

• Energía de Deformación y Teorema de Castigliano

↳ Energía por est. axial: $U_{tr} = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{P^2}{A} dx$

↳ Energía por flexión: $U_{fl} = \int_0^L \frac{1}{2E} \frac{M(x)^2}{I_z} dx$

↳ Energía por torsión: $U_{tor} = \int_0^L \frac{1}{2G} \frac{T^2}{J} dx$

↳ Energía por corte: $U_{cor} = \int_0^L \frac{3}{5GA} V(x)^2 dx$
(Sección rectangular)

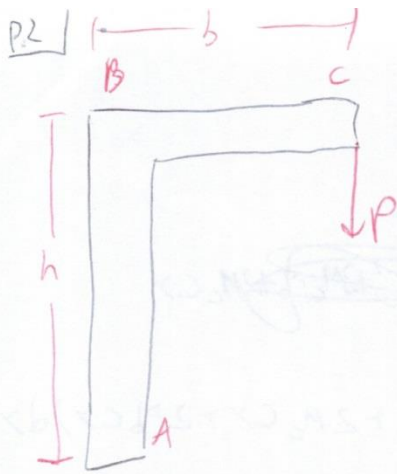
Energía de deformación total U_T es la suma de las energías

• Teorema de Castigliano

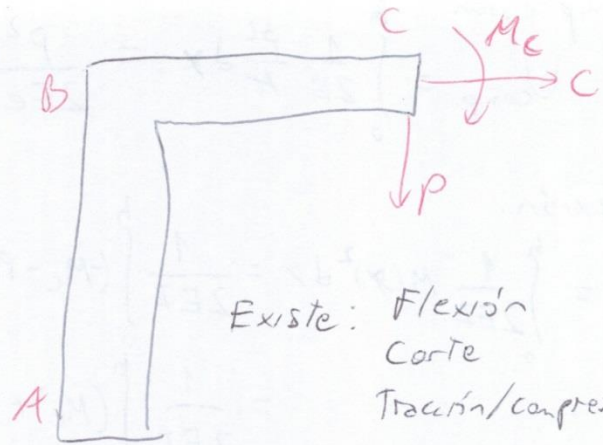
* Deflexión en el punto i : $\delta_i = \frac{\partial U_T}{\partial F_i}$ (F_i : fza. aplicada en punto i)

* Ángulo de rotación en i : $\theta_i = \frac{\partial U_T}{\partial C_i}$ (C_i : Momento aplicado en el punto i)

* Si no hay fza./momento aplicado en el punto de interés, se genera uno virtual, y luego de la derivación (Aplicación del Teorema de Castigliano) se hace igual a cero. δ

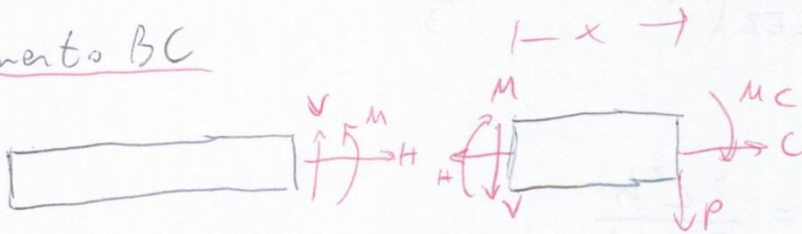


E
 I



Existe: Flexión
Corte
Tracción/compresión

• Segmento BC



$$\begin{aligned} H &= C \\ V &= -P \\ M &= -Px - M_C \end{aligned}$$

→ Tracción

$$U_{tr} = \int_0^b \frac{1}{2E} \frac{C^2}{A} dx = \frac{C^2 b}{2EA} = \frac{C^2 b}{2Eed}$$

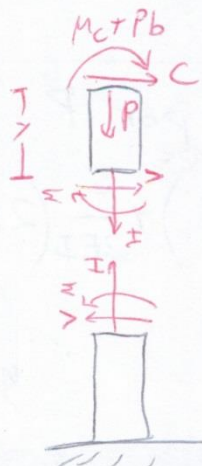
→ Flexión

$$U_A = \int_0^b \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^b (-Px - M_C)^2 dx = \frac{1}{2EI} \left[\frac{P^2 b^3}{3} + M_C P b^2 + M_C^2 b \right]$$

→ Corte

$$U_{cor} = \int_0^b \frac{3}{8GA} V(x)^2 dx = \frac{3P^2 b}{5GA} = \frac{3P^2 b}{5Ged}$$

• Segmento AB



$$\begin{aligned} H &= -P \\ V &= -C \\ M &= -M_C - Pb - Cy \end{aligned}$$

→ Compresión

$$U_{\text{comp}} = \int_0^h \frac{1}{2E} \frac{P^2}{A} dx = \frac{P^2 h}{2Eed}$$

→ Flexión:

$$\begin{aligned} U_{\text{fl}} &= \int_0^h \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx = \frac{1}{2EI} \int_0^h (-M_c - Pb - Cx)^2 dx \\ &= \frac{1}{2EI} \int_0^h (M_c^2 + P^2 b^2 + C^2 x^2 + 2M_c Pb + 2M_c Cx + 2Pb Cx) dx \\ &= \frac{1}{2EI} \left(M_c^2 h + P^2 b^2 h + \frac{C^2 h^3}{3} + 2M_c Pb h + M_c C h^2 + Pb C h^2 \right) \end{aligned}$$

→ Corte:

$$U_{\text{cor}} = \frac{3}{5GA} \int_0^h V(x)^2 dx = \frac{3C^2 h}{5Ged}$$

• Luego, la energía total de deformación está dada por

$$U_T = U_{\text{tr}} + U_{\text{comp}} + U_{\text{fl}}^{AB} + U_{\text{fl}}^{BC} + U_{\text{cor}}^{AB} + U_{\text{cor}}^{BC}$$

$$\begin{aligned} U_T &= \frac{C^2 b}{2Eed} + \frac{P^2 h}{2Eed} + \frac{1}{2EI} \left(\frac{P^2 b^3}{3} + M_c P b^2 + M_c^2 b \right) \\ &\quad + \frac{1}{2EI} \left(M_c^2 h + P^2 b^2 h + \frac{C^2 h^3}{3} + 2M_c P b h + M_c C h^2 + P b C h^2 \right) \\ &\quad + \frac{3P^2 b}{5Ged} + \frac{3C^2 h}{5Ged} \end{aligned}$$

• Deflexión vertical δ_y en C → Producida por P

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_T}{\partial P} \right)_{\substack{M_c=0 \\ C=0}} &= \frac{Ph}{Eed} + \frac{1}{2EI} \left(\frac{2}{3} P b^3 + \cancel{M_c b^2} \right) + \frac{1}{2EI} \left(2P b^2 h + \cancel{2M_c b h} + \cancel{b C h^2} \right) \\ &\quad + \frac{6Pb}{5Ged} \end{aligned}$$

$M_c=0 \quad C=0$

$$= \frac{Ph}{Eed} + \frac{Pb^3}{3EI} + \frac{Pb^2h}{EI} + \frac{6Pb}{5Ged} \quad / \quad I_z = \frac{ed^3}{12}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial U_T}{\partial P} \right)_{M_C=0, C=0} = \delta_y = \frac{P}{Eed} \left(h + \frac{4b^3}{d^2} + \frac{12b^2h}{d^2} \right) + \frac{6Pb}{5Ged}$$

$$\therefore \delta_y = \frac{4P}{Eed} \left(\frac{h}{4} + \frac{b^3 + 3b^2h}{d^2} \right) + \frac{6}{5} \frac{Pb}{Ged}$$

• Deflexión horizontal δ_x en C $\rightarrow$ Producida por C

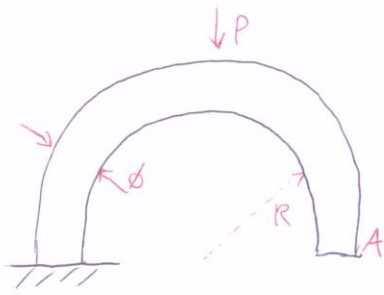
$$\left(\frac{\partial U_T}{\partial C} \right)_{M_C=0, C=0} = \frac{Cb}{Eed} + \frac{Ch^3}{3EI} + \frac{M_C h^2}{2EI} + \frac{Pbh^2}{2EI} + \frac{6Ch}{5Ged}$$

$$\therefore \delta_x = \frac{6Pbh^2}{Eed^3}$$

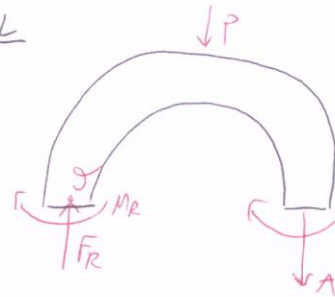
• ~~Deflexión~~ Ángulo de rotación en C $\rightarrow$ Producido por M_C

$$\left(\frac{\partial U_T}{\partial M_C} \right)_{M_C=0, C=0} = \frac{Pb^2}{2EI} + \frac{M_C b}{EI} + \frac{M_C h}{EI} + \frac{Pbh}{EI} + \frac{Ch}{2EI}$$

$$\Rightarrow \theta_C = \frac{Pb^2}{2EI} + \frac{Pbh}{EI} \Rightarrow \theta_C = \frac{6Pb}{Eed^3} (b + 2h)$$



* DCL



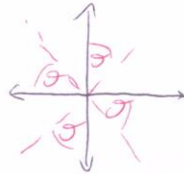
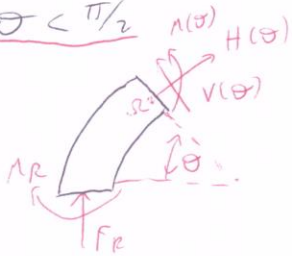
F_R y M_R no se los puse
utilización para casti-
glio

$$\sum \mathcal{M}_z = -M_R - RP - 2RA - M_A = 0 \quad \parallel \quad \sum F_y = F_R - P - A = 0$$

$$\boxed{M_R = -(RP + 2RA + M_A)} \quad \parallel \quad \boxed{F_R = P + A}$$

* Cargas internas: En función de θ :

$0 \leq \theta < \pi/2$



* $H(\theta) = -F_R \cos \theta$

$\boxed{H(\theta) = -(P+A) \cos \theta}$

* $V(\theta) = -F_R \sin \theta$

$\boxed{V(\theta) = -(P+A) \sin \theta}$

↳ Para $M(\theta)$



* $\vec{r}(\theta) = R \cos(\theta) \hat{i} + R \sin(\theta) \hat{j}$

* $\vec{r}_0 = \vec{r}(\theta=0) = -R \hat{i}$

$\Rightarrow \vec{j} = \vec{r}_0 - \vec{r}(\theta) = R(\cos \theta - 1) \hat{i} - R \sin(\theta) \hat{j}$

* Considerando $\vec{F}_R = F_R \hat{j} \Rightarrow \vec{M}_{F_R} = \vec{j} \times \vec{F}_R$

$\Rightarrow \vec{M}_{F_R} = [R(\cos \theta - 1) \hat{i} - R \sin \theta \hat{j}] \times [F_R \hat{j}]$

$\boxed{\vec{M}_{F_R} = F_R \cdot R (\cos \theta - 1) \hat{k}}$

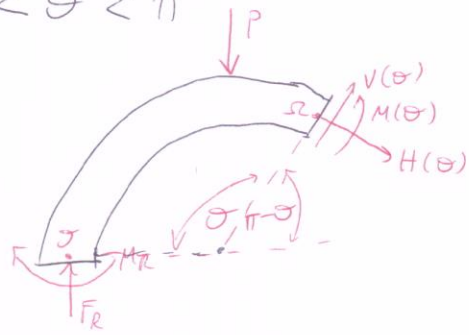
* $\sum \mathcal{M}_z = 0$

$M(\theta) - M_R + M_{F_R} = 0 \Rightarrow M(\theta) = M_R - M_{F_R}$

$M(\theta) = -(RP + 2RA + M_A) - F_R \cdot R (\cos \theta - 1)$

$\boxed{M(\theta) = -AR - M_A - R \cos \theta (P+A)}$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$$



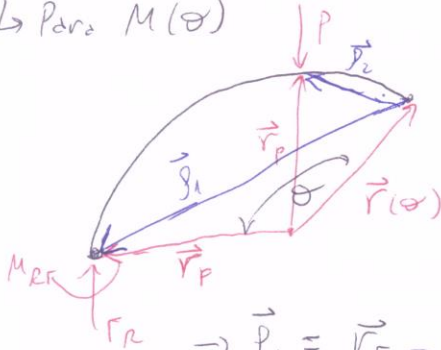
$$* V(\theta) = -F_R \sin(\pi - \theta) + P \sin(\pi - \theta)$$

$$\boxed{V(\theta) = -A \sin(\pi - \theta)}$$

$$* H(\theta) = P \cos(\pi - \theta) - F_R \cos(\pi - \theta)$$

$$\boxed{H(\theta) = -A \cos(\pi - \theta)}$$

↳ Para $M(\theta)$



$$* \vec{P} = -P \hat{j} \quad \wedge \quad \vec{F}_R = F_R \hat{j}$$

$$\vec{r}_F = -R \hat{i} \quad \wedge \quad \vec{r}_P = R \hat{j}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 = \vec{r}_F - \vec{r}(\theta) = -R \hat{i} + R \cos(\theta) \hat{i} - R \sin(\theta) \hat{j}$$

$$\boxed{\vec{F}_1 = R(\cos(\theta) - 1) \hat{i} - R \sin(\theta) \hat{j}}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_2 = \vec{r}_P - \vec{r}(\theta) = R \hat{j} + R \cos(\theta) \hat{i} - R \sin(\theta) \hat{j}$$

$$\boxed{\vec{F}_2 = R \cos(\theta) \hat{i} + R(1 - \sin(\theta)) \hat{j}}$$

$$* \sum \vec{M}_z = 0 \Rightarrow -M_R + M(\theta) + |\vec{F}_1 \times \vec{F}_R| + |\vec{F}_2 \times \vec{P}| = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F}_1 \times \vec{F}_R &= [R(\cos(\theta) - 1) \hat{i} - R \sin(\theta) \hat{j}] \times [F_R \hat{j}] \\ &= F_R R (\cos(\theta) - 1) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{F}_2 \times \vec{P} &= [R \cos(\theta) \hat{i} + R(1 - \sin(\theta)) \hat{j}] \times [-P \hat{j}] \\ &= -PR \cos(\theta) \hat{k} \end{aligned}$$

$$\therefore M(\theta) = -M_R - F_R R (\cos \theta - 1) + PR \cos \theta$$

$$\boxed{M(\theta) = -AR(1 + \cos \theta) - M_A}$$

• Considerando sólo energía por flexión y tracción/compresión

$$U_{Fl} = \int_0^{\pi} \frac{M(\theta)^2}{2EI} ds \quad \wedge \quad U_{Tr} = \int_0^{\pi} \frac{H(\theta)^2}{2EA} ds \quad // \quad ds = R \cdot d\theta$$

$$\Rightarrow \delta_A = \frac{\partial}{\partial A} (U_{Fl} + U_{Tr}) = \int_0^{\pi} \frac{M(\theta)}{EI} \cdot \frac{\partial M(\theta)}{\partial A} \cdot R d\theta + \int_0^{\pi} \frac{H(\theta)}{EA} \cdot \frac{\partial H(\theta)}{\partial A} R d\theta$$

$$\Rightarrow \partial_A = \frac{\partial}{\partial M_A} (U_{Fl} + U_{Tr}) = \int_0^{\pi} \frac{M(\theta)}{EI} \cdot \frac{\partial M(\theta)}{\partial M_A} R d\theta + \int_0^{\pi} \frac{H(\theta)}{EA} \cdot \frac{\partial H(\theta)}{\partial M_A} R d\theta$$

$$\Rightarrow H(\theta) = \begin{cases} -(P+A) \cos \theta & 0 < \theta < \pi/2 \\ -A \cos \theta & \pi/2 < \theta < \pi \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial H(\theta)}{\partial A} = -\cos(\theta) \\ \frac{\partial H(\theta)}{\partial M_A} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow M(\theta) = \begin{cases} -AR - M_A - R \cos \theta (P+A) \\ -AR(1 + \cos \theta) - M_A \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial M(\theta)}{\partial A} = -R(1 + \cos \theta) \\ \frac{\partial M(\theta)}{\partial M_A} = -1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \delta_A = \left[\frac{1}{EA} \int_0^{\pi/2} -(P+A) \cos \theta \cdot -\cos \theta R d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} -A \cos \theta \cdot -\cos \theta R d\theta \right]$$

$$+ \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} (-AR - M_A - R \cos \theta (P+A)) \cdot -(R(1 + \cos \theta)) R d\theta \right. \\ \left. + \int_{\pi/2}^{\pi} (-AR(1 + \cos \theta) - M_A) \cdot -(R(1 + \cos \theta)) R d\theta \right]$$

$M_A = 0$
 $A = 0$ } Fzas. Ficticias
 se anulan luego
 de aplicar el
 Teorema de
 Castigliano
 (Derivar)

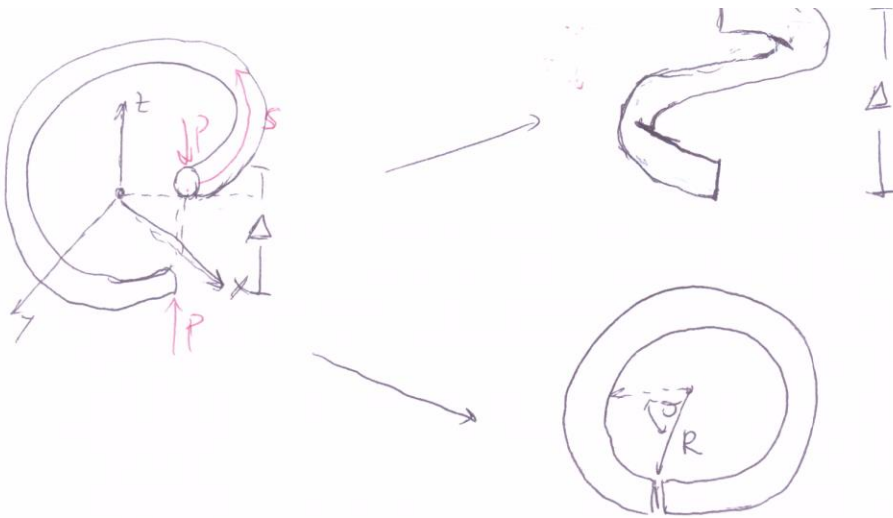
$$\therefore \delta_A = \frac{\pi R P}{4EA} + \frac{R^3}{EI} P(1 + \pi/4)$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_A = \left\{ \frac{1}{EA} \left[\int_0^{\pi/2} \cancel{-(P+A) \cdot \cos \theta \cdot 0 R d\theta} + \int_{\pi/2}^{\pi} \cancel{-A \cos \theta \cdot 0 R d\theta} \right] \right.$$

$$+ \frac{1}{EI} \left[\int_0^{\pi/2} (-AR - M_A - R \cos \theta (P+A)) \cdot -1 R d\theta \right.$$

$$\left. + \int_{\pi/2}^{\pi} (-AR(1 + \cos \theta) - M_A) \cdot -1 R d\theta \right] \left. \begin{array}{l} M_A = 0 \\ A = 0 \end{array} \right\}$$

$$\boxed{\dots \mathcal{D}_A = \frac{R^2 P}{EI}}$$



* Parametrización de la góndola en coord. cilíndricas:

$$\boxed{r = R} \quad \parallel \quad \boxed{s = R \cdot \theta} \quad \parallel \quad \begin{aligned} s = 0 &\Rightarrow z = \Delta \\ s = 2\pi R &\Rightarrow z = 0 \\ \therefore z &= \Delta \left(1 - \frac{s}{2\pi R}\right) \end{aligned}$$

* En coord. cartesianas a coord. cilíndricas:

$$\vec{r} = R \cos \theta \hat{i} + R \sin \theta \hat{j} + \Delta \left(1 - \frac{s}{2\pi R}\right) \hat{k}$$

$$\boxed{\therefore \vec{r} = R \cos\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} + R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{j} + \Delta \left(1 - \frac{s}{2\pi R}\right) \hat{k}}$$

* Para un arco s :

vector normal a sup en S

$$\vec{n} = \frac{d\vec{r}}{ds} = -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} + \cos\left(\frac{s}{R}\right) \hat{j} - \frac{\Delta}{2\pi R} \hat{k}$$

$$\vec{p}_{op} = \vec{r}_0 - \vec{r} \quad \wedge \quad \vec{r}_0 = R \hat{i} + \Delta \hat{k}$$

$$\boxed{\therefore \vec{p}_{op} = R(1 - \cos(\frac{s}{R})) \hat{i} - R \sin(\frac{s}{R}) \hat{j} + \frac{\Delta s}{2\pi R} \hat{k}}$$

* El momento generado por la fuerza $\vec{p}$ en la sección S está dado por

$$\vec{M}_0 = \vec{p}_{op} \times \vec{p} \quad \wedge \quad \vec{p} = -P \hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_0 = (R(1 - \cos(\frac{s}{R})) \hat{i} - R \sin(\frac{s}{R}) \hat{j} + \frac{\Delta s}{2\pi R} \hat{k}) \times (-P \hat{k})$$

$$\boxed{\vec{M}_0 = PR \sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} + PR(1 - \cos(\frac{s}{R})) \hat{j}}$$

* Como el momento $\vec{M}_0$ no está alineado con la superficie de corte, sino con las coordenadas cartesianas, no sabemos qué componentes de $\vec{M}_0$ hacen flexión o torsión. Por lo tanto es necesario, antes de aplicar Castigliano, encontrar un sistema coordenado alineado con la superficie de corte y luego encontrar las componentes del momento en ese sistema coordenado.

* Ya conocemos el vector normal a la superficie ($\vec{n}$). Debemos normalizar y luego encontrar dos vectores ortonormales a $\vec{n}$, que son tangentes a la superficie de corte

$$j = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \sqrt{\sin^2\left(\frac{s}{R}\right) + \cos^2\left(\frac{s}{R}\right) + \frac{\Delta^2}{4\pi^2 R^2}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta}{2\pi R}\right)^2}$$

* Se debe elegir un vector ortonormal a $\frac{1}{j}\vec{n}$: , escogamos por ejemplo:

$$\vec{t}_1 = \cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{i} + \sin\left(\frac{s}{R}\right)\hat{j}$$

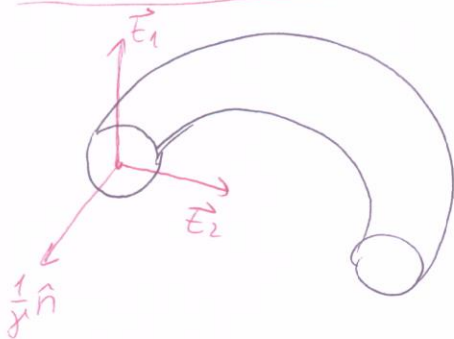
$\Rightarrow$ Si son ortogonales $\Rightarrow \vec{t}_1 \cdot \frac{1}{j}\vec{n} = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ \sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{j} \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \\ \cos\left(\frac{s}{R}\right) \\ -\frac{\Delta}{2\pi R} \end{pmatrix} = -\sin\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{s}{R}\right) + \sin\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{s}{R}\right) - 0 \cdot \frac{\Delta}{2\pi R} = 0 //$$

* El siguiente vector ortonormal sale de $\Rightarrow \vec{t}_2 = \frac{1}{j}\vec{n} \times \vec{t}_1$

$$\Rightarrow \vec{t}_2 = \frac{1}{j} \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right)\hat{i} + \cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{j} - \frac{\Delta}{2\pi R}\hat{k} \right) \times \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{i} + \sin\left(\frac{s}{R}\right)\hat{j} + 0\hat{k} \right)$$

$$\vec{t}_2 = \frac{1}{j} \left(\frac{\Delta}{2\pi R} \sin\left(\frac{s}{R}\right)\hat{i} - \frac{\Delta}{2\pi R} \cos\left(\frac{s}{R}\right)\hat{j} - \hat{k} \right)$$



$\Rightarrow$ La componente en $\frac{1}{j}\vec{n}$ de $\vec{M}_0$ es una componente en torsión

• Las componentes en $\vec{t}_1$ y $\vec{t}_2$ de $\vec{M}_0$ son componentes en flexión

• Las componentes se calculan haciendo producto punto con los ejes:

$$\Rightarrow T = \frac{1}{J} \vec{n} \cdot \vec{M}_0 = \frac{1}{J} \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} + \cos\left(\frac{s}{R}\right) \hat{j} - \frac{\Delta}{2\pi R} \hat{k} \right) \cdot \left(PR \sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} + PR(1-\cos\left(\frac{s}{R}\right)) \hat{j} \right)$$

$$= \frac{1}{J} \left(-PR \sin^2\left(\frac{s}{R}\right) + PR \cos\left(\frac{s}{R}\right) - PR \cos^2\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

$$T = \frac{PR}{J} \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right) - 1 \right)$$

$$\Rightarrow M_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{M}_0 = \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} + \sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{j} \right) \cdot \left(PR \sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} + PR(1-\cos\left(\frac{s}{R}\right)) \hat{j} \right)$$

$$= PR \sin\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{s}{R}\right) + PR \sin\left(\frac{s}{R}\right) - PR \sin\left(\frac{s}{R}\right) \cdot \cos\left(\frac{s}{R}\right)$$

$$M_1 = PR \cdot \sin\left(\frac{s}{R}\right)$$

$$\Rightarrow M_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{M}_0 = \frac{1}{J} \left(\frac{\Delta}{2\pi R} \sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} - \frac{\Delta}{2\pi R} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \hat{j} - \hat{k} \right) \cdot \left(PR \sin\left(\frac{s}{R}\right) \hat{i} + PR(1-\cos\left(\frac{s}{R}\right)) \hat{j} \right)$$

$$= \frac{1}{J} \left(\frac{P\Delta}{2\pi} \sin^2\left(\frac{s}{R}\right) - \frac{P\Delta}{2\pi} \cos\left(\frac{s}{R}\right) + \frac{P\Delta}{2\pi} \cos^2\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

$$M_2 = \frac{P\Delta}{2\pi J} \left(1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

x Ahora estamos en condiciones para calcular las energías de deformación y aplicar el teorema de Castigliano. Recordar que ahora integramos en la coordenada s :

$$\delta_T = \Delta = \delta_{\text{flexión}} + \delta_{\text{torsión}} = \frac{\partial U_{M1}}{\partial P} + \frac{\partial U_{M2}}{\partial P} + \frac{\partial U_T}{\partial P}$$

$$= \frac{\partial}{\partial P} \left[\int_0^{2\pi R} \frac{M_1^2(s)}{2EI} ds + \int_0^{2\pi R} \frac{M_2^2(s)}{2EI} ds + \int_0^{2\pi R} \frac{T^2(s)}{2GJ} ds \right]$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi R} M_1(s) \cdot \frac{dM_1}{dP} ds + \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi R} M_2(s) \cdot \frac{dM_2}{dP} ds + \frac{1}{GJ} \int_0^{2\pi R} T(s) \cdot \frac{dT}{dP} ds$$

$$= \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi R} P R^2 \sin^2\left(\frac{s}{R}\right) ds + \frac{1}{EI} \int_0^{2\pi R} P \left(\frac{\Delta}{2\pi R} \right)^2 \left(1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right)^2 ds + \frac{1}{GJ} \int_0^{2\pi R} P \frac{R^2}{J} \left(\cos\left(\frac{s}{R}\right) - 1 \right)^2 ds$$

$$= \frac{\pi P R^3}{EI} + \frac{3\pi P R}{EI} \left(\frac{\Delta}{2\pi R} \right)^2 + \frac{3\pi R^3 P}{\gamma^2 G J} = \Delta$$

* Finden wir, deswegen P :

$$P = \frac{\Delta}{\frac{\pi R^3}{EI} + \frac{3\pi R}{EI} \left(\frac{\Delta}{2\pi R} \right)^2 + \frac{3\pi R^3}{\gamma^2 G J}}$$