

Part I

Cínemática

Chapter 1

Conceptos

La cinemática en los fluidos al igual que en los cursos de física anteriores se preocupa de modelar el movimiento sin preocuparse de las fuerzas que lo generan. Los conceptos que usaremos para definir y visualizar la cinemática de un fluido son:

- Campo de velocidades: Un fluido está constituido por muchas partículas por lo que la "velocidad del fluido" es una propiedad diferencial que observamos lo que implica que depende del tiempo y del espacio. Definimos el campo de velocidades como:

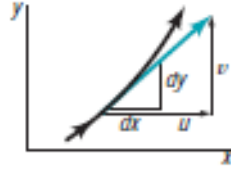
$$\vec{V} = u(x, y, z, t)\vec{i} + v(x, y, z, t)\vec{j} + w(x, y, z, t)\vec{k}$$

Donde el vector $\vec{V}$ representa "la velocidad de una partícula del fluido ubicada en un cierto lugar del espacio en un cierto tiempo"

- Línea de corriente (stream line): Es una línea imaginaria que ayuda a la visualización de un fluido, se define como la línea tangente en todo punto al campo de velocidades. Consideremos un fluido plano, es decir $w = 0$ como el de la figura, es claro que si la curva es tangente al campo de velocidad, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

Donde u y v son las velocidades del fluido en x e y respectivamente, luego tenemos una ecuación diferencial para la línea de corriente.



- Streak line: Es la línea que se forma al unir todas las partículas que han pasado por un punto en común o de control, los pasos para calcularla son:

- Integrar las ecuaciones $\frac{dx}{dt} = u$ y $\frac{dy}{dt} = v$.
- Reemplazar t por τ
- Imponer $x(\tau) = x_0$, $y(\tau) = y_0$, $\forall \tau \geq t_0$
- Despejar las constantes de integración de $x(t)$ e $y(t)$ del paso 1 en función de τ encontradas en el paso 3
- Evaluar $x(t)$ e $y(t)$ en $t = t_0$
- Ganar :)

- Línea de Trayectoria (Path line): Es la línea que siguen las partículas del fluido a causa de su movimiento, se define como:

$$\frac{dx}{dt} = u, \frac{dy}{dt} = v, \frac{dz}{dt} = w$$

Donde $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ son las componentes en i, j y k del movimiento respectivamente.

- Fluido estacionario (steady): Significa que todas las propiedades del fluido son invariantes en el tiempo: $\frac{d(\cdot)}{dt} = 0$.
Notamos que esto implica en particular que la stream line, path line y streak line son iguales.
- Derivada material (o sustancial): Es la derivada total (es decir no parcial) de una propiedad del fluido con respecto al tiempo, se llama material por que sigue la propiedad del fluido mientras este se esta moviendo, formalmente se define como:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + V \cdot \nabla F$$
o de forma explicita como:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot u + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot w$$

Donde F es una propiedad del fluido que cambia con el tiempo y la poscion, u v y w las componentes de la velocidad, notamos que esta definicion solo viene de usar la regla de la cadena al derivar.

Chapter 2

Problemas resueltos de cinemática

P1 El campo de flujo de un fluido bidimensional esta dado por:

$$u = \frac{x}{1+t} \text{ y } v = \frac{y}{1+2t}.$$

Obtenga a) La linea de corriente. b) La linea de trayectoria.

R a): En efecto primero escribimos la definición de linea de corriente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \frac{1+t}{1+2t} \text{ (Integrando)}$$

$$\log(y) = \log(x) \frac{1+t}{1+2t} \text{ (Aplicando la exponencial)}$$

$$y = Cx^{\frac{1+t}{1+2t}} \text{ Las condiciones de borde son:}$$

$$y(t=0) = y_0 \text{ y } x(t=0) = x_0 \text{ (Implica)}$$

$$y = \frac{y_0}{x_0} x^{\frac{1+t}{1+2t}}$$

b): En efecto escribimos las deficiones de lineas de trayectoria.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x}{1+t} \text{ y } dy = \frac{y}{1+2t} \text{ (Integrando)}$$

$$x(t) = A1(1+t) \text{ y } y(t) = A2(1+2t)^{1/2} \text{ (Aplicando condiciones de borde de la parte a)}$$

$$x(t) = x_0(1+t) \text{ y } y(t) = y_0(1+2t)^{1/2}.$$

P2 Para el flujo anterior calcule la streakline que pasa por el punto x_0, y_0 en $t = 0$.

R En efecto, vamos a aplicar el algoritmo de la página 3.

$$x(t) = A1(1+t) \text{ y } y(t) = A2(1+2t)^{1/2}$$

$$x_0 = A1(1+\tau) \text{ y } y_0 = A2(1+2\tau)$$

$$x(t) = \frac{x_0}{1+\tau}(1+t) \text{ y } y(t) = \frac{y_0}{(1+2\tau)^{1/2}}(1+2t)^{1/2}$$

$$x = \frac{x_0}{(1+\tau)} \text{ y } y = \frac{y_0}{(1+2\tau)^{1/2}}$$