

Clase Auxiliar #2

Definiciones: Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo

- (Dirección): Un vector $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ se dice dirección (o dirección factible) de S en x si $\exists \bar{\lambda} > 0$ tal que $x + \lambda d \in S$, $\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}]$.
- (Dirección de Recesión): Un vector $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ se dice dirección de recesión de S si $\forall x \in S$ se tiene que $x + \lambda d \in S$, $\forall \lambda > 0$.
- (Dirección Extrema): Un vector $d \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ se dice dirección extrema de S si es dirección de recesión y si, dadas d_1 y d_2 , direcciones de recesión de S , tales que $d = \alpha d_1 + \beta d_2$ para algunos $\alpha, \beta > 0$, entonces se tiene que $d = d_1 = d_2$.

Teorema: $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\}$, con puntos extremos $\{x_i\}_{i=1}^k$ y direcciones extremas $\{d_j\}_{j=1}^l$.

Un punto x está en $\mathcal{P}$ ssi solo si se escribe como $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^l \mu_j d_j$, con $\lambda_i, \mu_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

P1) Sea $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, x \geq 0\} \neq \emptyset$

- a) Suponga $\mathcal{P}$ compacto, es decir, cerrado y acotado, con $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de rango $m < n$. Demuestre que las siguientes son equivalentes:
 1. Cada elemento de $\mathcal{P}$ tiene al menos m componentes mayores que cero.
 2. Cada punto extremo de $\mathcal{P}$ tiene exactamente m componentes mayores que cero.
- b) Considere el problema de minimización $\{\min c^T x, x \in \mathcal{P}\}$. Pruebe que un punto factible x es óptimo si y solo si $c^T d \geq 0$, para todo d dirección factible en x . Muestre además que si la desigualdad anterior es siempre estricta, entonces x es el único punto que alcanza el óptimo.

P2) a) Sea Ω convexo y sean $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función convexa no decreciente. Pruebe que $g \circ f$ es convexa.

- b) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, se define su función perspectiva como $g(x, t) = tf\left(\frac{x}{t}\right)$, con $t > 0$. Demuestre que f es convexa si y solo si g lo es.
- c) Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que f es convexa ssi para cada segmento de recta el valor promedio de f a lo largo de esta es menor o igual que el promedio del valor en los extremos, i.e.

$$f \text{ convexa} \Leftrightarrow \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ se tiene } \int_0^1 f(\lambda x + (1 - \lambda)y) d\lambda \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

- d) Muestre que la siguiente función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \max_{i=1, \dots, k} \|A^{(i)}x - b^{(i)}\|$, donde $A^{(i)} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b^{(i)} \in \mathbb{R}^m$, y $\|\cdot\|$ es la norma euclídeana en $\mathbb{R}^m$, es convexa.