

MA3701 Optimización, 2016-2.

17 de octubre de 2016

Profesor: Vicente Acuña.**Auxiliar:** Raúl Pezoa.

Clase Auxiliar #4

P1) Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{mín} & (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2 \\ \text{s.a.} & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

- a) Establezca las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para el problema. ¿Son condiciones necesarias y suficientes para determinar una solución?
- b) Determine la(s) solución(es) resolviendo las condiciones anteriores.

P2) a) Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$. Demuestre que

$$(\alpha + \beta)C = \alpha C + \beta C \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 \iff C \text{ es convexo}$$

- b) Sea $(P) : \text{mín } f(x)$, donde $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es convexa. Demostrar que si $\{x_1, \dots, x_k\}$ son soluciones de (P) , entonces cualquier punto de $\text{co}\{x_1, \dots, x_k\}$ es solución de (P) , donde $\text{co}\{\cdot, \dots, \cdot\}$ es la envoltura convexa.

P3) Considere el problema de minimización $\{\text{mín } c^T x, x \in \mathcal{P}\}$. Pruebe que un punto factible x es óptimo si y solo si $c^T d \geq 0$, para todo d dirección factible en x . Muestre además que si la desigualdad anterior es siempre estricta, entonces x es el único punto que alcanza el óptimo.

Introducción Teórica

Sea el problema (P) (donde todas las funciones son $\mathcal{C}^1$):

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(x) \leq 0 \quad i \in I \\ & h_j(x) = 0 \quad j \in J \\ & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

1.1 Teorema de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Condición Necesaria

Para el problema (P) , sea $\bar{x}$ un mínimo local que satisface alguna de las calificaciones de restricciones. Luego, existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}^{|J|}$ y un vector $\mu \in \mathbb{R}^{|I|}$, con $\mu \geq 0$ tales que:

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= \nabla f(\bar{x}) + \sum_{j \in J} \lambda_j \nabla h_j(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0, \quad \forall i \in I \end{aligned}$$

Si además el problema (P) es convexo, es decir h_j son funciones lineales afines, g_i son funciones convexas y f es convexa, entonces la condición anterior es también suficiente para que $\bar{x}$ sea un mínimo global (si f es estrictamente convexa, entonces el mínimo es único).

1.2 Calificación de Restricciones

Definamos $I(\bar{x}) := \{i \in I : g_i(\bar{x}) = 0\}$ el conjunto de restricciones activas para $\bar{x}$.

1.2.1 Independencia Lineal de Gradientes Activos (ILGA)

Un punto $\bar{x}$ factible satisface ILGA si $\{\nabla h_j(\bar{x})\}_{j \in J}$ y $\{\nabla g_i(\bar{x})\}_{i \in I(\bar{x})}$ son vectores linealmente independientes, algunas condiciones que nos aseguran regularidad son las siguientes:

1.2.2 Condición de Slater

Supongamos que el conjunto de restricciones es convexo, es decir h_j son funciones lineales afines, g_i son funciones convexas. Si se satisface la condición de Slater:

$$\exists \hat{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\hat{x}) < 0 \quad \forall i \in I, \quad h_j(\hat{x}) = 0 \quad \forall j \in J$$

entonces todo punto factible es calificado.