MA3701 Optimización, 2016-2. 14 de noviembre de 2016
Profesor: Vicente Acuña.
Auxiliar: Raúl Pezoa.

Clase Auxiliar #7

P1. **a)** Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Considere la pareja primal dual:

$$(P) \quad \begin{array}{lrcl} \text{mín} & c^T x & & \\ \text{s.a.} & Ax & \geq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array} \qquad\qquad (D) \quad \begin{array}{lrcl} \text{máx} & b^T y & & \\ \text{s.a.} & A^T y & \leq & c \\ & y & \geq & 0 \end{array}$$

Muestre que $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son soluciones de (P) y (D) respectivamente si y solamente si ambos son factibles y satisfacen $\overline{x}^\top(A^\top \overline{y} - c) = 0 = \overline{y}^\top(A\overline{x} - b)$.
Propuesto: Mostrar que se tiene para cualquier pareja primal dual.

b) Determine el dual del problema siguiente:

$$(P) \quad \begin{array}{lr} \text{mín} & -20x_1 - 16x_2 - 12x_3 \\ \text{s.a.} & x_1 \leq 400 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1000 \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1600 \\ & x \geq 0 \end{array}$$

c) Usando el Teorema de Holgura Complementaria, demuestre que $x^T = (0, 600, 400)$ es solución de (P) y encuentre una solución del problema dual.

P2. **a)** Resuelva, utilizando el método Simplex con dos fases, el problema:

$$(P) \quad \begin{array}{lr} \text{mín} & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ & x_1 + x_2 + 3x_3 = 60 \\ & 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 120 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

b) Considere el siguiente cuadro (tableau) del método Simplex, que proviene de la resolución de un problema de la forma

$$\text{mín } c^T x, \text{ s.a. } Ax = b, \ x \geq 0$$

$$\begin{array}{ccccc|c} -\gamma & 0 & 0 & 2 & 0 & 10 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 6 & 0 & 4 \\ \alpha & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \theta \end{array}$$

a) La solución en curso es óptima y es única (¿cuál es?).
b) El problema es no acotado (¿cuál es dirección extrema correspondiente a este no acotamiento?).
c) La solución en curso es óptima pero no es única (indique el conjunto solución).

d) La solución en curso es factible, pero no es óptima (realice, a partir de ella, una iteración más).

Si el cuadro es óptimo y el vector de costos originales es $c^T = (1, 1, 1, 1, -1)$

e) Deduzca el valor (o rango) de θ.

f) Deduzca el valor (o rango) de α.

P3. Sea el siguiente problema lineal:

$$
\begin{aligned}
(P) \quad \min \quad & c^T x \\
Ax &\geq -c \\
x &\geq 0
\end{aligned}
$$

Con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz antisimétrica $(M^T = -M)$ y c un vector no negativo.Determine el dual de (P) y demuestre usando el teorema de dualidad que $\overline{x} = 0$ es una solución óptima de (P).