Clase Auxiliar Examen

P1. Considere el problema:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{mín} & (x \ y) \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} \\ -a_{12} & -a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-1 \ -4) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 3 \\ \text{s.a.} & 2x - 2y = 1 \\ & (x + y)^2 \leq 1 \end{array}$$

- a) Encuentre condiciones sobre los a_{ij} bajo las cuales el problema sea convexo y tenga solución única.
- b) Demuestre que los gradientes de las restricciones son linealmente independientes en todo punto factible del problema.
- c) Encuentre la solución del problema para el caso $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = -2$, usando las condiciones de optimalidad de KKT.

P2. a) Demuestre que el problema de optimización irrestricto

$$\text{mín} \quad \frac{1}{2}x^T Qx + r^T x$$

donde Q es simétrica y definida positiva, es resuelto en una iteración por el método de Newton, sin importar el punto inicial. Diga cual es la solución.

b) Considere el problema

$$\begin{array}{l} \text{mín} \quad f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 17x + 4y \\ x, y \in \mathbb{R} \end{array}$$

- i) Encontrar un punto $\bar{x}$ que satisfaga las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden. Justifique si este punto es óptimo global y si es único.
 - ii) Determine la tasa de convergencia del método del gradiente en este caso.
 - iii) A partir de un punto x_0 , ¿cuántas iteraciones del método del gradiente son necesarias para garantizar que el error bajo la norma Q se reduce desde $\epsilon(x_0)$ hasta $10^{-5}\epsilon(x_0)$? La matriz Q representa la matriz de la forma cuadrática f .
- c) Explícite la iteración de Newton para la función $f(x) = -e^{-x^2}$. Luego, notando que 0 minimiza f , calcule la región de convergencia de este método.

Indicación: Para esto último identifique la región donde se cumple $|x_k| > |x_{k+1}|$ siendo x_k la sucesión generada por el método de Newton.