MA3701 Optimización, 2016-2. 13 de octubre de 2016
Profesor: Vicente Acuña.
Auxiliar: Raúl Pezoa.

Clase Auxiliar #3

Condiciones Necesarias de Optimalidad: Sea x^* un mínimo local del problema irrestricto $\text{mín}\, f(x)$, con f de clase C^2. Entonces:

a) $\nabla f(x^*) = 0$

b) La matriz hessiana $H(x^*)$ es semidefinida positiva.

Condiciones Suficientes de Optimalidad: Sea f de clase C^2, y x^* que satisface:

a) $\nabla f(x^*) = 0$

b) La matriz hessiana $H(x^*)$ es definida positiva.

Entonces x^* es mínimo local del problema irrestricto $\text{mín}\, f(x)$.

P1) a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que f es convexa ssi para cada segmento de recta el valor promedio de f a lo largo de esta es menor o igual que el promedio del valor en los extremos, i.e.

$$f \text{ convexa} \Leftrightarrow \forall\ x, y \in \mathbb{R}^n \text{ se tiene } \int_0^1 f(\lambda x + (1-\lambda)y)d\lambda \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

b) Muestre que la siguiente función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \max_{i=1,\dots,k} \left\| A^{(i)}x - b^{(i)} \right\|$, donde $A^{(i)} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b^{(i)} \in \mathbb{R}^m$, y $\|\cdot\|$ es la norma euclideana en $\mathbb{R}^m$, es convexa.

P2) a) Sea $f : \mathbb{R}. \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Pruebe que f es convexa sobre C convexo ssi $(\nabla f(x) - \nabla f(y))^t(x-y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in C$.

b) Analice convexidad de las siguientes funciones: $f(x_1,x_2) = x_1x_2$, $f(x_1,x_2) = \dfrac{1}{x_1x_2}$, $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1}{x_2}$.

c) Usando las condiciones necesarias de primer orden, encuentre un candidato a óptimo para la función

$$f(x,y,z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$$

d) Verificar que el punto encontrado anteriormente es un mínimo local utilizando la condición suficiente de segundo orden. ¿Es un mínimo global?

e) Considere la función $f(x,y) = (x-y)^4 + (x-1)^4 + 10$. Comente sobre la posibilidad de ocupar las condiciones de optimalidad sobre este problema.