m.$

$\rho_m = 1.25 \ kg/m^3.$

$T_m = 0.03 \ Nm.$

Si $H_p = 100 \ m$

$\rho_p = 1.25$

$dv/dz = 0.3 .$

determino T_p.

$$\frac{T_m}{\rho_m \left(\frac{dv}{dz}\right)_m H_m^5} = \frac{T_p}{\rho_p \left(\frac{dv}{dz}\right)_p H_p^5}$$

$$\Rightarrow T_p = 9 \times 10^7 \ Nm \sim \boxed{90 \ M \ Nm}$$

encontremos el Funcional de $P(z)$.

Variables independientes.

$\boxed{H : L}$

$\boxed{\rho : \frac{M}{L^3}}$

$\boxed{\frac{dw}{dz} : \frac{1}{T}}$

$\boxed{z : L}$

Variable dependiente $\quad P : \frac{ML}{T^2} \cdot \frac{1}{L^2} =$

$\boxed{P : \frac{M}{LT^2}}$

$\Rightarrow \quad m = 5$

$n = 3 \qquad m - n = 2.$

$\Rightarrow$ Tenemos dos Números adimensionales.

$\pi_1)$.

$$\frac{M}{LT^2} \quad L^a \quad \frac{M^b}{L^{3b}} \quad \frac{1}{T^c}$$

$M: \quad 1 + b = 0$

$L: \quad -1 + a - 3b = 0$

$T: \quad -2 \cancel{+} c = 0$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c &= -2 \\ b &= -1 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{P}{H^2 \rho \left(\frac{du}{dz}\right)^2}$$

$$\pi_2 = \frac{z}{H}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P}{H^2 \rho \left(du/dz\right)^2} \quad \phi\left(\frac{z}{H}\right)}$$

d).

$$\Delta P_z = 0{,}1 \text{ Pa}.$$

$$(du/dz)_m = 1 \quad 1/s$$

$$H_m = 1 \text{ m}.$$

$$\rho_m = 1.25 \quad kgr/m^3.$$

$$H_p = 100 \text{ m}.$$

$$\rho_p = 1.25 \quad kgr/m^3$$

$$(du/dz)_p = 0{,}3 \quad 1/s.$$

$$\frac{\Delta P_p}{H_p^2 \cancel{\rho_p} (du/dz)_p} = \frac{\Delta P_m}{H_m^2 \cancel{\rho_m} (du/dz)_m}.$$

$$\boxed{\Delta P_p = 300 \text{ Pa}.}$$