Auxiliar 7

Flujo de Coutter, Poiseuille, NS en cilindricas.

Pablo Castillo y Juan Pablo Romero Campos

11 de Noviembre, 2016

Indice

Ecuacion de continuidad

Para el caso 2D se realiza un balance de masa diferencial como el que se ve en la figura.
Notar que el volumen de control posee un dimenciones dx y dy y profundidad dz
Sea un fluido cualquiera con perfil de velocida $\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j}$.

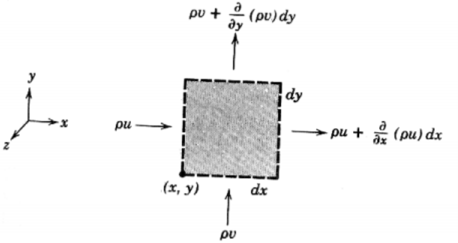


Figura: Volumen de control 2D

El flujo masico diferencial de entrada en el eje x e y respectivamneto son:

$\rho u(x, y) dydz$

$\rho v(x, y) dxdz$

Los flujos masicos diferenciales de salida en el eje x e y respectivamen son:

$\rho u(x + dx, y) dydz = (\rho u(x, y) + (\frac{\partial \rho u(x,y)}{\partial x} dx)) dydz$

$\rho v(x, y + dy) dxdz = (\rho v(x, y) + (\frac{\partial \rho v(x,y)}{\partial y} dy)) dxdz$

Por el TTR se debe cumplir que:
$\rho u(x,y)dydz + \rho v(x,y)dxdz =$
$(\rho u(x,y) + (\frac{\partial \rho u(x,y)}{\partial x}dx))dydz + (\rho v(x,y) + (\frac{\partial \rho v(x,y)}{\partial y}dy))dxdz$ lo que concluye en la ecuacion de continuidad

$$\frac{\partial \rho u(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \rho v(x,y)}{\partial y} = 0$$

Ecuaciones de Navier Stokes

Tomamos el Cubo diferencial 2D y dibujamos sus estados de esfuerzos tal como se ve en la figura 2 en donde se ha hecho una serie de taylor entorno a (x, y)

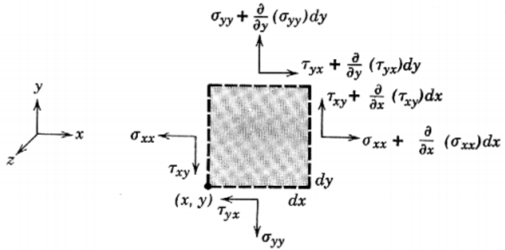


Figura: Volumen de control 2D

Ahora vemos diferencialmente las fuerzas que actuan en el eje x.
Fuerzas que actuan en en la superficie.
$Fx_s = (\frac{\partial \sigma x}{\partial x} dx) dydz + (\frac{\partial \tau w}{\partial y} dy) dxdz$
Las fuerzas de cuerpo que actuan dentro delvolumen.
$Fx_v = Xdxdydz$
La fuerza total actuando en ele je x es la suma de las dos anteriores y usando la segunda ley de newton $Fx = (dm)a_x$.
$dm = \rho dxdydz$
$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u(\frac{\partial u}{\partial x}) + v(\frac{\partial u}{\partial y})$.

ordenando obtenemos la siguiente ecuacion:

$$(\frac{\partial \sigma x}{\partial x} + \frac{\partial \tau w}{\partial y} + X) = \rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u(\frac{\partial u}{\partial x}) + v(\frac{\partial u}{\partial y}))$$

Analogamenrte para el eje y:

$$(\frac{\partial \sigma y}{\partial y} + \frac{\partial \tau w}{\partial x} + Y) = \rho(\frac{\partial v}{\partial t} + u(\frac{\partial v}{\partial x}) + v(\frac{\partial v}{\partial y}))$$

Estas son las Ecuaciones de Movimento de Euler.

Necesitamos una relacion entre los esfuerzos y los desplasamientos para poder resolver estas ecuaciones.
Usaremos el supuesto de fluido Newtoniano imcompresible, luego se cumple que:
$\sigma x = -p + 2\mu \frac{\partial u}{x}$
$\sigma y = -p + 2\mu \frac{\partial v}{y}$
$\tau w = \mu(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$
Aplicandolas a las ecuaciones de movimiento de Euler tenemos las ecuaciones de Navier-Stokes.

$$\rho(\frac{\partial u}{\partial t} + u(\frac{\partial u}{\partial x}) + v(\frac{\partial u}{\partial y})) = -\frac{\partial p}{\partial x} + X + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$

$$\rho(\frac{\partial v}{\partial t} + u(\frac{\partial v}{\partial x}) + v(\frac{\partial v}{\partial y})) = -\frac{\partial p}{\partial y} + Y + \mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2})$$

Notacion vectorial:

$$\rho(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho \vec{g}$$

El lado izquierdo representan las fuerzas incerciales del fluido, son importantes para velocidades grandes.
El lado derecho representa las fuerzas veiscosas que son importantes cuando la velocidad es pequena.

Pasos

1. Primero usamos las hipotesis geometricas y operacionales es decir:
   $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ por ser un sistema estacionario.
   La componente en z es cero por problemas plano.
   La componente en y es cero por geometria.
2. Usamos continuidad para onbtener mas informacion de la componente x.
3. Usamos NS y resolvemos :)

Definición

Un flujo Coutte entre dos placas paralelas infinitas se define como aquel cuyo movimiento es unicamente inducido por el movimento de las placas,es decir no posee gradientes de presion de interes.
La ecuacion de NS que resulta aplicando las simplificaciones de la diapositica anterior es:
$0 = \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$
resolviando tenemos. $u(y) = c1y + c2$
en el ejemplo clasico de una pelicula de fluido de alura h con la placa inferior empotrada y la superior moviendoce a velocidad U se tiene: $u(y) = U\frac{y}{h}$

Graficamente un flujo coutte se ve como en imagen siguiente.

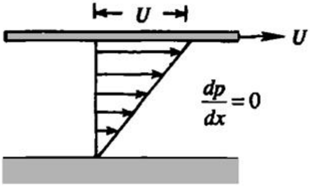


Figura: Flujo de Coutte

Calculando sus propiedades mas relevantes tenemos:
Esfuerzo de corte.
$\tau_w = \mu(U/h)$
Caudal (donde w es la profunidad en z de la placa).
$Q = \frac{1}{2}wUh$.

Un flujo Poiseullie entre dos placas paralelas infinitas se define como aquel cuyo movimiento es unicamente inducido por un gradiente de presión a lo largo de las placas,es decir las placas se mantienen estaticas.
La ecuacion de NS que resulta aplicando las simplificaciones de la diapositica anterior es:
$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$
Resolviendo tenemos.
u(y) $= \frac{1}{2\mu}(\frac{\partial p}{\partial x} y^2) + c1y + c2$
en el ejemplo clasico de una pelicula de fluido de alura h con la placa inferior y superior empotradas se tiene:
$u(y) = \frac{1}{2\mu}(-\frac{\partial p}{\partial x})y(h-y)$

Graficamente un flujo Poiseullie se ve como en imagen siguiente.

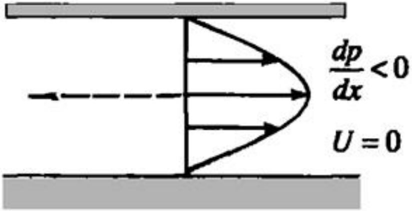


Figura: Flujo de Poiseullie

Calculando sus propiedades mas relevantes tenemos:
Esfuerzo de corte.
$\tau_w = \frac{h}{2}(-\frac{\partial p}{\partial x})$
Caudal (donde w es la profunidad en z de la placa).
$Q = \frac{wh^3}{12}(-\frac{\partial p}{\partial x})$.

P1

P1. Pregunta 3 C2-2013

Una capa de aceite con espesor a y viscocidad μ_o flota en la superficie de una capa de agua de espesor b y viscocidad μ_w. Ambas capas estan contenidas entre dos placas grandes de espesor w; laplaca inferiro esta fija y la superior se mueve con velocidad U en la direccion x segun la figura 2. Obtenga:

a) La velocidad en la interfas.

b) El gasto volumetrico del aceite y el agua.

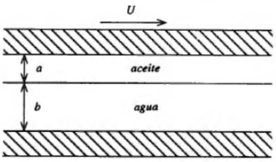
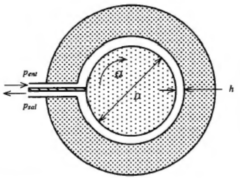


Figura 1: Placas

P2

P2. Ejemplo 6.7 James A Fay.
Una bomba de fricción consta de un cilindro sólido de con diametro D y longitud w que gira en direccion a a las manecillas del reloj con una velocidad angular Ω dentro de un cilindro hueco coaxial de diametro D+2h, como se ilustra en la figura 1. El flujo de fluido que entra es obligado a circular en el sentido de las manecillas del reloj a traves de un circulo completo por la friccion con la superficie interior del cilindro en movimiento. Los conductos de flujo de entrada y de salida se encuentran separados mediante un diafragma que impide fugas de la parte de mayor presion p_s de la entrada p_e, esta diferencia de presion $\Delta p = p_s - p_e$ se mantiene gracias a la bomba.
Obtenga una expresión para:
a) El gasto volumetrico Q que pasa atravez de la bomba.
b) El torque que se le debe hacer al rotor para un funcionamiento estacionario.
c) La potencia de salida de una bomda es $\dot{W}_s = p_s Q$ encunentre el valor que maxime esta potencia y calcule la eficiencia de la bomba.



P3. Pregunta 1 ejercicio 5
Sean dos cilindros concentricos de longitud unitaria en z, con radios Rint y Rext, separados por una pelicula de aceite de viscosidad μ. El cilindro exterior gira con una velocidad angular ω_{int} en sentido horario, mientras que el exterior gira a una velocidad angular ω_{ext} en sentido antihorario. Determine para el fuido:
a) El campo de presiones.
b) La distribucion de Velocidades

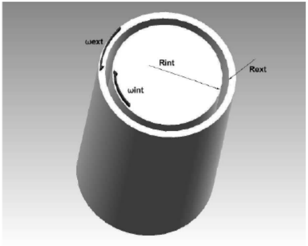


Figura 3: Cilindro