MA3701 Optimización, 2016-2. 29 de septiembre de 2016
Profesor: Vicente Acuña.
Auxiliar: Raúl Pezoa.

Cosas Pendientes y Extra Auxiliar #2

Enunciado Resultado Extra Probado: Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Muestre que $\mathcal{P}$ tiene al menos una dirección extrema ssi $\mathcal{P}$ es no acotado.

P1) Sea $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\} \neq \varnothing$

b) Considere el problema de minimización $\{\text{mín } c^T x, x \in \mathcal{P}\}$. Pruebe que un punto factible x es óptimo si y solo si $c^T d \geq 0$, para todo d dirección factible en x. Muestre además que si la desigualdad anterior es siempre estricta, entonces x es el único punto que alcanza el óptimo.

Solución:

$\boxed{\Rightarrow}$ x óptimo, i.e. $c^T x \leq c^T y \quad \forall y \in \mathcal{P}$. Sea d dirección factible en x, es decir $\exists \overline{\lambda} > 0$ tal que $x + \lambda d \in \mathcal{P} \quad \forall \lambda \in (0, \overline{\lambda})$, pero de la condición inicial de óptimalidad de x

$$\begin{aligned} c^T x \leq c^T (x + \lambda d) & \quad \forall \lambda \in (0, \overline{\lambda}) \\ 0 \leq \lambda c^T d & \quad \forall \lambda \in (0, \overline{\lambda}) \\ 0 \leq c^T d & \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ $c^T d \geq 0$ $\forall d$ dirección factible en x. Sea $y \neq x$, $y \in \mathcal{P}$. Como todo poliedro es convexo, $\lambda y + (1 - \lambda) x = x + \lambda (y - x) \in \mathcal{P}$ $\forall \lambda \in (0, 1)$, por lo que se observa que $\overline{d} = y - x$ es dirección factible en x. Luego, de la hipótesis

$$c^T \overline{d} \geq 0 \Leftrightarrow c^T (y - x) \geq 0 \Leftrightarrow c^T y \geq c^T x$$

Como lo anterior se hizo para y arbitrario en $\mathcal{P}$, x es óptimo del problema de minimización. Si la desigualdad es estricta, es directo que x es el único óptimo.

P2) c) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que f es convexa ssi para cada segmento de recta el valor promedio de f a lo largo de esta es menor o igual que el promedio del valor en los extremos, i.e.

$$f \text{ convexa} \Leftrightarrow \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \text{ se tiene } \int_0^1 f(\lambda x + (1 - \lambda) y) d\lambda \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

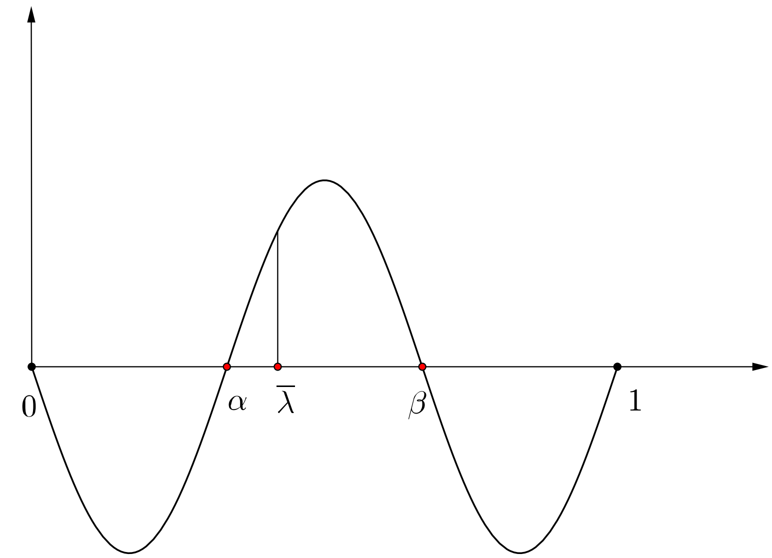
Solución:

$\boxed{\Leftarrow}$

Supongamos por contradicción que f no es convexa, luego existe $\overline{\lambda} \in (0, 1)$ tal que

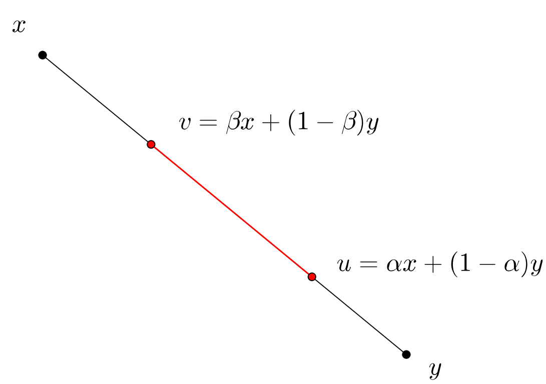
$$f(\overline{\lambda} x + (1 - \overline{\lambda}) y) > \overline{\lambda} f(x) + (1 - \overline{\lambda}) f(y)$$

Definamos $F(\lambda) = f(\lambda x + (1 - \lambda) y) - \lambda f(x) - (1 - \lambda) f(y)$. Es claro que $F(0) = F(1) = 0$, y de lo anterior $F(\overline{\lambda}) > 0$. Como F es continua (pues f lo es), existe un intervalo (α, β) que contiene a $\overline{\lambda}$ en donde $F(\lambda) > 0$ $\forall \lambda \in (\alpha, \beta)$ y $F(\alpha) = F(\beta) = 0$.



$$F(\lambda) > 0 \ \forall \lambda \in (\alpha, \beta) \Leftrightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) > \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \ \forall \lambda \in (\alpha, \beta)$$

La idea sería integrar para obtener una contradicción con la hipótesis de la cota para la integral, el problema es que tendríamos una integral entre (α, β), no sobre $(0,1)$. Visto de manera gráfica, no podemos asegurar la desigualdad para todo el trazo que une x con y (que sería $\forall \lambda \in (0,1)$), si no solo para un subtrazo dado por $\lambda \in (\alpha, \beta)$.



Pero definiendo $u = \alpha x + (1-\alpha)y$, $v = \beta x + (1-\beta)y$ (los extremos del subtramo), tenemos que la desigualdad se tiene para todo punto en el trazo que une u con v, es decir $\forall \lambda \in (0,1)$. Integrando se obtiene la contradicción.

Propuesto: Formalizar lo anterior, i.e. probar que

$$\int_0^1 f(\lambda u + (1-\lambda)v) d\lambda > \frac{f(u)+f(v)}{2}$$