Profesor: Williams Calderon M.
Auxiliares: Juan Campos, Pablo Castillo
Ayudantes: Felipe Corrales, Felipe Espinosa
Emilio Toledo

PAUTA CONTROL 2: MECANICA DE FLUIDOS (2016)

P2): Limite de Betz: Momemtum Lineal Unidimensional
Este modelo nos entrega una cota superior para la eficiencia de una turbina eolica (así como el ciclo de Carnot lo hace en Termodinamica), el modelo se sustenta en los siguientes supuestos:

- Fluido incompresible y homogéneo
- Estado Estacionario
- Sin efectos viscosos
- Empuje uniforme sobre el disco
- No hay cambio de presión a lo largo del eje Y

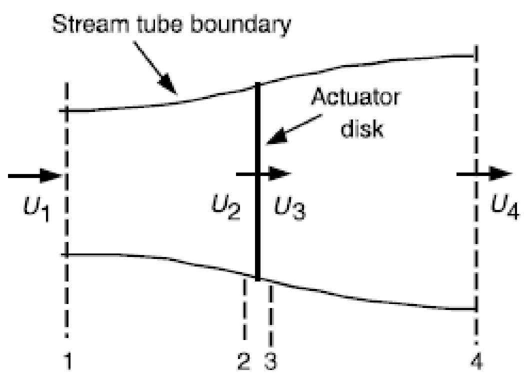

Figura 1

Lo primero que aplicamos es TTR de momentum lineal

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{\mathbf{V}}\rho\, dV + \int_S \vec{\mathbf{V}}\cdot \rho V\, d\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{F}} \tag{1}$$

Como estamos trabajando con régimen transiente, solo sobrevive el segundo termino.Usamos como Volumen de Control entre 1 y 4, y al reemplazar nos queda

$$U_1(\rho U_1 A_1) - U_4(\rho U_4 A_4) = T \tag{2}$$

Ademas aplicamos TTR de masa, con lo que obtenemos

$$\dot{m} = \rho U_1 A_1 = \rho U_2 A_2 \tag{3}$$

Y si reemplazamos en la ecuación 2, obtenemos que

$$T = \dot{m}(U_1 - U_4) \tag{4}$$

Por ahora dejamos esta ecuación hasta aquí, y continuamos trabajando. Ahora Aplicamos Bernoulli entre (1 y 2) y (3 y 4), con lo que obtenemos

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2 \tag{5a}$$

$$P_3 + \frac{1}{2}\rho U_3^2 = P_4 + \frac{1}{2}\rho U_4^2 \tag{5b}$$

Como la presión de (1) y de (4) dependen únicamente de la presión atmosférica, y la conservación de caudal másico anterior implica que la velocidad en (2) y (3) es la misma.
Sumando ambas ecuaciones obtenemos

$$\cancel{P_1} + P_3 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}\rho U_3^2} = P_2 + \cancel{P_4} + \frac{1}{2}\rho U_4^2 + \cancel{\frac{1}{2}\rho U_2^2} \tag{6}$$

Con esto podemos obtener la siguiente expresión

$$P_3 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(U_4^2 - U_1^2) \tag{7}$$

Con esta expresión podemos encontrar otra expresión para la fuerza neta ejercida sobre el rotor es igual a la resta entre la fuerza de las fuerzas producidas por la Presión 2 y la Presión 3.

$$T = A_2(P_3 - P_2) = A_2\frac{1}{2}\rho(U_4^2 - U_1^2) \tag{8}$$

Y al igualar ambas ecuaciones para T, podemos obtener que

$$\dot{m}(U_1 - U_4) = \rho U_2 A_2 = \frac{1}{2}A_2\rho(U_4 - U_1)(U_4 + U_1) \tag{9}$$

De esta ecuación podemos obtener la siguiente expresión

$$U_2 = \frac{U_1 + U : 4}{2} \tag{10}$$

Ahora, definimos a como $a = \frac{U_1 - U_2}{U_1}$, con lo que podemos obtener las siguientes relaciones:

$$U_2 = U_1(1 - a) \tag{11a}$$

$$U_4 = U_1(1 - 2a) \tag{11b}$$

Finalmente, procedemos a calcular la potencia

$$\begin{aligned} P = T \cdot V = \frac{1}{2}\rho A_2(U_1^2 - U_4^2)U_2 &= \frac{1}{2}\rho A_2 U_2(U_1 + U_4)(U_1 - U_4) \\ &= \frac{1}{2}\rho A_2 U_1(1 - a)(U_1 + U_1(1 - 2a))(U_1 - U_1(1 - 2a)) \\ &= \frac{1}{2}\rho A_2 U_1^3(1 - a)(1 + (1 - 2a))(1 - (1 - 2a)) \\ &= \frac{1}{2}\rho A_2 U_1^3(1 - a)^2 4a \end{aligned} \tag{12}$$

Finalmente, calculamos C_p que representa la razón entre la potencia entregada y la recibida.

$$C_p = \frac{P}{\frac{1}{2}\rho U_1^3 A_2} = (1 - a)^2 4a \tag{13}$$

Ahora, para encontrar el máximo derivamos respecto a a, entonces $\frac{dC_p}{da} = 0$, lo que implica que $a = 1/3$, y reemplazando $C_{pmax} = 16/27$